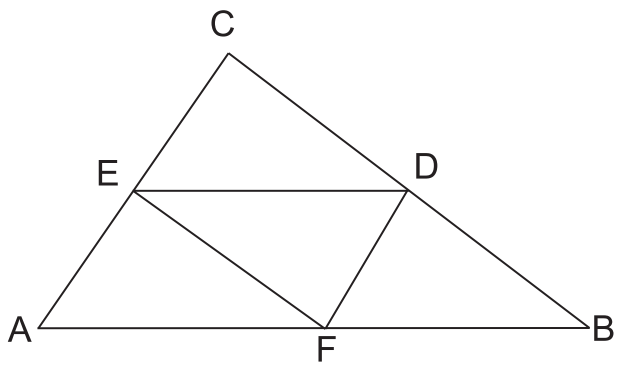
Geometría - Triángulos

1. Si por cada vértice de un triángulo se traza la paralela al lado opuesto, los puntos medios del triángulo así obtenido coinciden con los vértices del triángulo original.

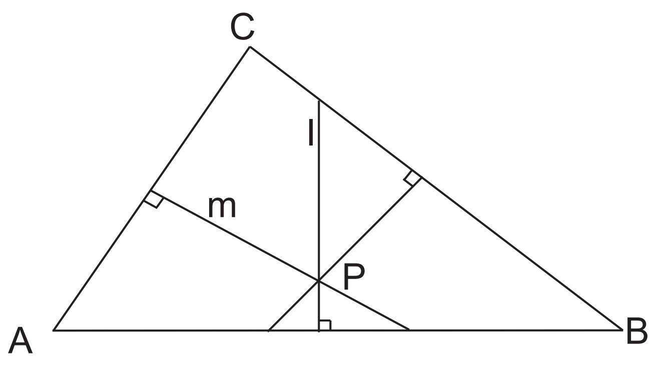
   Solución.

   Sea DEF el triángulo dado. Trazemos AB paralela a ED, AC paralela a DF y BC paralela a EF. Los cuadriláteros $AFDE$ y $FBDE$ son paralelógramos, ya que sus lados opuestos son paralelos, Por lo tanto. En $AFDE$ $AF = ED$, en $FBDE$ $ED = FB$ por lo tanto $AF = FB$ y F es punto medio de AB. En forma análoga E es el punto medio de AC y D es punto medio de CB.

2. Las simetrales de cualquier triángulo se intersectan en un mismo punto llamado circuncentro que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

   Solución.

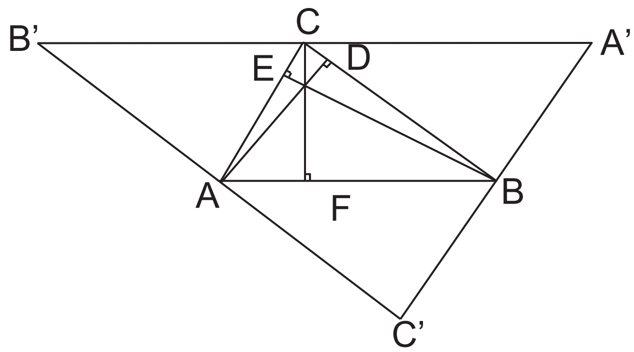
   

   Sea el triángulo ABC un triángulo cualquiera. Tomemos la simetral m correspondiente al lado AB y la simetral l correspondiente al lado AC. LLamemos P al punto de intersección de m y l (Sabemos que este punto existe ya que l y m no son paralelas porque AB y AC no son paralelos). Como P está en l y l es la simetral de AC sabemos que $PA = PC$ (Por definición de simetral). Como P esta también en m sabemos que $PA = PB$. Entonces $PB = PC$ y P tiene que estar en la simetral del lado BC.

Sea $r = PA = PB = PC$ el radio de una circunferencia. Esta circunferencia tiene centro P y pasa por A por B y por C: es la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

3. Las alturas de un triángulo concurren en un punto llamado ortocentro.

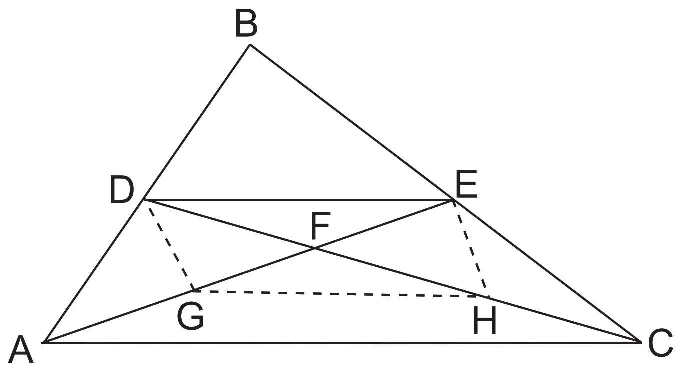
Solución.



Sea el triángulo ABC un triángulo cualquiera. Sean AD, BE y CF las alturas de este triángulo. Tracemos por los vértices A,B y C del triángulo las paralelas a los lados opuestos obteniendo el triángulo $A'B'C'$. Por el problema 1 sabemos que los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo $A'B'C'$ son los vértices del triángulo ABC. Pero entonces las alturas del triángulo ABC son las simetrales del triángulo $A'B'C'$ y por lo tanto concurren (Problema 2).

4. Las transversales de gravedad de un triángulo se intersectan en un mismo punto.

Solución.



Sea el triángulo ABC un triángulo cualquiera. Sea D el punto medio de AB y E el punto medio de BC. AE y CD son las transversales de gravedad. Llamemos F al punto en que éstas se intersectan.

Tomemos G, punto medio de AF y H punto medio de AC. DE es paralelo a AC y $DE = \frac{1}{2}AC$ (Por teorema de Tales).GH es paralelo a AC y $GH = \frac{1}{2}AC$ (Por teorema de Tales). Por lo que $DE = GH$ y $DEGH$ es un paralelógramo. GF=FE y $DF = FH$ ya que en un paralelógramo las diagonales se dimidian. Hemos probado que las transversales de gravedad se cortan en la razón $1 : 2$.

Tomemos M como el punto medio de AC, la transversal de gravedad MB deberá cortar en un tercio a cualquiera de las otras dos transversales de gravedad, por lo que necesariamente debe pasar por F.