GEOMETRIA ANALITICA

Capítulo 8

La Recta

8.1. Definición

Se llama recta al lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ de un plano, tales que para todo par de puntos P_1 y P_2 de ella, las pendientes de PP_1, PP_2 y P_1P_2 son iguales.

Ecuación

La igualdad de pendientes implica

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y-y_2}{x-x_2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m,\ x_1 \neq x_2 \tag{1}$$

8.2. Ecuación punto pendiente

De (1) se obtiene:

$$y - y_1 = m(x - x_1), \tag{2}$$

conocida como la ecuación de una recta que pasa por un punto dado $P_1(x_1, y_1)$ y pendiente m conocida.

8.3. Ecuación que pasa por dos puntos

En tanto (1) o bien de aquí se obtiene:

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1) \tag{3}$$

que representan a la ecuación de una recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dados.

Note que si $x_1 = x_2$ la recta es paralela o coincidente con el eje Y, en este caso con ninguna de las tres ecuaciones anteriores podemos representar a dicha recta, esto quedará para más adelante.

8.4. Diversas formas de la ecuación de una recta

Si en (3) $x_1 = y_1 = 0$ la ecuación se convierte en

$$y = mx \tag{4}$$

esta es la forma de las **rectas que pasan por el origen** exceptuando la ecuación del eje Y.

Ahora, también de (3), obtenemos

$$y = mx_1 + y_1 - mx_2$$

pero $y_1 - mx_2$ es un parámetro real que vamos a denotar por n, así

$$y = mx + n \tag{5}$$

se llama **ecuación principal** de una recta, con la cual podemos representar todos las rectas en el plano cartesiano a excepción de las paralelas con el eje Y y el eje Y mismo. Esta ecuación nos indica que el coeficiente de la variable x, es igual a la pendiente de la recta, en tanto note que "n" es el corte que tiene dicha recta con el eje Y.

Sean a y b los cortes de una recta con los ejes X e Y respectívamente con a y b no nulos
la recta pasa por $A(a, 0)$ y $B(0, b)$ entonces por (3)

$$y - 0 = -\frac{b}{a}(x - a) \Longleftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{6}$$

ecuación conocida como la ecuación **de segmentos** de una recta.

Forma General de una recta

Se llama forma general de la ecuación de una recta a:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (7)$$

en que A, B y C son parámetros reales A yB no nulos a la vez.

Se llama forma principal de una recta pues con ella podemos representar a todas las rectas en el plano cartesiano, así:

I) A, B y $C \neq 0$, de (7) se obtiene $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}\,; m = -\dfrac{A}{B}$ y $n = -\dfrac{C}{B}$
familia de rectas que cortan en dos puntos, a los ejes coordenados.

II) A y $B \neq 0 \wedge C = 0$ de (7) $\Longrightarrow y = -\dfrac{A}{B}x,\ ; m = -\dfrac{A}{B}$
familia de rectas que pasan por el origen.

III) B y $C \neq 0 \wedge A = 0$ de (7) $\Longrightarrow By + C = 0 \Longleftrightarrow y = -\dfrac{C}{B}$
$m = 0,\ n = -\dfrac{C}{B}$
familia de rectas paralelas al eje X.

IV) $B \neq 0 \wedge C = A = 0$, de (7) $\Longrightarrow By = 0 \Longleftrightarrow y = 0$
$m = 0$ y $n = 0$

$y = 0$ es la ecuación del eje X.

V) A y $C \neq 0 \wedge B = 0$ de (7) $\Longrightarrow Ax + C = 0 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{C}{A} = p$
m indefinida, $p = -\dfrac{C}{A}$
familia de rectas paralelas al eje Y.

VI) $A \neq 0 \wedge B = C = 0$ de (7) $\Longrightarrow Ax = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
m indefinida $p = 0$
$x = 0$ es la ecuación del eje Y.

8.5. Ecuación Normal

La forma normal de la ecuación de una recta es

$$x\,cos\alpha + y\,sen\,\alpha = d \tag{8}$$

donde $d > 0$, numéricamente igual a la longitud de la normal trazada desde el origen a la recta y α es el ángulo positivo ($0° < \alpha < 360°$) medido a partir de la parte positiva del eje X, a la normal. (ver figura)

Recordemos que si a y b son los cortes que tiene dicha recta con los ejes X e Y, su ecuación esta dada por

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a = \frac{d}{cos\,\alpha} \wedge b = \frac{d}{sen\,\alpha}$$

de aquí se obtiene: $x\,cos\,\alpha + y\,sen\,\alpha = d$.
Si la recta esta dada en su forma general por

$$Ax + By + C = 0$$

y su forma normal

$$x\,cos\,\alpha + y\,sen\,\alpha - d = 0$$

como ambas representan la misma recta se debe tener:

$$cos\,\alpha = kA;\ sen\,\alpha = kB \quad \text{y} \quad -d = kC$$

de aquí

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\ \text{así}\ \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \tag{8}$$

$d > 0 \Longrightarrow k \wedge C$ deben ser de signos diferentes, por tanto C y $\pm\sqrt{A^2+b^2}$ deben ser de signos diferentes.

Si $C = 0$ y $B \neq 0 \Longrightarrow B$ y $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ deben tener el mismo signo

Si $C = 0$ y $B = 0 \Longrightarrow A$ y $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ tienen el mismo signo.

8.6. Angulo entre dos rectas. Paralelismo y Perpendicularidad

Análogamente, el párrafo 7.6, se tiene que si las rectas estan dadas por $y = m_1 + n_1$ e $y = m_2 + n_2$

$$m_1 = tg\,\alpha_1 \quad \text{y} \quad m_2 = tg\,\alpha_2, \qquad \alpha + \beta = 180^\circ$$

se obtiene

$$tg\,\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_2\; tg\,\alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \tag{9}$$

Notemos que $\alpha \veebar \beta$ son agudos (no ambos), si son iguales entonces las rectas son perpendiculares entre si.

Recordemos que la condición de paralelismo exije

$$m_1 = m_2$$

y la de perpendicularidad,

$$m_1 m_2 = -1.$$

Si las rectas estan dadas en su forma general

$$l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \;\wedge\; l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

La fórmula (8) se transforma en

$$tg\,\alpha = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \tag{10}$$

$$\text{paralelismo} \iff A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \iff \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Perpendicularidad} \iff A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

$$\text{Coincidencia} \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \iff \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \;\wedge\; \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Intersección} \iff A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0 \iff \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

8.7. Distancia de un punto a una recta

Dado $P_1(x_1, y_1)$ y una recta en su forma general $Ax + By + C = 0$, la distancia desde P_1 a la recta esta dada por

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (11)$$

Demostración.

Primero calculamos la distancia OQ, desde el origen a la recta para lo cual

$$cos\, \alpha = \frac{OQ}{-\frac{C}{A}}$$

$$sen\, \alpha = \frac{OQ}{-\frac{C}{B}}$$

eliminando α, se obtiene

$$OQ = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (*)$$

Trasladando los ejes en forma paralela al nuevo origen $P_1(x_1, y_1)$, se tienen las ecuaciones de traslación

$$x = x' + x_1$$

$$y = y' + y_1$$

así la ecuación de la recta dada referida a este nuevo sistema toma la forma

$$Ax' + By' + C' = 0, \quad C' = Ax_1 + By_1 + C$$

luego por (*) la distancia desde el nuevo origen $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $Ax' + By' + C' = 0$ esta dada por

$$d = \frac{|C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

8.8. Distancia Dirigida

La distancia dirigida d de la recta dada por

$$Ax + By + C = 0$$

al punto $P_1(x_1, y_1)$, esta dada por la fórmula

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{12}$$

en donde el signo del radical se elige de acuerdo a lo expuesto en 8.5, además se debe considerar lo que sigue:

Si la recta dada no pasa por el origen, d es positiva o negativa según al punto $P_1(x_1, y_1)$ y el origen esten en lados opuestos o del mismo lado de la recta.

Si la recta pasa por el origen, d es positiva o negativa según que el punto P_1, esté arriba o abajo de la recta.

8.9. Familias

Ya sabemos que para determinar una recta se necesitan dos condiciones geométricas independientes.

Todas las rectas que satisfacen una y sólo una condición geométrica forman una familia o haz de recta, por ejemplo

1. La familia de rectas que tienen pendiente variable y que pasan por un punto fijo

$$y - y_1 = m(x - x_1),\ m \text{ parámetro}$$

$$P_1(x_1, y_1) \text{ punto fijo.}$$

2. Todas las rectas que tienen pendiente $a,\ a > 0$ (fijo) y el corte con el eje Y sea n,

$$y = ax + n,\ n \text{ parámetro}$$

y así podemos seguir dando diversos ejemplos de familias de rectas que tienen una propiedad en común, es de particular importancia el siguiente caso.

Familia de rectas por la intersección de dos rectas dadas

Sean las rectas

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

tales que $A_1B_2 \neq A_2B_1$ (condición de intersección).
La familia de rectas que pasan por el punto de intersección de l_1 y l_2, esta dada por la ecuación

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

con la sólo excepción de la recta $l_2\,(\lambda_2 = 0)$.

Familia de perpendiculares a una recta dada

Dada la recta $Ax + By + C = 0$ la familia de rectas perpendiculares a esta recta, estan dadas por

$$Bx - Ay + \lambda = 0, \quad \lambda \text{ es un parámetro real.}$$

Para el caso particular que una recta de esta familia pase por el punto $P_1(x_1, y_1)$ se tiene

$$Bx_1 - Ay_1 + \lambda = 0 \Longrightarrow Bx - Ay = Bx_1 - Ay_1$$

es una recta pependicular a la recta dada y que pasa por $P_1(x_1, y_1)$.

Familia de paralelas a una recta dada

Dada la recta $Ax + By + C = 0$ la familia de rectas paralelas a esta recta, estan dadas por

$$\lambda\, Ax + \lambda\, By + D = 0,\ \lambda \ \text{ es un parámetro real.}$$

análogamente un elemento de esta familia que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ esta dada por

$$Ax + By = Ax_1 + By_1, \qquad \lambda \neq 0$$

8.10. Tópicos Varios

Area

Area de un triángulo que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$

Area $= \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$ la demostración se deja propuesta.

Si los tres puntos estan sobre la misma recta

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Si en lugar de x_3 e y_3 se dejan x e y en la fórmula anterior, es decir

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

representa a una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

Recordemos que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Intersección de dos rectas dadas

Dadas

$$\left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Eliminando y, se obtiene:

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

Casos

1. Si $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, las rectas no son paralelas la solución da un único punto de intersección.

2. Si $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \veebar \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} \neq 0$ las rectas son paralelas y no existe un punto de intersección, el sistema es incompatible.

3. Si $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_1}$ las rectas son coincidentes por tanto existen infinitas soluciones para el sistema.

Ejemplo.

Resolver:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 10 \\ x + 7y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución.

Caso 1

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{67}{17} \quad \text{e} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 10 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{17} = \frac{-73}{17}$$

8.11. Ejercicios Resueltos

1. Dada la recta
$$(a-2)x+(1-3a)y+a+1=0.$$
Determine a de modo que la recta:

   a) Pase por el punto $(-2,1)$

   b) Tenga pendiente $-\dfrac{2}{3}$

   c) Sea perpendicular a la recta $ax-2y+10=0$

   d) Forme un triángulo de área $\dfrac{3}{2}$ con los ejes coordenados.

   Solución.

   a) El punto $(-2,1)$ debe satisfacer la ecuación de la recta dada, es decir
   $$(a-2)(-2)+(1-3a)1+a+1=0$$
   de donde $a=\dfrac{3}{2}$

   b) De inmediato $m=\dfrac{a-2}{3a-1}=-\dfrac{2}{3}\Longrightarrow a=\dfrac{8}{9}$

   c) Se debe tener que: $\left(\dfrac{a-2}{3a-1}\right)\dfrac{a}{2}=-1\Longrightarrow a=-2\pm\sqrt{6}$

   d) Coordenadas de A, $y=0$
   $$(a-2)x+a+1=0\Longrightarrow$$
   $$x=\frac{a+1}{2-a},\ a\neq 2$$
   $$\text{así } A\left(\frac{a+1}{2-a},0\right)$$
   Coordenadas de $B, x=0\Longrightarrow(1-3a)y+a+1=0$

$$\Longrightarrow y = \frac{a+1}{3a-1} \text{ luego } B\left(0, \frac{a+1}{3a-1}\right) \text{ por tanto se debe}$$

$$\text{tener que } \frac{1}{2}\left|\frac{a+1}{2-a}\right| \left|\frac{a+1}{3a-1}\right| = \frac{3}{2}$$

Considerando $(2-a)(3a-1) > 0(*)$ conduce a $10a^2 - 19a + 7 = 0$ de donde $a = \frac{19}{10}$ o $a = \frac{1}{2}$ (ambos valores son válidos).

Si $(2-a)(3a-1) < 0 \Longrightarrow 8a^2 - 23a + 5 = 0$ de donde $a = 2.638$ o $a = 0.237$ (también válidos)

2. Una recta pasa por el punto de intersección de las rectas $2x - 3y - 5 = 0$; $x + 2y - 13 = 0$ y el segmento que determina sobre el eje x, es igual al doble de su pendiente. Hallar la ecuación de dicha recta.

   Solución.

   La ecuación de la familia de rectas por la intersección de las rectas dadas esta dada por:
   $$2x - 3y - 5 + \lambda(x + 2y - 13) = 0 \qquad (1)$$

   Intersecando con el eje X, es decir haciendo $y = 0$ se obtiene $x = \frac{13\lambda + 5}{\lambda + 2}$ por otra parte la pendiente de (1) está dada por $m = \frac{\lambda + 2}{3 - 2\lambda}$, y se pide que

   $$\frac{13\lambda + 5}{\lambda + 2} = 2\frac{\lambda + 2}{3 - 2\lambda} \Longrightarrow \lambda = 1 \text{ o } \lambda = -\frac{1}{4}$$

   $$\text{Para } \lambda = 1 \Longrightarrow y = 3x - 18$$

   $$\text{Para } \lambda = -\frac{1}{4} \Longrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

3. Determine los valores de a y b para que las ecuaciones $ax - 7y + 18 = 0$ y $8x - by + 9a = 0$

   a) Concurran en un punto

   b) Sean paralelas

c) Sean perpendiculares

d) Sean coincidentes.

Solución.

a) Por 8.6 se tiene de inmediato

$$\begin{vmatrix} a & -7 \\ 8 & -b \end{vmatrix} = 56 - ab \neq 0 \Longleftrightarrow ab \neq 56$$

que es la condición de concurrencia.

b) Sean paralelas $\Longleftrightarrow ab = 56$.

c) Sean perpendiculares $\Longleftrightarrow 8a + 7b = 0$.

d) $ab = 56 \wedge \begin{vmatrix} -7 & 18 \\ -b & 9a \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -63a + 18b = 0$ de aquí resultan $a = 4 \wedge b = 14$ o $a = -4 \wedge b = -14$

4. Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y que forme un ángulo de 45° con la recta $2x + y - 3 = 0$.

Solución.

Según la figura se vislumbran dos soluciones posibles.

La recta buscada es de la forma

$$y - 2 = m(x - 1) \tag{1}$$

y la pendiente de la recta dada es $m' = -2$, por tanto se deben cumplir $tg\, 45^\circ = 1 = \dfrac{m - (-2)}{1 - 2m}$ o bien $1 = \dfrac{-2 - m}{1 - 2m}$ de donde se obtiene $m = -\dfrac{1}{3}$ o $m = 3$ así las ecuaciones de las rectas pedidas son

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1) \text{ o } y - 2 = 3(x - 2)$$

5. Demuestre que las rectas cuyas pendientes son a y $\dfrac{1 + a}{1 - a}$ se cortan en 45° $(a \neq 0 \wedge a \neq 1)$.

Demostración.

Sean α_1 y α_2 las inclinaciones de las rectas mencionadas, así

$m_1 = tg\,\alpha_1 = a$

$m_2 = tg\,\alpha_2 = \dfrac{1+a}{1-a}$ de aquí

$$tg\,\alpha_2 = \frac{1+tg\,\alpha_1}{1-tg\,\alpha_1} = \frac{tg\,45^\circ + tg\,\alpha_1}{1-tg\,45^\circ\;tg\,\alpha_1} = tg(45^\circ+\alpha_1)$$

así $\alpha_2 = \alpha_1 + 45^\circ$ lo que demuestra que l_1 y l_2 se cortan en 45°.

6. Se trazan perpendiculares desde el origen a las rectas cuyas ecuaciones son $x+2y=10$ y $2x+y=10$. Determine la ecuación de la recta que une los pies de estos perpendiculares y su longitud.

Solución.

Sean

$l_1 : x+2y=10;\; m_1 = -\dfrac{1}{2}$

$l_2 : 2x+y=10;\; m_2 = -2$

Ecuaciones de OA y OB

$$y = 2x \text{ e } y = \frac{1}{2}x \text{ respectívamente.}$$

Coordenadas de A

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=10 \\ y=2x \end{array}\right\} \Longrightarrow A(2,4)$$

Coordenadas de B

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=10 \\ y=\dfrac{1}{2}x \end{array}\right\} \Longrightarrow B(4,2)$$

Así la ecuación pedida es: $y-4=-(x-4)$ y la longitud entre A y B resulta $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

7. Sobre los catetos $AC=a$ y $CB=b$ de un triángulo rectángulo ABC se construyen cuadrados $ACFG$ y $BCED$. Demostrar analíticamente que las rectas AD y BG se cortan sobre la altura h_c.

Solución.

Eligiendo el $\triangle ABC$ como se indica en la figura

Ecuación de AD
$$y=-\frac{b}{a+b}(x-a) \tag{1}$$

Ecuación de BG
$$y-b=\frac{a+b}{-a}x \tag{2}$$

Ecuación de h_c, $m_{AB}=-\dfrac{b}{a}$
$$y=\frac{a}{b}x \tag{3}$$

Resolviendo (1) y (2) se obtiene $\left(\dfrac{ab^2}{a^2+ab+b^2}, \dfrac{a^2b}{a^2+ab+b^2}\right)$ punto que satisface la ecuación (3), así queda demostrado lo pedido.

8. Determine el punto de intersección de las simetrales del triángulo de vértices $A(-2a,b)$, $B(0,b)$ y $C(2a,-b)$.

Solución.

Sean M punto medio de AC luego $M(0,0)$.

N punto medio de AB, $N(-a,b)$

$$m_{AB}=0, \quad m_{AC}=-\frac{b}{2a}$$

Ecuación de S_1, es
$$y=\frac{2a}{b}x \tag{1}$$

Ecuación de S_2, es

$$x = -a \qquad (2)$$

resolviendo el sistema formado por (1) y (2) obtenemos $A\left(-a, -\dfrac{2a^2}{b}\right)$ que es el circuncentro o punto de intersección de las simetrales del triángulo.

9. Determine las ecuaciones de las bisectrices del ángulo formado por las rectas $2x + 3y - 12 = 0 \wedge x - 2y + 6 = 0$.

   Solución.

   Ecuaciones de las bisectrices dadas por

   $$\frac{|2x + 3y - 12|}{\sqrt{13}} = \frac{|x - 2y + 6}{\sqrt{5}}$$

   de donde resultan dos casos posibles

   I) $\dfrac{2x + 3y - 12}{\sqrt{13}} = \dfrac{x - 2y + 6}{\sqrt{5}} \Longrightarrow$

   $(2\sqrt{5} - \sqrt{13})x + (3\sqrt{5} + 2\sqrt{13})y - 6(2\sqrt{5} + \sqrt{13}) = 0$

   II) $\dfrac{2x + 3y - 12}{\sqrt{13}} = -\dfrac{x - 2y + 6}{\sqrt{5}} \Longrightarrow$

   $(2\sqrt{5} + \sqrt{13})x + (3\sqrt{5} - 2\sqrt{13})y - 6(2\sqrt{5} - \sqrt{13}) = 0$

10. Demostrar analíticamente que en el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(-1, 5)$ y $C(5, 1)$ la bisectriz del ángulo interior del vértice C y los bisectrices de los ángulos exteriores de los otros dos vértices son concurrentes.

    Solución.

    Primero determinamos las ecuaciones de los lados del triángulo:

    $$l_{AC} : x - 5y = 0$$

    $$l_{BC} : 2x + 3y - 13 = 0$$

    $$l_{AB} : 5x + y = 0$$

Bisectrices del vértice C dadas por $\dfrac{|x-5y|}{\sqrt{26}} = \dfrac{|2x+3y-13|}{\sqrt{13}}$ (*)

La ecuación de la bisectriz interior b_1, tiene la pendiente negativa, asi de (*) se obtiene que su ecuación es

$$x - 5y = \sqrt{2}(2x + 3y - 13) \qquad (1)$$

Bisectriz del vértice B, $\dfrac{|2x+3y-13|}{\sqrt{13}} = \dfrac{|5x+y|}{\sqrt{26}}$

de aquí la ecuación de b_2 es:

$$\sqrt{2}(2x + 3y - 13) = 5x + y \qquad (2)$$

Bisectriz del vértice A, $\dfrac{|x-5y|}{\sqrt{26}} = \dfrac{|5x+y|}{\sqrt{26}}$

de aquí se obtiene la ecuación de b_3 (tiene pendiente negativa)

$$2x + 3y = 0 \qquad (3)$$

ahora resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (3), se obtienen $x = -3\sqrt{2}$ e $y = 2\sqrt{2}$ y nótemos que estos valores satisfacen la ecuación (2) por tanto el punto $R(-3\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ es el punto donde concurren las bisectrices mencionadas.

11. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - y + 5 = 0$ y $x + y + 1 = 0$ y liste del origen 3 unidades.

Solución.

Gráficamente se notan dos soluciones posibles, así la familia de rectas por el punto de intersección de las rectas dadas l_1 y l_2, esta dada por:

$$x - y + 5 + \lambda(x + y + 1) = 0$$

se debe cumplir que

$$3 = \frac{|(1+\lambda)0 + (\lambda - 1)0 + \lambda + 5|}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + (\lambda-1)^2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$17\lambda^2 - 10\lambda - 7 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \text{ o } \lambda = -\frac{7}{17}$$

así las ecuaciones de las 2 rectas que verifican esta condición son

$$x = -3 \quad \text{y} \quad 5x - 12y + 39 = 0$$

12. Sean l_1 y l_2 dos rectas perpendiculares entre si por el origen, demuestre que la recta que pasa por los puntos de intersección de l_1 y l_2 con la curva $y = x^2$ también pasa por el punto $(0, 1)$.

Solución.

Sea $y = mx,\ m \neq 0$ la ecuación de l_1 entonces $y = -\dfrac{1}{m}x$ es la ecuación de l_2

Coordenadas de P_1,

$$\left.\begin{array}{l} y = mx \\ \\ y = x^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow P_1(m, m^2)$$

Coordenadas de P_2

$$\left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{m}x \\ \\ y = x^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow P_2\left(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}\right)$$

Ecuación de la recta P_1P_2, $y - m^2 = \dfrac{m^2 - 1}{m}(x - m)$.

Note que el punto $(0, 1)$ satisface a esta ecuación.

13. Demostrar que la recta $y - x + 2 = 0$ corta el segmento que une los puntos $(3, -1)$ y $(8, 9)$ en la razón $2 : 3$.

Demostración.

Ecuación del segmento que une $(3, -1)$ y $(8, 9)$ es, $y + 1 = 2(x - 3)$ intersecando con la recta $y - x + 2 = 0$ se obtiene $P(5, 3)$

Note que, para el caso de las abscisas

$$\frac{AP}{PB} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = \frac{5 - 3}{8 - 5} = \frac{2}{3}$$

análogamente para las coordenadas

$$\frac{AP}{PB} = \frac{y_P - y_A}{y_B - y_P} = \frac{3+1}{9-3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

14. En un triángulo cualquiera demostrar que el baricentro, el cincuncentro y el ortocentro son puntos que estan sobre una misma recta.

Solución.

Sea el triángulo de vértices $A(-a, 0)$, $B(b, 0)$ y $C(0, c)$ $a, b, c > 0$, así se tienen $A'\left(\frac{b-a}{2}, 0\right)$, $B'\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ P, Q y R coordenadas del ortocentro, baricentro y circuncentro respectívamente.
Coordenadas de P. (punto de intersección de las alturas)

$$\left.\begin{array}{l} h_C : x = 0 \\ \\ h_B : y = -\dfrac{a}{c}(x - b) \end{array}\right\} \Longrightarrow P\left(0, \frac{ab}{c}\right)$$

Coordenadas de Q. (punto de intersección de las transversales de gravedad)

$$\left.\begin{array}{l} t_A : y = \dfrac{c}{b+2a}(x + a) \\ \\ t_C : y - c = \dfrac{2c}{a-b}x \end{array}\right\} \Longrightarrow Q\left(\frac{b-a}{3}, \frac{c}{3}\right)$$

Coordenadas de R. (punto de intersección de las simetrales)

$$\left.\begin{array}{l} S_{A'} : x = \dfrac{b-a}{2} \\ \\ S_{B'} : y - \dfrac{c}{2} = \dfrac{b}{c}\left(x - \dfrac{b}{2}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow R\left(\frac{b-a}{2}, \frac{c^2 - ab}{2c}\right)$$

Si los otros puntos P, Q y R son colineales, por 8.9- el siguiente determinante, debe ser nulo

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{ab}{c} & 1 \\ \frac{b-a}{3} & \frac{c}{3} & 1 \\ \frac{b-a}{2} & \frac{c^2-ab}{2c} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{ab}{c} & 1 \\ \frac{b-a}{3} & \frac{c^2-3ab}{3c} & 0 \\ \frac{b-a}{2} & \frac{c^2-3ab}{2c} & 0 \end{vmatrix} = \frac{(b-a)}{6}\,(c^2-3ab)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

15. Dado un triángulo isósceles de lados $AB = AC$ sobre AB se toma un punto D y sobre BC un punto E, tal que la proyección de DE sobre el lado BC sea igual a $\frac{BC}{2}$. Demuestre que la perpendicular a DE en E pasa por un punto fijo.

Solución.

Tomemos el triángulo isósceles como se indica en la figura, así $A(0, c)$, $B(-b, 0)$ y $C(b, 0)$, $b > 0$ y $c > 0$. Sea el punto E sobre BC de coordenadas $(\lambda, 0)$, así las coordenadas de F son $y = 0 \wedge x = -(FE - DE)$ pero FE es la proyección de DE sobre BC y es igual a $\frac{BC}{2} = \frac{b-(-b)}{2} = b$, luego $x = -(b - \lambda) = \lambda - b$ así $F(\lambda - b, 0)$

Coordenadas de D, intersección de las rectas:

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda - b \\ \frac{x}{-b} + \frac{y}{c} &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow D\left(\lambda - b,\ \frac{c\lambda}{b}\right)$$

$m_{DE} = -\frac{c\lambda}{b^2}$ de aquí que la ecuación de l, es

$$y = \frac{b^2}{c\lambda}(x - \lambda) \Longrightarrow y = \frac{b^2 x}{c\lambda} - \frac{b^2}{c} \Longleftrightarrow y + \frac{b^2}{c} = \frac{b^2}{c\lambda}(x - 0)$$

ecuación que nos indica que la recta pasa por el punto fijo $\left(0, -\frac{b^2}{c}\right)$

16. Sea el rectángulo $ABCD$ y su diagonal BD, por el vértice C se traza una perpendicular CM a BD. Demuestre que la recta CM pasa por un punto

fijo si el perímetro de dicho rectángulo es constante igual a $2K$, $K > 0$ en que DA y AB son rectas fijas.

Demostración.

Por hipótesis

$$2b + 2d = 2k \Longleftrightarrow b + d = k \qquad (1)$$

$$m_{BC} = -\frac{d}{b} \Longrightarrow m_{CM} = \frac{b}{d}; b, d > 0$$

Ecuación de CM.

$$y - d = \frac{b}{d}(x - b) \Longleftrightarrow dy - bx = d^2 - b^2 = (d - b)(d + b) \text{ pero por } \qquad (1)$$

$$dy - bx = (d - b)k \Longleftrightarrow d(y - k) = b(y - k) \Longleftrightarrow y - k = \frac{b}{d}(y - k)$$

ecuación que nos indica que la recta pasa por el punto fijo (k, k).

17. Sean los puntos $A(a, 0)$ y $B(0, b)$ tales que $AB = c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Determine la ecuación de la recta que pasa por los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo dado $(a, b > 0$.

Solución.

Es claro que el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo es el circuncentro $M\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

El incentro punto de intersección de las bisectrices, se obtiene resolviendo el sistema:

$$y = x \wedge |y| = \frac{|bx + ay - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

note que en ésta última ecuación debemos tomar $y = -\dfrac{bx + ay - ab}{c}$ pues es la bisectriz del vértice A, que tiene pendiente negativa.

$\left(m = -\dfrac{b}{c-a},\text{ note que } c > a\right)$, así resolviendo el sistema indicado resulta $x = y = \dfrac{ab}{a+b+c}$ por tanto la ecuación pedida es:

$$y - \frac{b}{2} = \frac{b(a-b-c)}{a(b-a-c)}(x - \frac{a}{2})$$

18. Dado un punto en el interior de un triángulo equilátero, demostrar que la suma de las distancias de dicho punto a los lados del triángulo es igual a su altura.

Solución.

Sea el triángulo equilátero que se indica, así $A(-a,0), B(a,0)$ y $C(0,\sqrt{3}a),\ a > 0$ y sea $P(x,y)$ un punto interior del triángulo

$$-a < x < a \,\wedge\, 0 < y < \sqrt{3}a$$

Ocupando el concepto de distancia dirigida (8.7-) se tienen:

$$d_1 = y > 0;\ d_2 = \frac{\sqrt{3}x + y - \sqrt{3}a}{2},\ d_2 < 0;\ d_3 = \frac{\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}a}{-2},\ d_3 < 0$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = y - \frac{\sqrt{3}x + y - \sqrt{3}a}{2} - \frac{\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}a}{-2} = \sqrt{3}a = h_c$$

19. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,1)$ y tal que la distancia de ésta recta al punto $(-1,1)$ sea igual a $2\sqrt{2}$.

Solución.

La ecuación de la recta pedida es de la forma $y - 1 = m(x-3)$ así se debe verificar

$$2\sqrt{2} = \frac{|m(-1) - 1 - 3m + 1|}{\sqrt{m^2+1}} \Longleftrightarrow 8(m^2+1) = 16m^2 \Longleftrightarrow m = \pm 1$$

luego hay dos rectas que cumplen estas condiciones, que son $y - 1 = \pm 1(x-3)$.

20. El ángulo de inclinación de cada una de dos rectas paralelas es α. Si una de ellas pasa por el punto (a, b) y la otra por el punto (c, d). Demostrar que la distancia que hay entre ellas es:

$$|(c-a)sen\,\alpha - (d-b)cos\,\alpha|$$

Solución.

Las ecuaciones de l y l' son

$$y - b = tg\,\alpha(x-a)$$

$$y - d = tg\,\alpha(x-c)$$

respectívamente.

Es suficiente tomar la distancia entre el punto (c, d) a la recta l'

$$d = \frac{|tg\,\alpha \cdot c - d + b - a\,tg\,\alpha|}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}} = \left|\frac{(c-a)tg\,\alpha + (b-d)}{sec\,\alpha}\right|$$

$$d = |(c-a)sen\,\alpha + (b-d)cos\,\alpha|$$

21. Determine el valor del parámetro λ de modo que las rectas

$$l_1 : \lambda\,x + (\lambda-1)y - 2(\lambda+2) = 0$$

$$l_2 : 3\lambda\,x - (3\lambda+1)y - (5\lambda+4) = 0$$

formen un ángulo de 45° entre ellas. Hallar también el lugar geométrico de los puntos de intersección de las dos familias.

Solución.

De inmediato

$$tg\,45° = \frac{\frac{3\lambda}{3\lambda+1} + \frac{\lambda}{\lambda-1}}{1 + \frac{3\lambda}{3\lambda+1}\left(-\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)} \qquad (1)$$

o bien

$$tg\,45° = \frac{-\frac{\lambda}{\lambda-1} - \frac{3\lambda}{3\lambda+1}}{1 + \left(-\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)\left(\frac{3\lambda}{3\lambda+1}\right)} \qquad (2)$$

la ecuación (1) no da solución real, y de (2) se obtiene $\lambda \simeq 0.623$ o bien $\lambda \simeq -178$.

Lugar geométrico pedido, $l_1 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{y+4}{x+y-2}$ y de l_2, $\lambda = \dfrac{4+y}{3x-3y-5}$ de donde igualando se obtiene: $2x - 4y - 3 = 0$.

22. Ocupando el concepto de familia, hallar la ecuación de la transversal de gravedad (mediana) relativa al vértice A del triángulo definido por las rectas

$$l_{AB} : 2x - y + 1 = 0$$

$$l_{BC} : x + y - 1 = 0$$

$$l_{CA} : x - 3y - 1 = 0$$

Solución.

Familia de rectas por el vértice A

$$2x - y + 1 + \lambda(x - 3y - 1) = 0 \qquad (1)$$

el punto medio de BC debe satisfacer a (1), así:

Coordenadas de B

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ \\ x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow B(0,1)$$

Coordenadas de C

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ \\ x - 3y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow C(1,0) \text{ así } M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

en (1) resulta $\lambda = \dfrac{3}{4}$, por tanto la ecuación de la mediana del vértice A, es: $11x - 13y + 1 = 0$

23. Las rectas; $l_1 : x + y = 0$, $l_2 : x - 5y + 12 = 0$ y $l_3 : 5x - y - 12 = 0$ determinan un triángulo. Determine

    a) El área y su perímetro.

    b) Las coordenadas del centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Solución.

a) Coordenadas de los vértices del triángulo

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ \\ x - 5y + 12 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow A(-2, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ \\ 5x - y - 12 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow C(2, -2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 5y + 12 = 0 \\ \\ 5x - y - 12 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow B(3, 3)$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\left(\left|\begin{array}{rrr} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{array}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\left|\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{array}\right|\right) = \frac{1}{2}\cdot 2(6+6) = 12$$

Perímetro $= AB + AC + CA = 4\sqrt{2} + \sqrt{26} + \sqrt{26} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{26}$

b) El centro de la circunferencia circunscrita al triángulo equidista de los tres vértices, así:

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = (x - 3)^2 + (y - 3)^2$$

de donde $Q\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$

24. Demostrar que el triángulo formado por el eje Y y las rectas $y = m_1x + n_1$; $y = m_2x + n_2$, $m_1 \neq m_2$ esta dado por

$$\frac{1}{2}\frac{(n_2 - n_1)^2}{|m_2 - m_1|}$$

Demostración.

Las coordenadas de A y B son inmediatas, $A(0, n_2)$ y $B(n_1, 0)$, para C

$$\left.\begin{array}{l} y = m_1x + n_1 \\ \\ y = m_2x + n_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow C\left(-\frac{n_2 - n_1}{m_2 - m_1}, \frac{n_1m_2 - m_1n_2}{m_2 - m_1}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Area} \quad &= \frac{1}{2}AB \cdot h_c = \frac{1}{2}|n_2 - n_1|\left|-\frac{n_2 - n_1}{m_2 - m_1}\right| \\ &= \frac{1}{2}\frac{(n_2 - n_1)^2}{|m_2 - m_1|} \end{aligned}$$

25. Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $3x - 4y = 0$; $2x - 5y + 7 = 0$ y que forma con los ejes coordenados un triángulo de área 8.

Solución.

Familia de rectas por la intersección de las rectas dadas, es

$$3x - 4y + \lambda(2x - 5y + 7) = 0$$

Coordenadas de A,

$$y = 0 \wedge 3x + \lambda(2x + 7) = 0 \Longrightarrow x = -\frac{7\lambda}{3 + 2\lambda}$$

Coordenadas de B

$$x = 0 \wedge -4y + \lambda(-5y + 7) = 0 \Longrightarrow y = \frac{7\lambda}{5\lambda + 4}$$

luego se debe tener

$$\frac{1}{2}\left|-\frac{7\lambda}{3+2\lambda}\right|\left|\frac{7\lambda}{5\lambda+4}\right| = 8 \Longleftrightarrow 49\lambda^2 = 16|(3+2\lambda)(5\lambda+4)|$$

si $(3+2\lambda)(5\lambda+4) > 0(*) \Longrightarrow 111\lambda^2 + 368\lambda + 192 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -\dfrac{24}{37}$ o $\lambda_2 = -\dfrac{8}{3}$ ambos valores satisfacen (*), por tanto

si $\lambda = -\dfrac{24}{37} \Longrightarrow\ 9x - 4y - 24 = 0$

si $\lambda = -\dfrac{8}{3} \Longrightarrow\ x - 4y + 8 = 0$

si $(3+2\lambda)(5\lambda+4) < 0$ no existen valores reales para λ.

26. La base de un triángulo tiene longitud constante, b, $b > 0$. Si la diferencia de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados es igual a a^2. Demuestre que el L.G. del vértice opuesto a la base es una recta.

    Demostración.

    Sea el triángulo que se muestra en la figura, así $A(0,0)$, $B(b,0)$ y $C(x,y)$
    Se dice que $AC^2 - BC^2 = a^2$

    $x^2+y^2-((x-b)^2+y^2) = a^2 \Longrightarrow x = \dfrac{a^2-b^2}{2b}$ se trata de una recta paralela al eje Y.

27. Sea P un punto variable sobre el eje Y, y dos puntos fijos $A(a,0)$ y$B(b,0)$ sobre el eje X con $b > a$, a y b no nulos. Hallar el L.G. de los puntos de intersección de las perpendiculares a las rectas PA y PB trazadas por A y B cuando P se mueve sobre el eje Y.

    Solución.

Sea el parámetro λ, $\lambda \neq 0$ $P(0,\lambda)$ móvil sobre el eje Y.

$$m_{PA} = -\frac{\lambda}{a} \Longrightarrow m_{AQ} = \frac{a}{\lambda}$$

$$m_{PB} = -\frac{\lambda}{b} \Longrightarrow m_{PB} = \frac{b}{\lambda}$$

así ecuación de AQ es

$$y = \frac{a}{\lambda}(x-a) \tag{1}$$

ecuación de BQ

$$y = \frac{b}{\lambda}(x-b) \tag{2}$$

para obtener la ecuació del L.G. de Q debemos eliminar el parámetro común, entre (1) y (2) así resulta $1 = \dfrac{b(x-b)}{a(x-a)}$ de donde $x = a+b$ considerando $b > a$.

28. Dada una recta, $l : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1, \quad a \wedge b \neq 0$ que corta al eje X en el punto P y al eje Y en el punto Q, sea l' una recta perpendicular a l que corta al eje X en P' y al eje Y en Q'. Determine el L.G. del punto de intersección de las rectas PQ' y $P'Q$.

Solución.

De la figura, se tiene $P(a,0)$ y $Q(0,b)$.

$$m_l = -\frac{b}{a} \Longleftrightarrow m_{l'} = \frac{a}{b}$$

Ecuación de $l' : y = \dfrac{a}{b}x + n$ con "n" parámetro.

Coordenadas de Q'

$$x = 0 \Longleftrightarrow y = n \Longrightarrow Q'(0,n)$$

Coordenadas de P'

$$y = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{nb}{a} \Longrightarrow P'\left(-\frac{nb}{a}, 0\right)$$

luego

$$\left.\begin{aligned} l_{Q'P} &: y = -\frac{n}{a}(x-a) \\ l_{P'Q} &: y - b = \frac{a}{n}x \end{aligned}\right\}$$

entre estas dos últimas ecuaciones eliminando el parámetro n, se obtiene

$$y(y-b) = -x(x-a) \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = ax + by$$

29. Sea l una recta variable por un punto fijo $A(a,b), l$ corta al eje a en un punto B y sea l' perpendicular a l que pasa por A, l' corta al eje Y en C. Determine el L.G. del punto medio P del trazo BC.

Solución.

Ecuación de l, es

$$y - b = m(x-a) \tag{1}$$

Ecuación de l', es

$$y - b = -\frac{1}{m}(x-a) \tag{2}$$

Coordenadas de B

$$y = 0 \text{ en } (1) \implies x = \frac{ma-b}{m} \text{ así } B\left(a - \frac{b}{m}, 0\right)$$

Coordenadas de C

$$x = 0 \text{ en } (2) \implies y = \frac{mb+a}{m} \text{ así } C\left(0, b + \frac{a}{m}\right)$$

Sea $P(x,y)$ el punto medio de BC, luego

$$x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{b}{m}\right) \wedge y = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{m}\right)$$

eliminando m entre estas dos últimas ecuaciones se obtiene: $2ax + 2by = a^2 + b^2$.

30. Determine la ecuación del L.G. del punto de intersección de las diagonales de un rectángulo inscrito en un triángulo dado ABC, que tiene uno de sus lados coincidiendo con el lado AB del triángulo.

Solución.

Dado el triángulo que se indica en la figura.

Sean sus vértices: $A(-a,0),\ B(b,0)$ y $C(0,c),\ a,b,c>0.$

Ecuación de $RQ: y=\lambda; \lambda$ parámetro.

Ecuación de $AC: \dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{c}=1$

$\Longrightarrow x=\left(\dfrac{\lambda}{c}-1\right)a \Longrightarrow R\left((\dfrac{\lambda}{c}-1)a,\ \lambda\right)$

Ecuación de $BC: \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{c}=1 \Longrightarrow x=b\left(1-\dfrac{\lambda}{c}\right) \Longrightarrow Q\left(b\left(1-\dfrac{\lambda}{c}\right),\ \lambda\right)$

Sea $P(x,y)$ punto de intersección de las diagonales del rectángulo asi

$$x=\frac{b\left(1-\dfrac{\lambda}{c}\right)+\left(\dfrac{\lambda}{c}-1\right)a}{2}\ \wedge\ y=\frac{\lambda}{2}$$

$$\Longrightarrow 2x=b\left(1-\frac{2y}{c}\right)+\left(\frac{2y}{c}-1\right)a \Longleftrightarrow y=\frac{c}{a-b}x+\frac{c}{2}$$

ecuación del L.G. pedido si $a\neq b$. Si $a=b \Longleftrightarrow x=0$ es el L.G.

31. Dado un punto fijo $A(a,0)$, $a\neq 0$ y dos puntos variables en el eje Y, $B(0,\alpha)$ y $C(0,\beta)$ tales que $\alpha\beta=1$. Determine la ecuación del L.G. de los puntos de intersección de las perpendiculares a AB en B y a AC en C.

Solución.

Supongamos $\alpha < \beta,\ \alpha, \beta \neq 0$ con $\alpha\beta = 1$

$$m_{AB} = -\frac{\alpha}{a} \Longrightarrow m_{BP} = \frac{a}{\alpha},\ a \neq 0$$

$$m_{AC} = -\frac{\beta}{a} \Longrightarrow m_{CP} = \frac{a}{\beta}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ecuación de } BP: y - \alpha = \dfrac{a}{\alpha}x \\[2ex] \text{Ecuación de } CP: y - \beta = \dfrac{a}{\beta}x \end{array}\right\}$$

Eliminando el parámetro $\alpha\beta$, considerando que $\alpha\beta = 1$ resulta $x = \pm\dfrac{1}{a}$ ecuación del L.G. pedido.

32. Por un punto $P(a, b)$ se traza una recta variable que corta en A al eje X en B al eje Y. Se une A con el punto medio C del trazo OP (O el origen), hasta cortar al eje Y en D. Por D se traza DM paralela con OP hasta cortar en M a la recta AB. Determine la ecuación del L.G. del punto M.

Solución.

Sea $y - b = m(x - a)$ (1), la recta variable por P, m parámetro .

Coordenadas de A

$$y = 0 \Longrightarrow x = a - \frac{b}{m} \Longrightarrow A\left(a - \frac{b}{m}, 0\right)$$

Coordenadas de C

$$C\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

Ecuación de AD es $y - \dfrac{b}{2} = \dfrac{bm}{2b - ma}\left(x - \dfrac{a}{2}\right)$ haciendo $x = 0$ en ésta última ecuación obtenemos las coordenadas de D, $\left(0, \dfrac{b(b - ma)}{2b - ma}\right)$.

Ecuación de DM

$$y - \frac{b(b - ma)}{2b - ma} = \frac{b}{a}x \qquad (2)$$

Eliminando el parámetro m, entre (1) y (2) finalmente obtenemos: $a^2y^2 - 3abxy + 2b^2x^2 = 0$ que es la ecuación del L.G. pedido.

33. Sobre los lados de un ángulo α, resbalan los extremos de un segmento AB de longitud "a", determine la ecuación del L.G. del punto de intersección P de las perpendiculares en A y B a los lados del ángulo.

Solución.

De inmediato

$$m_{OA} = tg\,\alpha, \; m_{AP} = -cotg\,\alpha$$

Ecuación de recta l

$$y = tg\,\alpha x$$

Sea $C(k, 0)$ entonces

$$A(k, k\,tg\,\alpha)$$

Ecuación de recta BP es $x = \lambda$ (1), λ parámetro.

Ecuación de recta AP es $y - k\,tg\,\alpha = -cotg\,\alpha(x - k)$ (2)

Además debe verificarse que $(k-\lambda)^2 + k^2tg^2\alpha = a^2$ (3)

finalmente reemplazando los valores de λ y k de (1) y (2) en (3), se tiene:

$$\left(\frac{y + x\,cotg\alpha}{tg\,\alpha + cotg\,\alpha} - x\right)^2 + \left(\frac{y + x\,cotg\,\alpha}{tg\,\alpha + cotg\,\alpha}\right)^2 tg^2\alpha = a^2$$

de donde simplificando se llega a: $x^2 + y^2 = a^2cosec^2\alpha$.

34. Desde un punto P se bajan las perpendiculares PS y PT a los lados de un ángulo α, determinar la ecuación del L.G. del punto P de modo que la suma de sus distancias del vértice A del ángulo α, a los pies de las perpendiculares sea "a".

Solución.

Por condición del L.G. de $P(x, y)$,

$$AS + AT = a \quad (1)$$

$AS = x$

En $\triangle\, AQT$

$$sen\,\alpha = \frac{y+RT}{AT} \Longrightarrow AT = \frac{y+RT}{sen\,\alpha} \qquad (2)$$

En $\triangle\, PRT$, se tiene $tg\,\alpha = \dfrac{x-AQ}{RT}$, pero $AQ = AT\;cos\,\alpha$ así

$$RT = \frac{x}{tg\,\alpha} - \frac{AT\,cos\,\alpha}{tg\,\alpha} \Longleftrightarrow RT = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}x - \frac{cos^2\alpha}{sen\,\alpha}AT \text{ en} \qquad (2)$$

$$AT\,sen\,\alpha = y + \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}x - \frac{cos^2\alpha}{sen\,\alpha}AT \Longleftrightarrow AT = y\,sen\,\alpha + x\,cos\,\alpha$$

finalmente en (1), $x + y\,sen\,\alpha + x\,cos\alpha = a$

es decir $(1 + cos\,\alpha)x + sen\,\alpha y = a$, que es la ecuación L.G. pedido.

8.12. Ejercicios Propuestos

1. Determine el parámetro λ para que las rectas

$$l_1 : \lambda\,x + (\lambda-1)y - 2(\lambda+2) = 0$$

$$l_2 : 3\lambda x - (3\lambda+1)y - (5\lambda+4) = 0$$

sean:

Paralelas, perpendiculares entre si, concurrentes en un punto y coincidentes.

Respuesta.

$\lambda = \frac{1}{3}$; $\lambda = -\frac{1}{2}$; $\lambda \neq 0 \,\wedge\, \lambda \neq \frac{1}{3}$; $\lambda = 0$

2. Una recta pasa por el punto de intersección de las rectas $5x + 2y - 11 = 0$ y $-2x + 3y - 6 = 0$ y el segmento que determina sobre el eje Y es igual a la mitad de su pendiente. Hallar la ecuación de la recta.

Respuesta.

$104x - 61y + 52 = 0$

3. Determine una recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x - y + 2 = 0$; $x - y + 1 = 0$ y forme con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $\frac{3}{2}$.

   Respuesta.

   $3x + y + 3 = 0$

4. Determine el parámetro k de manera que la recta $2y + kx - 11 = 0$ pase por el punto de intersección de las rectas $x - 2y + 5 = 0$ y $2x + 3y + 3 = 0$.

   Respuesta.

   $k = -3$

5. Determine el valor del parámetro k de modo que las rectas de la familia $5x - 12y + k = 0$ disten del origen 5 unidades.

   Respuesta.

   $k = \pm 65$.

6. Determine el valor del parámetro k de modo que las rectas de la familia $kx - y + 3\sqrt{5} = 0$, disten del origen 3 unidades.

   Respuesta.

   $k = \pm 2$

7. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(5, -1)$, también hallar el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo.

Respuesta.

13; (2.309,   1.537)

8. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $l_1 : y = ax - \frac{1}{2}bc; \quad l_2 : y = bx - \frac{1}{2}ac; \quad l_3 : y = cx - \frac{1}{2}ab$. Demostrar que el área del triángulo es

$$A = \frac{1}{8}(a-b)(b-c)(c-a), \qquad c > a > b$$

9. Un punto móvil en el plano cartesiano tiene las coordenadas $(3t-1,\ t+2)$ en cada instante t, ¿cuál es la ecuación de la trayectoria de dicho punto?

Respuesta.

$x - 3y + 7 = 0$

10. Dado el triángulo ABC, donde $A(0,0),\ B(b,0)$ y $C(0,c)$. Un trazo DE se desplaza paralelamente al lado AB apoyado en los lados AC y BC respectívamente. Determine la ecuación del L.G. del punto $P(x,y)$ de intersección de las rectas AE y BD.

Respuesta.

$2cx + by - bc = 0$

11. Demostrar que el L.G. de un punto que se mueve de modo que la suma de las perpendiculares bajadas desde él a dos rectas dadas es constante, es una recta.

12. Hallar la ecuación de la recta cuyos puntos equidistan todos de las rectas paralelas $12x - 5y + 3 = 0$ y $12x - 5y - 6 = 0$.

Respuesta.

$24x - 10y - 3 = 0$

13. Hallar la ecuación del L.G. de un punto $P(x, y)$ que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x = 2$ es siempre 3 unidades mayor que su distancia del punto $(-1, -3)$.

    Respuesta.

    $y + 3 = 0$ si $x < 2$

14. Hallar la recta que pasa por la intersección de las rectas $l_1 : x + 2y - 1 = 0$ y $l_2 : 2x - y + 3 = 0$ y que diste del punto $(0, 1)$ una longitud a $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

    Respuesta.

    $x + 2y - 1 = 0;\ x - 2y + 3 = 0$

15. Determine la ecuación del L.G. de un punto P cuya distancia al origen sea el doble de su distancia a la recta $y = x$.

    Respuesta.

    $x^2 + y^2 = 2x - 2y$

16. Hallar las longitudes de las perpendiculares bajadas desde el origen a los lados del triángulo cuyos vértices son $(2, 1)$, $(3, 2)$ y $(-1, -1)$.

    Respuesta.

    $\frac{1}{5}, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

17. Hallar la distancia entre las rectas paralelas $x + y + 8 = 0$ y $x + y - 1 = 0$.

    Respuesta.

    $\frac{9}{\sqrt{2}}$

18. Hallar la ecuación del L.G. de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual al doble de su distancia al eje X.

    Respuesta.

    $4x + 7y + 12 = 0; \; 4x - 13y + 12 = 0$

19. La perpendicular desde el origen a una recta mide 6 unidades y forma con el eje X un ángulo cuya tangente es igual a $\frac{3}{4}$. Determine la ecuación de la recta.

    Respuesta.

    $4x + 3y \pm 30 = 0$

20. Hallar la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas $x - 2y - 4 = 0$ y $4x - y - 4 = 0$.

    Respuesta.

    $(\sqrt{17} + 4\sqrt{5})x - (2\sqrt{17} + \sqrt{5})y - 4(\sqrt{17} + \sqrt{5}) = 0$

21. Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto común de las rectas $x + 2y - 1 = 0$ y $2x - y + 3 = 0$ y que diste del punto $(0, 1)$ una longitud de $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

    Respuesta.

    $x - 2y + 3 = 0$ y $x + 2y - 1 = 0$

22. Determine las ecuaciones de las bisectrices de las rectas $3x - 4y - 3 = 0$ y $4x - 3y + 12 = 0$.

    Respuesta.

$x + y + 15 = 0$ y $7x - 7y + 9 = 0$

23. Si a, b, c son parámetros reales no todos nulos que verifican $2a+3b-5c = 0$. Demostrar que todas las rectas de la familia $ax + by + c = 0$ pasan por un punto fijo.

24. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $4x-9y+11 = 0$ y $3x+2y-7 = 0$ también hallar la ecuación de la recta que pasa por su intersección y por el punto $(2, -1)$.

    Respuesta.

    $80°16'$; $96x + 29y - 163 = 0$

25. Una recta se mueve de tal manera que la suma de los recíprocos de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es siempre igual a una constante k, $k \neq 0$. Demostrar que la recta pasa por un punto fijo.

26. Hallar el valor de k, de modo que una recta de la familia $kx+(k-1)y-18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 7 = 0$.

    Respuesta.

    4.

27. Hallar el valor de k para que las rectas de la familia $k^2x + (k+1)y + 3 = 0$ sea perpendicular a la recta $3x - 2y - 11 = 0$.

    Respuesta.

    $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$

28. Determine el valor de k, de modo que las rectas $3x+y-2 = 0$, $kx+2y-3 = 0$ y $2x - y - 3 = 0$ concurran en un punto.

Respuesta.

$k = 5.$

29. Sea el triángulo cuyos vértices sean $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$ se pide:

    a) Las ecuaciones de sus lados
    b) La recta que pasa por el vértice A y es paralela a BC
    c) La ecuación de las rectas por B y que trisecan a AC
    d) Hallar las coordenadas del punto de intersección de: las transversales de gravedad, de las simetrales y de las alturas.
    e) El área del triángulo.

Respuesta.

a) $x - y + 3 = 0$; $5x + y - 27 = 0$ y $x + 2y = 0$
b) $5x + y + 9 = 0$
c) $11x - 5y - 9 = 0$; $13x - y - 45 = 0$
d) $\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$; $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ y $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$
e) 21

30. Sea el punto A cuya ordenada es 10 y se encuentra sobre la recta cuya pendiente es 3 y que pasa por el punto $A(7, -2)$. Determínese la abscisa de P.

Respuesta.

11

31. Dos rectas l_1 y l_2 forman entre sí un ángulo de $135°$. Sabiendo que l_2 tiene pendiente -3. Calcular la pendiente de la recta l_1.

Respuesta.

$\pm\frac{1}{2}$

32. Hallar analíticamente los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-2,1)$, $B(3,4)$ y $C(5,-2)$.

    Respuesta.

    $77°28'$, $54°10'$, $48°22'$

33. Demostrar que los puntos $(2,5)$, $(8,-1)$ y $(-2,1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo y hallar sus ángulos interiores.

    Respuesta.

    $33°41'$ $\quad$ $56°19'$

34. Hallar la distancia desde el origen a cada una de las rectas paralelas $2x + 3y - 4 = 0$ y $6x + 9y - 5 = 0$. Deducir de éste resultado la distancia entre las rectas.

    Respuesta.

    $\frac{7\sqrt{13}}{39}$

35. Hallar la ecuación del L.G. de un punto que se mueve, de tal manera que:

    a) Equidiste de los puntos $(2,3)$ y $(4,-1)$.
    b) Forme con los puntos $(5,1)$ y $(-1,2)$ un triángulo de área 6.
    c) La diferencia de los cuadrados de sus distancias a $(-1,3)$ y $(2,4)$ sea igual a 8.

    Respuesta.

    a) $3x + y + 1 = 0$
    b) $x + 6y + 1 = 0$

c) $3x + y = 9$

36. Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $4x + 7y + 9 = 0$ y tal que el área del triángulo que forma con los ejes coordenados sea $\frac{7}{2}$.

Respuesta.

$7x - 4y = \pm 14$

37. Hallar la ecuación de la recta paralela a $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ y tal que la distancia a ella desde el origen sea 8.

Respuesta.

$4x + 3y = \pm 40$

38. Desde un punto P se bajan perpendiculares PS y PT sobre las rectas fijas OS y OT que se cortan formando un ángulo α. Determine la ecuación del L.G. de P si ST es paralela a una recta fija.

Respuesta.

$y + x\, cos\alpha = m(x + y\, cos\alpha)$; m pendiente de la recta fija.

39. Demostrar que las rectas que unen un vértice de un paralelógramo con los puntos medios de los lados opuestos, trisecan la diagonal que no concurre al vértice y esta a su vez triseca a dichas rectas.

40. Si $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ interseca a las rectas $\frac{x}{4a} = \frac{y}{b}$ y $\frac{x}{a} = \frac{y}{4b}$ en P y Q con a y $b \neq 0$, encuentre la distancia PQ.

Respuesta.

$\frac{3}{5}\sqrt{a^2 + b^2}$

41. Determine la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección de $2x - y - 1 = 0$ y $x + 2y - 4 = 0$ y su corte con el eje X, determina una distancia de 1 unidad, medida desde el origen.

    Respuesta.

    $7x - y - 7 = 0;\ 7x - 11y + 7 = 0$

42. Dado el triángulo ABC cuyos vértices son $A(1,2)$, $B(8,4)$ y $C(4,10)$. Hallar las coordenadas de un punto P tal que los triángulos PCB, PCA y PAB tengan la misma área en magnitud y signo.

    Respuesta.

    $(11,12)$

8.13. Ejercicios Propuestos de nivel avanzado

1. Sea $P(a,b)$ el punto medio del trazo AB. La recta OQ es paralela a AB. La recta PQ es cualquier recta por P. Demostrar que $\dfrac{2}{PQ} = \dfrac{1}{PX} + \dfrac{1}{PY}$, siendo X e Y las intersecciones con los ejes coordenados.

2. Si los vértices de un triángulo están respectívamente en tres rectas concurrentes y si dos de los lados pasan por un punto fijo, entonces el tercer lado también pasa por un punto fijo.

3. Se toman por ejes a los lados opuestos de un cuadrilátero y los otros dos lados tienen por ecuaciones $\dfrac{x}{2a} + \dfrac{y}{2b} = 1$, $\dfrac{x}{2a_1} + \dfrac{y}{2b_1} = 1$. Hallar el punto medio de las diagonales, $a, a_1, b, b_1 \neq 0$.

   Respuesta.

   (a, b_1) y (a_1, b)

4. Sea una recta AB que corta sobre los ejes coordenados segmentos iguales. Se toma un punto M, variable sobre AB y se trazan las perpendiculares MP y MQ a los ejes coordenados, se traza enseguida MR perpendicular a

PQ. Demostrar que MR pasa por un punto fijo cuando M recorre la recta AB.

5. Si m_1, m_2 y m_3 son diferentes entre si, demostrar que la condición necesaria y suficiente para que las tres rectas: $y = m_1x + n_1;\ y = m_2x + n_2;\ y = m_3x + n_3$ concurran en un punto es:

$$m_1n_2 - m_2n_1 - m_3n_2 + m_3n_1 - m_1n_3 + m_2n_3 = 0$$

6. Sean P_1 y P_2 dos puntos fijos, sea l una recta variable, y sean d_1 la distancia de P_1 a l y sea d_2 la distancia de P_2 a l. Demostrar que si $d_1 = 2d_2$ la recta pasa por un punto fijo.

7. Demostrar en un triángulo rectángulo, que la recta que une el vértice del ángulo recto con el centro del cuadrado construído sobre la hipotenusa (hacía el exterior del triángulo) es bisectriz del ángulo recto.

8. Demostrar analíticamente que la bisectriz de cualquier ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados contiguos a los respectivos segmentos.

9. Desde un punto cualquiera de la base de un triángulo isósceles se trazan perpendiculares a los lados iguales. Demostrar que la suma de las longitudes de estas perpendiculares es constante e igual a la longitud de la altura correspondiente al vértice opuesto de dicha base.

10. Demostrar que las bisectrices de dos ángulos exteriores de cualquier triángulo forman un ángulo igual a la mitad del tercer ángulo exterior.

11. Dado un ángulo AOB, sobre el lado OA se toman los puntos P y Q y sobre OB los puntos R y S; PS y QR se cortan en C. Demostrar que L, M y N puntos medios de OC, PR y QS respectívamente son colineales. (Elija un sistema oblícuo de coordenadas).

12. En un triángulo dado ABC, se traza de un punto en su interior las rectas PD paralela a C y PE paralela a AB. Determine la ecuación del L.G. de P de modo que $\frac{PD}{PE} = \frac{1}{2}$.

    Respuesta.

    Si los vértices del triángulo son $A(0,0)$, $B(b,0)$ y $C(0,c)$ entonces la ecuación del L.G. es $cx + (2c+b)y - bc = 0$

13. Entre los lados de un ángulo α, se mueve un punto P de modo que la suma de sus distancias a los lados del ángulo es constante. Hallar la ecuación del L.G. de dicho punto.

    Respuesta.

    $(x+y)\sqrt{1+cos^2\alpha} = k,\ k$ constante.

14. Desde un punto P se bajan perpendiculares PS Y PT sobre dos rectas fijas OS y OT que se cortan formando un ángulo α. Hallar la ecuación del L.G. de P si ST es dimidiada por la recta $y = mx + n$.

    Respuesta.

    $y + x\,cos\alpha = m(x + y\,cos\alpha) + 2n$

15. Con referencia al problema anterior, suponga que P se mueve sobre la recta $y = mx$. Hallar el L.G. del punto medio de ST.

    Respuesta.

    $2y - 2x\ \cos\alpha = m(2x - 2y\,cos\alpha) + n\,sen^2\alpha$