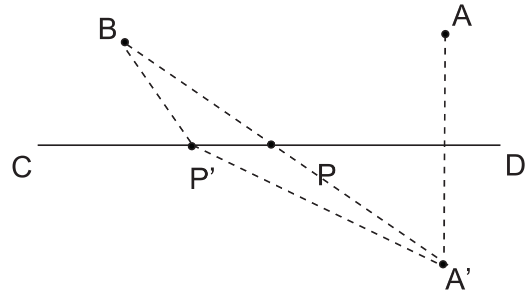
1. Dados los puntos A y B fuera de una recta y en la misma región, hallar el camino más corto para ir desde A hasta B tocando la redcta dada.

   Solución.



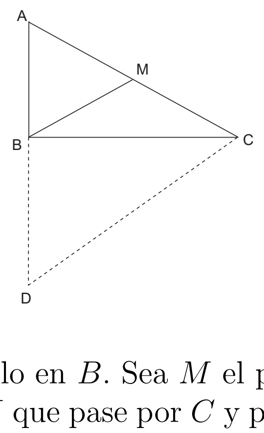
   Sea CD la recta dada y A y B los puntos dados. Sea P el punto que hay que tocar en la recta y A' simétrico de A respecto de CD.

   $PA = PA'$
   $BP + PA = BP + PA' = BA'$. Sea P' cualquier otro punto en CD. Sabemos que: $A'B < A'P' + BP'$ por lo tanto P es el punto pedido.

   Para encontrarlo basta con encontrar A', el simetrico de A respecto a CD, y trazal la recta BA'. EL puinto donde esta recta intersecta a CD es el punto P pedido.

2. Demostrar que el segmento que une el vértice del ángulo recto con el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide la mitad de la hipotenusa

   Solución.

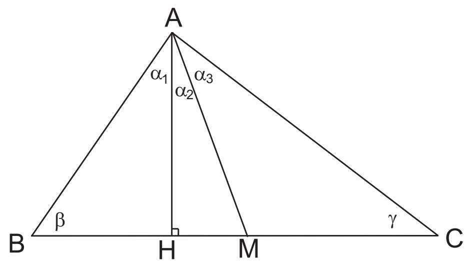


   Sea ABC triángulo rectángulo en B. Sea M el punto medio de la hipotenusa AC. Tracemos una paralela a BM que pase por C y prolongemos AB para que intersecte esta recta. Llamemos D a este punto de intersección.
   $AM = MC$ por lo tanto $AB = BM$ y $BM = \frac{1}{2}CD$ por el teorema de Tales.
   Por el criterio L.A.L. $\triangle ABC \cong BCD \Rightarrow AC = CD$
   y como $BM = \frac{1}{2}CD \Rightarrow BM = \frac{1}{2}AC$

3. Demostrar que el ángulo que forma la transversal de gravedad con la altura en un triángulo rectángulo ABC, trazadas ambas desde el vértice del ángulo recto, es $\beta - \gamma$

   Solución.

   Sea el triangulo ABC rectángulo en A. Sea M el punto medio de BC y H el punto donde cae la altura del vertice A.

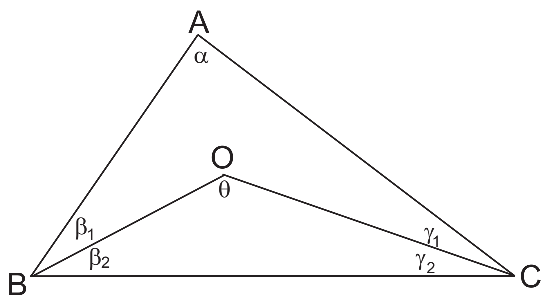
   

   Sea α_2 el ángulo que forman la transversal de gravedad AM con la altura AH. Por demostrar que $\alpha_2 = \beta - \gamma$

   $\angle CAH = \beta$ ya que $\beta - \gamma = 90° \Rightarrow \angle CAH = \alpha_2 + \alpha_3 = \beta$ El triángulo AMC es isósceles ya que la mediana AM es igual a la mitad de la hipotenusa. $AM = MC \Rightarrow$ $\alpha_3 = \gamma$
   Si $\alpha_2 + \alpha_3 = \beta$ y $\alpha_3 = \gamma \Rightarrow \alpha_2 = \beta - \gamma$

4. Demuetre que en el triángulo ABC el ángulo que forman las bisectrices de los ángulo β y γ es igual a un ángulo recto más $\dfrac{\alpha}{2}$

   Solución.

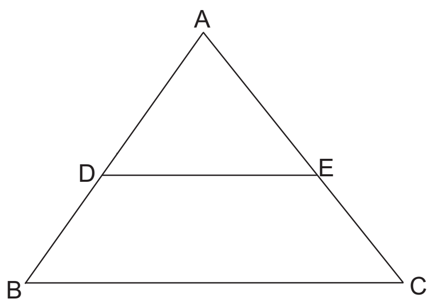
   

   $\beta_1 = \beta_2 = \dfrac{\beta}{2}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \dfrac{\gamma}{2}$
   En el $\triangle BOC$ $\theta + \beta_2 + \gamma_2 = 180°$
   $\theta = 180° - \beta_2 - \gamma_2$
   $\theta = 180° - \dfrac{(\beta + \gamma)}{2}$

En el $\triangle ABC$ $\alpha+\beta+\gamma=180°$
$\beta+\gamma=180°-\alpha$
$\dfrac{\beta+\gamma}{2}=90°-\dfrac{\alpha}{2}$ Reemplazando en $\theta=180°-\dfrac{(\beta+\gamma)}{2}$ tenemos que $\theta=90°-\dfrac{\alpha}{2}$

5. Dado un triángulo ABC en el cual $AB=AC$, si por un punto D tomado en AB se traza la recta DE paralela a BC demuetre que $BD=CE$

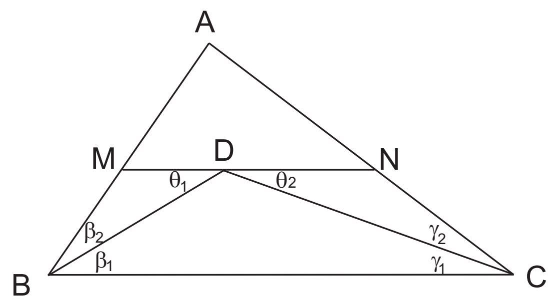
Solución.



$\angle DEA=\angle ABC$ y $\angle ADE=\angle ACB$ por ser DE paralela a BC
Como $\triangle ABC$ es isósceles $\angle ABC=\angle ACB \Rightarrow \angle DEA=\angle ADE$ por lo que el $\triangle ADE$ es isóceles y $AD=AE$, como además $AB=AC$ se conluye que $BD=CE$

6. Dado un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores de los ángulos β y γ y por el punto D donde se cortan, se traza la recta MN paralela a BC. Demuetre que $MN=MB+NC$.

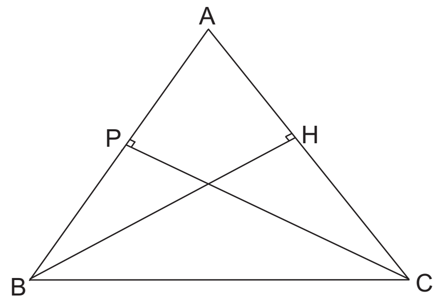
Solución.



Por hipótesis $\beta_1=\beta_2$. $\theta_1=\beta_1$ por alternos internos $\Rightarrow \theta_1=\beta_2$ por lo que el $\triangle BMD$ es isósceles $\Rightarrow BM=MD$. Analogamente vemos que $\triangle DNC$ también es isósceles y que $ND=NC$.
Como $MN=MD+DN=BM+NC$

7. En un triángulo ABC si las perpendiculares sobre BH sobre AC y CP sobre AB son iguales, demuestre que el triángulo es isósceles.

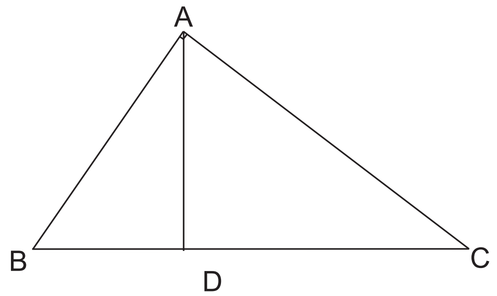
Solución.



Por hipótesis $PC = HB$. $\triangle PRC \cong HBC$ por el criterio A.L.L. ($\angle BPC = \angle BHC$, lado común BC, $PC = HB$ por hipótesis). Por lo que conluimos que $\angle PBC = \angle HCB \Rightarrow AB = AC$ y $\triangle ABC$ es isósceles.

8. Demuetre que en todo triángulo rectángulo la perpendicular bajada desde el ángulo recto a la hipotenusa es menor que ésta.

   Solución.



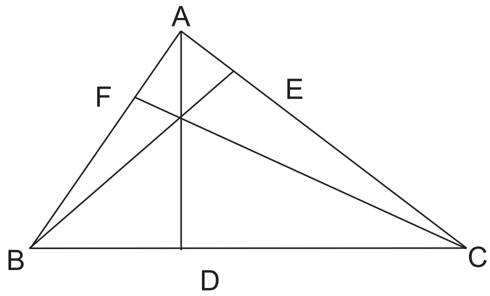
La perpendicular AD es menor que cualquier oblicua que parat de A y que llegue a BC Por lo tanto $AD < AB$ y $AB < BC$ por lo tanto $AD < BC$.

9. En todo triángulo una altura es menor que la semisuma de los lados adyacentes y la suma de las tres alturas es menor que el perímetro del triángulo.

   $AD < AB$ ya que AD es la perpendicular a DC y es mas pequeña que cualquier otra recta que parta de A y que llegue a DC. $AD < AC$ por lo tanto $AD < \dfrac{AB + AC}{2}$.
   Análogamente
   $BE < \dfrac{AB + BC}{2}$
   $CF < \dfrac{AC + BC}{2}$.
   Sumando las tres desigualdades:
   $AD + BE + CF < AB + BC + CA$ =perímetro.

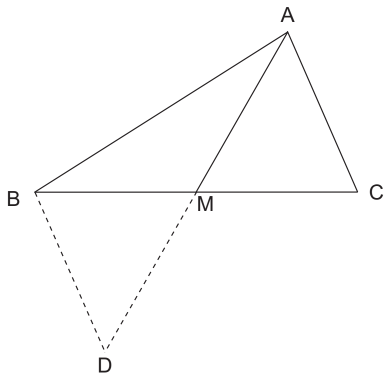
   Solución.

10. La transversal de gravedad de un triángulo es menor que la semisuma de los dos



lados adyacentes.

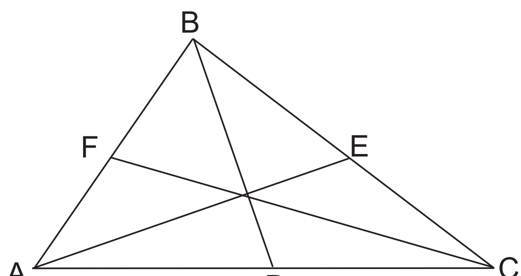
Solución.



Hecho en clase.

11. La suma de las tres transversales de gravedad de un triángulo está comprendida entre el perímetro e el semiperímetro del mismo.

Solución.



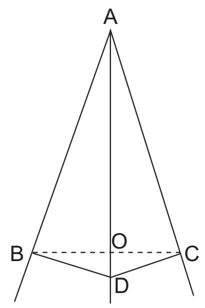
Del ejercico anterior sabemos que:
$AD < \dfrac{AB + AC}{2}$
$BE < \dfrac{AB + BC}{2}$
$CF < \dfrac{AC + CB}{2}$

Sumando estas tres desigualdades:
$AD + BE + CF < AB + BC + AC$ =perímetro.

$BO + OD > BD//\ CO + OE > CE//OA + OF > AF$
Sumando estas tres desigualdades:
$BE + AD + CF > AF + CE + BD = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{AC}{2} + \dfrac{BC}{2}$ =semiperímetro.

12. La recta que une los pies de las perpendiculares trazadas desde un punto de la bisectriz de un ángulo a los lados de éste es perpendicular a la bisectriz.

Solución.



Sea AD la bisectriz del $\angle BAC$ y DC y DB las perpendiculares desde D a los lados AB y AC respectivamente. $\triangle ABD \cong \triangle ADC$ por A.L.L $\Rightarrow AB = AC$
$\triangle ABO \cong \triangle AOC$ por L.A.L $\Rightarrow \angle AOB = AOC = 90^\circ$ ya que son ángulos suplementarios. De aqui concluimos que $AD \perp BC$.