TRIGONOMETRÍA

Problema 1.

Demuestre

$$(cotg\,\alpha - cotg\,2\alpha)(sen\,\alpha + sen\,3\alpha) = 2\,cos\,\alpha$$

Demostración.

Forma 1:

$$(cotg\,\alpha - cotg\,2\alpha)(sen\,\alpha + sen\,3\alpha) = \left(\frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} - \frac{cos\,2\alpha}{sen\,2\alpha}\right)2\,sen\,2\alpha\,cos\,\alpha$$

$$= \frac{cos\,\alpha\,sen\,2\alpha - cos\,2\alpha sen\,\alpha}{sen\,\alpha\,sen\,2\alpha} \cdot 2\,sen\,2\alpha\,cos\,\alpha$$

$$= \frac{sen(2\alpha - \alpha)}{sen\,\alpha}\,2\,cos\,\alpha \,=\, 2\,cos\,\alpha$$

Forma 2:

$$(cotg\,\alpha - cotg\,2\alpha)(sen\,\alpha + sen\,3\alpha) =$$
$$= \left(cotg\,\alpha - \frac{cotg^{\,2}\alpha - 1}{2\,cotg\,\alpha}\right)\left(sen\,\alpha + 3sen\,\alpha - 4sen^3\alpha\right)$$
$$= \left(\frac{cotg^2\alpha + 1}{2cotg\,\alpha}\right)4sen\,\alpha\left(1 - sen^2\alpha\right) = \frac{sen\,\alpha\,cosec^2\alpha}{cos\,\alpha}\,2sen\,\alpha\,cos^2\alpha$$
$$= 2\,cos\,\alpha$$

Problema 2.

Resolver

$$tg^3x + cotg^3x = 8\,cosec^{\,3}x\, + 12$$

Solución.

Forma 1:

$$\frac{sen^3x}{cos^3x}+\frac{cos^3x}{sen^3x} \;=\; 8\,\frac{1}{(2\,sen\,x\,cos\,x)^3}+12 \;\;\Leftrightarrow$$
$$sen^6x+cos^6x \;=\; 1+12\,cos^3x\,sen^3x$$
$$(sen^2x+cos^2x)(sen^4x-sen^2x\,cos^2x+cos^4x)=1+12\,cos^3x\,sen^3x$$
$$\left(sen^2x+cos^2x\right)^2-3sen^2x\,cos^2x=1+12\,cos^3x\,sen^3x$$

$3\,sen^2x\,cos^2x\,(4\,sen\,x\,cos\,x+1) \;=\; 0,$ pero de la ecuación inicial se deduce que $sen\,x\neq 0$ y $cos\,x\neq 0,$ por tanto $4\,sen\,x\,cos\,x+1=0\Rightarrow 2sen\,2x=\,-1\Rightarrow$

$$sen\,2x \;=\; -\tfrac{1}{2}\Rightarrow 2x=\,-\tfrac{\pi}{6}\;\Rightarrow 2x=k\pi+(\,-1)^k\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\;\Rightarrow$$
$$x \;=\; k\,\tfrac{\pi}{2}+(\,-1)^{k+1}\tfrac{\pi}{12},\;\; k\in\mathbb{Z}$$

<u>Forma 2:</u>

Como: $\quad tg^3x+cotg^3x=(tg\,x+cotg\,x)^3-3\,(tg\,x+cotg\,x),$

de donde

$$\frac{1}{(sen\,x\;cos\,x)^3}\;-3\left(\frac{1}{sen\,x\;cos\,x}\right)\;=\;8\,\frac{1}{(2\,sen\,x\,cos\,x)^3}+12$$
$$\Updownarrow$$
$$4\,sen\,x\,cos\,x=\,-1$$

lo que nos conduce al mismo resultado.

Problema 3.

Resolver

$$Arcsen\,x \;=\; Arc\,cos(\,-x)$$

Solución.

Como: $\;Arc\,cos(\,-x)=Arcsen\,x\,+\,\frac{\pi}{2},\;$ la ecuación no tiene solución pues se llega a una contradicción.

Nota.

Para cualquier transformación algebraica que arroje una solución, ésta debe ser necesariamente verificada en la ecuación inicial.

Problema 4.

Un monumento $ABCD$ está levantado verticalmente sobre un terreno a nivel. Desde un punto P del terreno, sus partes $AB,\,AC,\,AD$ subtienden ángulos $\alpha,\,\beta$ y γ respectivamente.

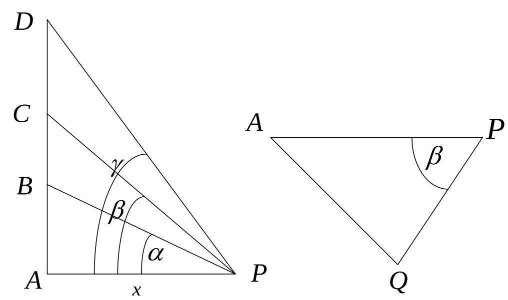
Suponiendo que $AB=2,\;AC=16,\;AD=18$ y $\alpha+\beta+\gamma=180°$

a) Hállese $AP.$

b) Sea Q un punto sobre el terreno, tal que β es el ángulo entre AP y PQ calcúlese QA si $PQ = 8$.

Solución.

a)



Sea $AP = x$, entonces

$$tg\,\alpha = \frac{2}{x},\; tg\,\beta = \frac{16}{x},\; tg\,\gamma = \frac{18}{x}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 180° - \gamma$$

$$tg\,(\alpha + \beta) = tg(180° - \gamma) = -\,tg\,\gamma \Rightarrow$$

$$\frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta} = -\,tg\,\gamma \Rightarrow$$

$$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha\, tg\,\beta\; tg\,\gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{x} + \frac{16}{x} + \frac{18}{x} = \frac{2}{x}\,\frac{16}{x}\,\frac{18}{x} \Leftrightarrow x = 4$$

b) $tg\,\beta = 4 \Rightarrow cos\,\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, aplicando el teorema del coseno

$$AQ^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8\, cos\,\beta$$

$$AQ^2 = 80 - 64 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow AQ = 8.029$$

Problema 5.

a) Demuestre $cos^2\alpha + sen^2\alpha\, cos\,2\beta = cos^2\beta + sen^2\beta\, cos\,2\alpha$

b) Si $Arctg\,y = 4\,Arctg\,x$, hállese y como una función algebraica de x y aproveche esto para demostrar que $tg\,22,5°$ es una raíz de la ecuación

$$x^4 - 6\,x^2 + 1 = 0$$

Demostración.

a) $cos^2\alpha + sen^2\alpha\, cos\,2\beta = cos^2\alpha + (1 - cos^2\alpha)(cos^2\beta - sen^2\beta)$

$$= cos^2\alpha + cos^2\beta - sen^2\beta - cos^2\alpha\, cos^2\beta + cos\,^2\alpha\, sen^2\beta$$

$$= cos^2\alpha + cos^2\beta - sen^2\beta - cos^2\alpha(1 - sen^2\beta) + cos\,^2\alpha\, sen^2\beta$$
$$= cos^2\beta - sen^2\beta + 2\,cos^2\alpha\, sen^2\beta$$
$$= cos^2\beta + sen^2\beta(2\,cos\,^2\alpha - 1) = cos^2\beta + sen^2\beta\, cos\,2\alpha$$

b) Sean $\alpha = Arc\,tg\,y \;\Leftrightarrow\; y \;=\; tg\,\alpha$

$\beta \;=\; Arc\,tg\,x \;\Leftrightarrow x \;=\; tg\,\beta$

así $\alpha = 4\,\beta \;\Leftrightarrow\; tg\,\alpha \;=\; tg\,(2\beta + 2\beta) = \frac{2\,tg\,2\beta}{1-tg^2 2\beta} \;=\; \frac{4\,tg\,\beta\,(1-tg^2\beta)}{1-2\,tg^2\beta+tg^4\beta-4tg^2\beta} \Leftrightarrow$

de aquí se obtiene $y = \frac{4x\,(1-x^2)}{1-6x^2+x^4}$

Por otra parte, sea $\beta = 22.5 \Leftrightarrow \alpha = 4 \cdot 22.5 \Leftrightarrow \alpha = 90°$ como $y = tg\,90°$ que no existe $\Rightarrow\; 1 - 6\,x^2 + x^4 \;=\; 0$ y note que $x \;=\; tg\,22,5°$ entonces

$(tg\,22,5°)^4 - 6\,(tg\,22,5°)^2 + 1 \;=\; 0 \;\Rightarrow\; tg\,22,5°$ es una raíz de la ecuación dada.

Problema 6.

Resolver

$$sen\,x - cos\,3x \;=\; cos\,5x - sen\,3x$$

Solución.

$sen\,3x \;+\; sen\,x \;=\; cos\,5x \;+ cos\,3x \;\Leftrightarrow$

$$2\,sen\,\frac{3x \;+\; x}{2}\,cos\,\frac{3x \;-\; x}{2} \;=\; 2\,cos\,\frac{5x \;+\; 3x}{2}\,cos\,\frac{5x \;-3x}{2} \;\Leftrightarrow$$

$sen\,2x\,cos\,x \;=\; cos\,4x\,cos\,x \;\Leftrightarrow\; cos\,x \;=\; 0 \;\vee\; sen\,2x \;=\; cos\,4x$

$cos\,x \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; x_0 = \frac{\pi}{2}$, luego la solución general es $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2},\; k \in \mathbb{Z}$

$sen\,2x \;=\; cos\,4x \;\Leftrightarrow\; sen\,2x \;=\; cos^2 2x \;- sen^2 2x \;\Leftrightarrow$

$2\,sen^2 2x \;+\; sen\,2x \;-1 \;=\; 0 \;\Rightarrow\; sen\,2x \;=\frac{1}{2} \;\vee\; sen\,2x \;=\; -1$

$sen\,2x \;= \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2x_0 = \frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; 2x = k\pi \;+ (-1)^k\,\frac{\pi}{6} \;\Leftrightarrow\; x = k\frac{\pi}{2} \;+ (-1)^k\,\frac{\pi}{12}$

$sen\,2x = \;-1 \Rightarrow\; 2x_0 = \frac{3\pi}{2} \;\Rightarrow 2x = k\pi \;+ (-1)^k\,\frac{3\pi}{2} \;\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \;+ (-1)^k\,\frac{3\pi}{4}$

Problema 7.

Si γ, α son los ángulos mayor y menor de un triángulo, cuyos lados están en progresión aritmética, demuestre que

$$4\,(1 - cos\,\gamma)(1 - cos\,\alpha) = \;cos\,\gamma + cos\,\alpha$$

Solución.

α menor $\Rightarrow a$ lado menor

γ mayor $\Rightarrow c$ lado mayor

a, b, c en P.A. $\Leftrightarrow\; b - a = c - b \;\Leftrightarrow\; 2\,b = a + c$, por el teorema del seno $\Rightarrow$

$$2\,sen\,\beta \;=\; sen\,\alpha \,+\, sen\,\gamma \;\Leftrightarrow\; 2\,sen\,\beta \;=\; 2\,sen\,\frac{\alpha\,+\,\gamma}{2}\,cos\,\frac{\alpha-\,\gamma}{2} \;\;\Leftrightarrow$$

pero: $\frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \;\Rightarrow\; sen\,\frac{\alpha+\gamma}{2} \;=\; cos\,\frac{\beta}{2};\quad cos\,\frac{\alpha+\gamma}{2} = sen\,\frac{\beta}{2}$ así queda

$2\,sen\,\frac{\beta}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2} \;=\; cos\,\frac{\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha-\gamma}{2} \;\;\Leftrightarrow\;\; 2\,cos\,\frac{\alpha+\gamma}{2} \;=\; cos\,\frac{\alpha-\gamma}{2}\;\; (1) \;\Leftrightarrow$

$4\,cos^2\,\frac{\alpha+\gamma}{2} \;=\; 2\,cos\,\frac{\alpha+\gamma}{2}\;cos\,\frac{\alpha-\gamma}{2} \;\;\Leftrightarrow\; 4\,cos^2\,\frac{\alpha+\gamma}{2} \;=\; cos\,\gamma + cos\,\alpha\;\; (2)$

Por otra parte $4\,(1-cos\,\gamma)(1-cos\,\alpha) \;=\; 16\,sen^2\frac{\alpha}{2}\,sen^2\frac{\gamma}{2} \;=$

$=\; 16\,[\,-\frac{1}{2}\{\,cos\,\frac{\alpha+\gamma}{2} - cos\,\frac{\alpha-\gamma}{2}\}\,]^2 = 4\,[\,-cos\,\frac{\alpha+\gamma}{2} + 2\,cos\,\frac{\alpha+\gamma}{2}\,]^2$, por (1)

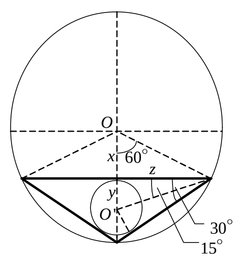
$= 4\,cos^2\,\frac{\alpha+\gamma}{2}\;\; (3)$ finalmente por (2) y (3) se tiene

$$4\,(1-cos\,\gamma)(1-cos\,\alpha) = \; cos\,\gamma + cos\,\alpha.$$

Problema 8.

El ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles es de $120°$; demuéstrese que la distancia entre los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita es a la base como $\sqrt{3}\,-1 : \sqrt{3}$

Solución.



Por demostrar que $\quad \dfrac{x+y}{2z} = \dfrac{\sqrt{3}\,-1}{\sqrt{3}}$

De la figura se tiene

$$tg\,60° = \frac{z}{x} \quad \text{y} \quad tg\,15° = \frac{y}{z}$$

de donde $\quad x+y = \dfrac{z}{tg\,60°} + z\,tg\,15° \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x+y}{2z} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{tg\,60°} + \,tg\,15°)$

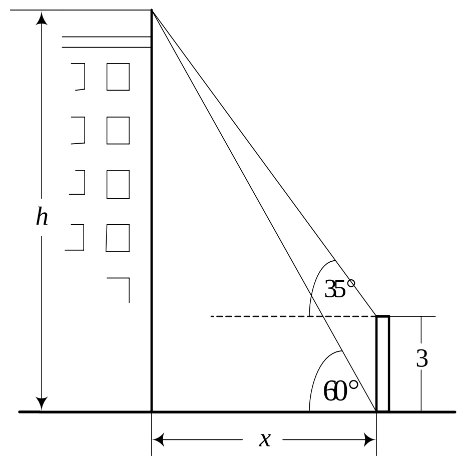
Como $tg\,15° = tg\,(45°-30°) = \dfrac{tg\,45° - tg\,30°}{1+tg\,45°\,tg\,30°} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$\frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}) = \frac{1}{2}\,\frac{4}{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}\,-1}{\sqrt{3}}$$

Problema 9.

Desde el pie de un poste, el ángulo de elevación a la azotea de un edificio es 60° y desde el tope del poste, que tiene 3 m. de altura, el ángulo de elevación al mismo punto es $35°$. Encuentre la altura del edificio y la distancia a que se encuentra del poste.

Solución.



De la fig. se tiene: $tg\,60° = \dfrac{h}{x}$ (1)

$$tg\,35° = \frac{h-3}{x} \qquad (2)$$

De (1) $h = tg\,60°\,x = \sqrt{3}\,x$, en (2) $x\,tg\,35° = \sqrt{3}\,x - 3$ de donde

$$x = \frac{3}{\sqrt{3} - tg\,35°} = 2.90\,\text{m., luego } h = tg\,60° \cdot 2.90 = 5.02\,\text{m.}$$

Problema 10.

Si $\dfrac{tg\,\theta}{tg\,\phi} = \dfrac{y}{x}$ y $\dfrac{cos\,\alpha}{cos\,\theta} = y$

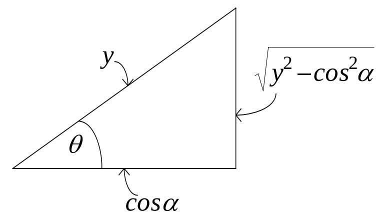
demuestre que

$$tg\,\phi = \frac{x}{y}\sqrt{y^2 sec^2\alpha - 1}$$

Demostración.

De, $\dfrac{tg\,\theta}{tg\,\phi} = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow tg\,\phi = \dfrac{x}{y}\,tg\,\theta$ (1)

Por otra parte como, $\dfrac{cos\,\alpha}{cos\,\theta} = y \Leftrightarrow cos\,\theta = \dfrac{cos\,\alpha}{y}$, y de la fig. se tiene



$$tg\,\theta = \frac{\sqrt{y^2 - cos^2\alpha}}{cos\,\alpha} \text{ en } (1) \text{ resulta}$$

$$tg\,\phi = \frac{x}{y}\,\frac{\sqrt{y^2 - cos^2\alpha}}{cos\,\alpha} = \frac{x}{y}\,\sqrt{y^2 sec^2\alpha - 1}$$

Problema 11.

Resolver la ecuación

$$tg(4\pi - x) + cotg\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 2\,tg2(\pi + x)$$

Solución.

$$tg(4\pi - x) + cotg\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 2\,tg2(\pi + x)$$

$$-\,tg\,x + tg\,2x = 2\,tg\,2x \;\Leftrightarrow\; tg\,x + tg\,2x = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{sen\,x}{cos\,x} + \frac{sen\,2x}{cos\,2x} = 0 \;\Leftrightarrow\; sen\,x\,cos\,2x + cos\,x\,sen\,2x = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$sen(x + 2x) = 0 \;\Leftrightarrow sen\,3x = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x = k\pi \;\Leftrightarrow x = k\,\frac{\pi}{3},\;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Problema 12

$$cotg\,\frac{\theta}{2} - 3\,cotg\,\frac{3\theta}{2} = \frac{4\,sen\,\theta}{1 + 2\,cos\,\theta}$$

Demostración.

$$cotg\,\frac{\theta}{2} - 3\,cotg\,\frac{3\theta}{2} = \frac{cos\,\frac{\theta}{2}}{sen\,\frac{\theta}{2}} - 3\,\frac{cos\,\frac{3\theta}{2}}{sen\,\frac{3\theta}{2}} = \frac{cos\,\frac{\theta}{2}}{sen\,\frac{\theta}{2}} - \frac{cos\,\frac{3\theta}{2}}{sen\,\frac{3\theta}{2}} - 2\frac{cos\,\frac{3\theta}{2}}{sen\,\frac{3\theta}{2}}$$

$$= \frac{cos\,\frac{\theta}{2}\,sen\,\frac{3\theta}{2} - sen\,\frac{\theta}{2}\,cos\,\frac{3\theta}{2}}{sen\,\frac{\theta}{2}\,sen\,\frac{3\theta}{2}} - 2\frac{cos\,\frac{3\theta}{2}}{sen\,\frac{3\theta}{2}}$$

$$= \frac{sen\left(\frac{3\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}{sen\,\frac{\theta}{2}\,sen\,\frac{3\theta}{2}} - 2\frac{cos\,\frac{3\theta}{2}}{sen\,\frac{3\theta}{2}} = \frac{sen\theta}{sen\,\frac{\theta}{2}\,sen\,\frac{3\theta}{2}} - 2\,\frac{cos\,\frac{3\theta}{2}}{sen\,\frac{3\theta}{2}}$$

$$= \frac{2sen\frac{\theta}{2}\,cos\frac{\theta}{2}}{sen\,\frac{\theta}{2}\,sen\,\frac{3\theta}{2}} - 2\frac{cos\frac{3\theta}{2}}{sen\,\frac{3\theta}{2}} = \frac{2(cos\frac{\theta}{2} - cos\frac{3\theta}{2})}{sen\,\frac{3\theta}{2}}$$

$$= \frac{4sen\,\theta\,sen\frac{\theta}{2}}{3sen\frac{\theta}{2}\,-4sen^3\frac{\theta}{2}} = \frac{4sen\,\theta}{3-4sen^2\frac{\theta}{2}} = \frac{4sen\,\theta}{3-2(1-cos\,\theta)}$$

$$= \frac{4\,sen\,\theta}{1+2\,cos\,\theta}$$

Problema 13.

Demuestre que en todo triángulo ABC se tiene

$$tg\,\alpha = \frac{a\,sen\gamma}{b-a\,cos\,\gamma}$$

Demostración.

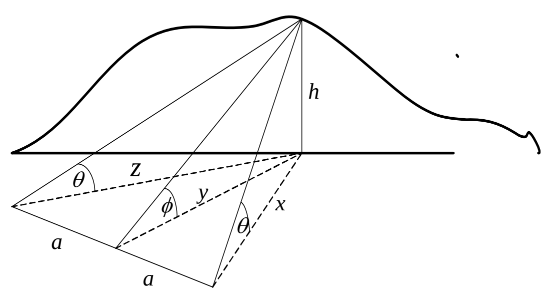
$$\frac{a\,sen\gamma}{b-a\,cos\,\gamma} = \frac{a\,sen\gamma}{b-(b-c\,cos\,\alpha)} = \frac{a}{c}\,\frac{sen\,\gamma}{cos\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha}{sen\,\gamma}\,\frac{sen\,\gamma}{cos\,\alpha} = tg\,\alpha$$

Problema 14.

Desde cada extremo de una base de longitud $2a$, la elevación angular de una montaña es θ y desde el punto medio de la base la elevación es ϕ. Demuestre que la altura de la montaña es

$$a\,sen\,\phi\,sen\,\theta\,[\,cosec(\phi+\theta)\;cosec(\phi-\theta)]^{\frac{1}{2}}$$

Demostración.



$$tg\,\theta = \frac{h}{z} = \frac{h}{x} \Leftrightarrow x = z \Rightarrow y \text{ es altura, por tanto } y^2 + a^2 = x^2 \qquad (1)$$

$$tg\,\theta = \frac{h}{x} \Leftrightarrow x = \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}\,h \quad \wedge \quad tg\,\phi = \frac{h}{y} \Leftrightarrow y = \frac{cos\,\phi}{sen\,\phi}\,h, \text{ en } (1)$$

$$\frac{cos^2\phi}{sen^2\phi}\,h^2 + a^2 = \frac{cos^2\theta}{sen^2\theta}\,h^2 \;\Leftrightarrow$$

$$h^2 = a^2 sen^2\phi\, sen^2\theta\,(\frac{1}{sen^2\phi\, cos^2\theta - sen^2\theta\, cos^2\phi})$$

$$h^2 = a^2 sen^2\phi\, sen^2\theta\,\frac{1}{(sen\phi\, cos\theta + sen\theta\, cos\phi)(sen\phi\, cos\theta - sen\theta\, cos\phi)}$$

$$h^2 = a^2 sen^2\phi\, sen^2\theta\,\frac{1}{sen(\phi+\theta)\, sen(\phi-\theta)}$$

$$h = a\, sen\,\phi\, sen\,\theta\,[\,cosec(\phi+\theta)\;\; cosec(\phi-\theta)]^{\frac{1}{2}}$$

Problema 15

a) Si $4\,cos\,\alpha = 3,$ demuestre que

$$32\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,sen\,\frac{5\alpha}{2} = 11$$

b) Demuestre que todos los ángulos que satisfacen la ecuación

$$sen\,2x = cos\,2x$$

están comprendidos en la fórmula $(8k-1)\,\frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{4},\;\; k \in \mathbb{Z}$.

Demostración.

a) $32\,sen\,\dfrac{\alpha}{2}\,sen\,\dfrac{5\alpha}{2} = 32\,\cdot\dfrac{1}{2}\,[cos(\,-2\alpha) - cos\,3\alpha\,]$

$$= 16\,[2cos^2\alpha - 1 - 4\,cos^3\alpha + 3\,cos\,\alpha\,]$$

$$= 16\,[2\,(\frac{3}{4})^2 - 1 - 4\,(\frac{3}{4})^3 + 3\,(\frac{3}{4})\,] = 11$$

b) $sen\,2x = cos\,2x \;\Leftrightarrow\; tg\,2x = 1 \Leftrightarrow 2x = n\pi\, + \dfrac{\pi}{4} \;\Leftrightarrow\; x = n\,\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{8},\, n \in \mathbb{Z}$

Notemos que, si $n = 2k \Rightarrow x = k\,\pi + \dfrac{\pi}{8}$ $\qquad (1)$

si $n = 2k-1 \Rightarrow x = k\,\pi - \dfrac{3\pi}{4}$ $\qquad (2)$

Finalmente (1) y (2) son equivalentes con $(8k-1)\,\dfrac{\pi}{8} \pm \dfrac{\pi}{4},\;\; k \in \mathbb{Z}$.

Problema 16.

a) Si $\alpha = \dfrac{\pi}{19}$ hallar el valor de

$$\frac{sen\,23\alpha - sen\,3\alpha}{sen\,16\alpha + sen\,4\alpha}$$

b) Si $sen\,\alpha = -0.6$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ calcule el valor de

$$\frac{sen\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + tg(\pi - \alpha)}{cosec\,(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + cos\,\alpha}$$

Solución.

a) $$\frac{sen\,23\alpha - sen\,3\alpha}{sen\,16\alpha + sen\,4\alpha} = \frac{2cos\,13\alpha\,sen\,10\alpha}{2\,sen\,10\alpha\,cos\,6\alpha} = \frac{cos\,13\alpha}{cos\,6\alpha} = \frac{cos(19-6)\frac{\pi}{19}}{cos\,\frac{6\pi}{19}} =$$

$$= \frac{cos(\pi - \frac{6\,\pi}{19})}{cos\,\frac{6\pi}{19}} = \frac{-\,cos\,\frac{6\pi}{19}}{cos\,\frac{6\pi}{19}} = -1$$

b) $$\frac{sen\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + tg(\pi - \alpha)}{cosec\,(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + cos\,\alpha} = \frac{-\,cos\,\alpha - tg\,\alpha}{-\,sec\,\alpha + cos\,\alpha} = \frac{cos^2\alpha + sen\,\alpha}{1 - cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{cos^2\alpha + sen\,\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{(-0.8)^2 - 0.6}{(-0.6)^2} = 0.111...$$

Problema 17.

Demostrar las siguientes identidades

a) $Arc\,cos\,\frac{41}{49} = 2\,Arcsen\,\frac{2}{7}$

b) $\frac{3 - 4\,cos\,2\,\alpha + cos\,4\alpha}{3 + 4\,cos\,2\alpha + cos\,4\alpha} = tg^4\alpha$

Demostración.

a) Sean $\alpha = Arc\,cos\,\frac{41}{49} \Leftrightarrow cos\,\alpha = \frac{41}{49}$

$\beta = Arcsen\,\frac{2}{7} \Leftrightarrow sen\,\beta = \frac{2}{7}$

Así $cos\,2\beta = 1 - 2\,sen^2\beta = 1 - 2(\frac{2}{7})^2 = \frac{41}{49} \Leftrightarrow 2\,\beta = Arc\,cos\,\frac{41}{49}$

De donde $Arc\,cos\,\frac{41}{49} = 2\,Arcsen\,\frac{2}{7}$

b)

$$\frac{3-4\,cos\,2\,\alpha+cos\,4\alpha}{3+4\,cos\,2\alpha+cos\,4\alpha}=\frac{3-4\,cos\,2\,\alpha+cos\,2(2\alpha)}{3+4\,cos\,2\,\alpha+cos\,2(2\alpha)}$$

$$=\frac{3-4\,cos\,2\,\alpha+2\,cos^2 2\alpha-1}{3+4\,cos\,2\,\alpha+2\,cos^2 2\alpha-1}$$

$$=\frac{cos^2 2\alpha-2\,cos\,2\alpha+1}{cos^2 2\alpha+2\,cos\,2\alpha+1}=(\frac{1-cos\,2\alpha}{1+cos\,2\alpha})^2$$

$$=\;[\,tg^2\,2\left(\frac{\alpha}{2}\right)]^2=tg^4\alpha$$

Problema 18.

Demostrar

$$\frac{1+cos\,\gamma\,cos(\alpha-\beta)}{1+cos\,\beta\,cos\,(\alpha-\gamma)}=\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$$

Demostración.

$$\frac{1+cos\,\gamma\,cos(\alpha-\beta)}{1+cos\,\beta\,cos\,(\alpha-\gamma)}=\frac{1+\frac{1}{2}[cos(\gamma+\alpha-\beta)+cos(\gamma-\alpha+\beta)]}{1+\frac{1}{2}[cos(\beta+\alpha-\gamma)+cos(\beta-\alpha+\gamma)]}$$

pero $\alpha+\beta+\gamma=180°$, entonces

$$=\frac{1+\frac{1}{2}[cos(180°-\beta-\beta)+cos(180°-\alpha-\alpha)]}{1+\frac{1}{2}[cos(180°-\gamma-\gamma)+cos(180°-\alpha-\alpha)]}$$

$$=\frac{2+[cos(180°-2\beta)+cos(180°-2\alpha)]}{2+[cos(180°-2\gamma)+cos(180°-2\alpha)]}$$

$$=\frac{2+[\,-cos\,2\beta-cos\,2\alpha]}{2+[\,-cos\,2\gamma-cos\,2\alpha]}$$

$$=\frac{1-cos\,2\beta\;+\;1-cos\,2\alpha}{1-cos\,2\gamma\;+\;1-cos\,2\alpha}$$

pero por fórmula del ángulo medio $2sen^2\frac{x}{2}=1-cosx,$ se obtiene

$$=\frac{2\,sen^2\beta\;+\;2\,sen^2\alpha}{2\,sen^2\gamma\;+\;2\,sen^2\alpha}$$

$$=\frac{sen^2\beta\;+\;sen^2\alpha}{sen^2\gamma\;+\;sen^2\alpha}$$

finalmente por el teorema del seno: $sen\,\alpha=ka,$ $sen\,\beta=kb$ y $sen\,\gamma=kc$

$$=\frac{k^2b^2+k^2a^2}{k^2c^2+k^2a^2}$$ simplificando por $k,$ se tiene

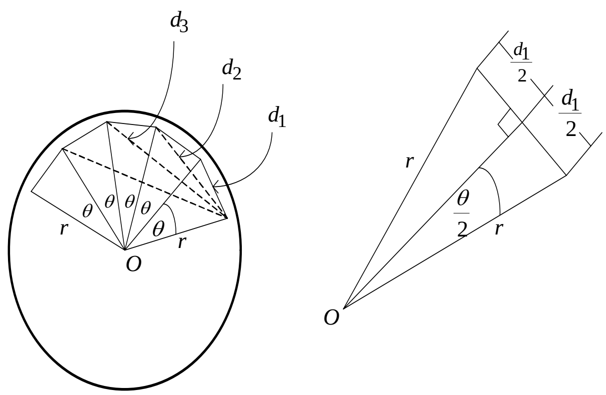
$$= \frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$$

Problema 19.

Las piedras de un campo circular$($de radio $r)$ se recogen en n montones a intervalos regulares a lo largo de su valla. Demuestre que la distancia que habrá de recorrer un trabajador con una carretilla que carga justamente un montón, para llevarlos a uno de los montones es $4r\,cotg\,\dfrac{\pi}{2n}$

$($suponga que empieza su recorrido en este montón$)$

Solución.



Notemos que $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$ y que $\dfrac{d_1}{2} = r\,sen\,\dfrac{\theta}{2} \Leftrightarrow d_1 = 2\,r\,sen\,\dfrac{\theta}{2}$ analogamente se obtienen: $d_2 = 2r\,sen\,\dfrac{2\theta}{2},\; d_3 = 2r\,sen\,\dfrac{3\theta}{2},\;\ldots,\; d_k = 2r\,sen\,\dfrac{k\theta}{2}$

Así la distancia total recorrida es $D = \sum\limits_{k=1}^{n-1} 2\,d_k = 4r\sum\limits_{k=1}^{n-1} sen\,\frac{k\theta}{2}$ por demostrar que $\sum\limits_{k=1}^{n-1} sen\,\dfrac{k\theta}{2} = cotg\,\dfrac{\pi}{2n}$, para lo cual sea la sumatoria a calcular $\sum\limits_{k=1}^{n-1} sen\,kx$, con $x = \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{n}$, en efecto, recurriendo a la identidad

$$sen\,kx = -\frac{1}{2\,sen\,\frac{x}{2}}\left[\,cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x - cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x\,\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} sen\,kx = -\frac{1}{2\,sen\,\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\,cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x - cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x\,\right],$$

por propiedad telescópica, se tiene

$$= -\frac{1}{2\,sen\,\frac{x}{2}}[\,cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x - cos\,\frac{x}{2}]$$

$$= -\frac{1}{2\,sen\,\frac{x}{2}}[-2sen\,\frac{nx}{2}\,sen(\frac{nx-x}{2})] = \frac{sen\frac{nx}{2}\,sen(\frac{n-1}{2})x}{sen\,\frac{x}{2}}$$

pero $x = \frac{\pi}{n}$, finalmente entonces

$$\sum_{k=1}^{n-1} sen\,kx = \frac{sen\,\frac{\pi}{2}\,sen\,(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n})}{sen\,\frac{\pi}{2n}} = \frac{cos\,\frac{\pi}{2n}}{sen\,\frac{\pi}{2n}} = cotg\,\frac{\pi}{2n}$$ como se pretendía.

Problema 20.

Si b, c y β son conocidos y si $b < c$, demuestre que

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 tg^2\beta = 4\,b^2$$

donde x_1 y x_2 son los dos valores del tercer lado.

Solución.

Por el teorema del coseno se tiene $cos\,\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ de aquí formando la ecuación de 2° grado para el lado a, (que es el tercer lado)

$a^2 - 2c\,cos\,\beta\,a + c^2 - b^2 = 0$, donde x_1 y x_2 son las raíces de esta ecuación y por propiedad de las raíces se tienen $x_1 + x_2 = -\frac{-2c\,cos\,\beta}{1} = 2c\,cos\,\beta$

$$x_1 x_2 = \frac{c^2 - b^2}{1} = c^2 - b^2$$

Por otra parte

$$(x_1 - x_2)^2 + 4\,x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4c^2\,cos^2\,\beta - 4(c^2 - b^2)$$

finalmente

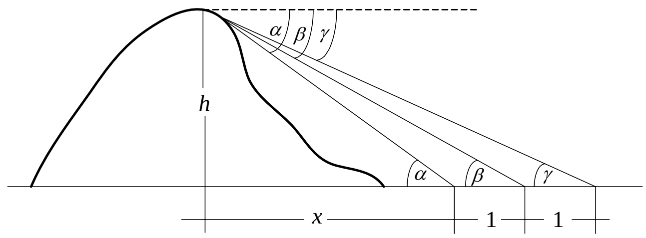
$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 tg^2\beta &= 4c^2\,cos^2\,\beta - 4(c^2 - b^2) + 4c^2 cos^2\beta\,tg^2\beta \\ &= 4c^2\,cos^2\,\beta - 4c^2 + 4b^2 + 4c^2\,sen^2\beta \\ &= 4c^2\,(cos^2\,\beta + sen^2\beta) - 4c^2 + 4b^2 \\ &= 4b^2\end{aligned}$$

Problema 21.

Desde la cima de una colina, una persona halla que los ángulos de depresión de tres piedras consecutivas, indicadoras de los kilómetros de un camino recto a nivel son α, β y γ. Demuestre que la altura de la colina es

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{ctg^2\alpha - 2\,ctg^2\beta\ + ctg^2\gamma}} \text{ (km.)}$$

Solución.



De la figura se tiene:

$$cotg\,\alpha = \frac{x}{h} \quad \Rightarrow \; cotg^2\alpha = \frac{x^2}{h^2}$$
$$cotg\,\beta = \frac{x+1}{h} \Rightarrow cotg^2\beta = \frac{(x+1)^2}{h^2}$$
$$cotg\,\gamma = \frac{x+2}{h} \Rightarrow cotg^2\gamma = \frac{(x+2)^2}{h^2}$$

de donde se obtiene

$$ctg^2\alpha - 2\,ctg^2\beta\ + ctg^2\gamma = \frac{x^2}{h^2} - 2\frac{(x+1)^2}{h^2} + \frac{(x+2)^2}{h^2} = \frac{2}{h^2}$$

finalmente

$$h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{ctg^2\alpha - 2\,ctg^2\beta\ + ctg^2\gamma}} \text{ (km.)}$$

Problema 22.

a) Si $sen\,\alpha = cos\alpha\,cos\beta$ demuestre que

$$tg(\alpha+\beta) - tg\beta = \frac{sec\beta}{1 - sen\beta}$$

b) Considerando $0 \le x \le 2\pi$, resolver la ecuación

$$sen\,(2x + \frac{\pi}{4}) = cos(4x - \frac{\pi}{4})$$

Demostración.

a) $$tg(\alpha+\beta)-tg\beta=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\,tg\beta}-tg\beta=\frac{tg\alpha+tg\beta-tg\beta+tg\alpha tg^2\beta}{1-tg\alpha\,tg\beta}$$

$$=\frac{tg\alpha\,(1+tg^2\beta)}{1-tg\alpha\,tg\beta}=\frac{\frac{sen\alpha}{cos\alpha}\,sec^2\beta}{1-\frac{sen\alpha}{cos\alpha}\,\frac{sen\beta}{cos\beta}}$$

$$=\frac{sen\,\alpha\,sec^2\beta\,cos\beta}{cos\alpha\,cos\beta\,-sen\alpha\,sen\beta}\quad \text{pero}\quad sen\,\alpha=cos\alpha\,cos\beta$$

$$=\frac{sen\alpha\,sec^2\beta\,cos\beta}{sen\alpha\,-sen\alpha\,sen\beta}\;=\frac{sec\beta}{1-sen\beta}$$

b)

$$sen\,(2x+\frac{\pi}{4})=cos(4x-\frac{\pi}{4})\Leftrightarrow sen\,(2x+\frac{\pi}{4})-sen[\frac{\pi}{2}-(4x-\frac{\pi}{4})]=0$$

$$sen\,(2x+\frac{\pi}{4})-sen(\frac{3\pi}{4}-4x)=0\Leftrightarrow 2\,cos(\frac{\pi}{2}-x)\,sen(3x-\frac{\pi}{4})=0$$

$sen\,x\,sen(3x-\frac{\pi}{4})=0$ de aquí : $sen\,x=0\;\vee\;sen(3x-\frac{\pi}{4})=0\;\Rightarrow$

$$sen\,x=0\Rightarrow x=0,\,x=\pi\,,\,x=2\pi$$

$$sen(3x-\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow 3x-\frac{\pi}{4}=k\pi,\;k=0,1,2,3,4,5.\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\;\Rightarrow$$

$$x=\frac{\pi}{12};\;\frac{5\pi}{12};\;\frac{9\pi}{12};\;\frac{13\pi}{12};\;\frac{17\pi}{12};\;\frac{21\pi}{12}$$

Problema 23.