Capítulo 7

Sistema Bidimensional

7.1. Sistema Cartesiano

La correspondencia entre pares ordenados de números reales y puntos en el plano, idea inicial que se debe a Renato Descartes (1596 - 1650), es lo que planteamos en forma breve a continuación.

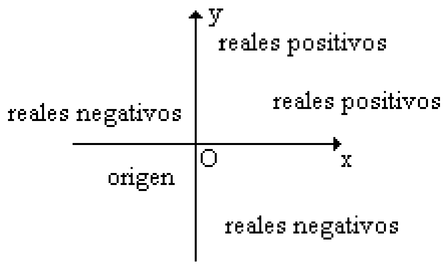
Definición

Sea un punto $P(x, y)$ en el plano, (x, y) se llama par ordenado en que "x" es el primer elemento del par e "y" el segundo, por tanto; $(x, y) \neq (y, x)$.

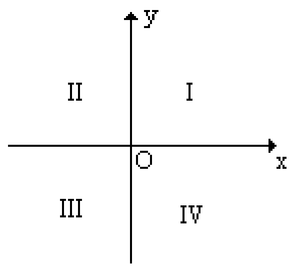
Sean dos rectas perpendiculares en el plano, su punto de intersección se acostumbra a llamar origen O, dichas rectas las llamaremos eje X y eje Y.

Sobre el eje X, considérese números reales y diremos que hay correspondencia biunívoca con los puntos de dicho eje, análogamente sobre el eje Y.

Sea el $O(0, 0)$ el origen O, en el eje X a la derecha de O colocamos los números reales positivos y su izquierda los negativos, con respecto al eje Y los reales positivos por encima del origen $O(0, 0)$ y los reales negativos por debajo.



La intersección del eje X y eje Y definen 4 cuadrantes que se acostumbran a denotar como: I, II, III y IV. (ver fig).



Utilizando este esquema podemos asociar un par ordenado de números reales (x, y) a cada punto P del plano y viceversa (correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares ordenados (x, y)).

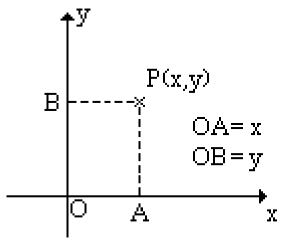
Por tanto para todo $P(x, y)$ del plano cartesiano

"x" se acostumbra a llamar abscisa del punto P

"y" se acostumbra a llamar ordenada del punto P

(x, y) se acostumbran a llamar coordenadas de P

Del punto $P(x, y)$ se trazan perpendiculares a ambos ejes, que definen: la abscisa OA y de P igual a x y la ordenada OB de P igual a y. (ver fig.)

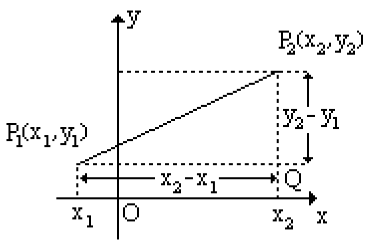


Note que la abscisa y ordenada del origen son 0.

7.2. Distancia entre dos puntos

Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ la distancia entre P_1 y P_2 está dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Demostración.

Notemos que las coordenadas del punto Q, son $Q(x_2, y_1)$. Por Pitágoras en el $\triangle\, P_1\, Q\, P_2$, se tiene que:

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$\Updownarrow$$
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

7.3. División de un Segmento en una razón dada

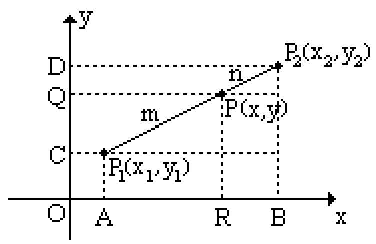
Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que definen el segmento P_1P_2 y sea dada la razón

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq -1$$

entonces $P(x, y)$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{nx_1 + mx_2}{n+m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y &= \frac{ny_1 + my_2}{n+m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Demostración.



De la geometría elemental las rectas P_1A, PR y P_2B intersecan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y AB luego

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{AR}{RB} = \frac{m}{n} \Longleftrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\Longleftrightarrow n(x - x_1) = m(x_2 - x) \Longleftrightarrow (n + m)x = nx_1 + mx_2$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} \text{ de aquí también se tiene}$$

$$x = \frac{x_1 + \frac{m}{n}x_2}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

análogamente para el caso de las ordenadas, se tiene

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{CQ}{QD} = \frac{m}{n} \Longleftrightarrow y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Note que si el punto de división es interno a P_1P_2 entonces $\lambda > 0$, si en cambio el punto es externo $\lambda < 0$

7.4. Coordenadas del Punto medio de un trazo

Notemos que si $m = n$ o bien $\lambda = 1$, $P(x, y)$ representa a las coordenadas del punto medio del trazo P_1P_2, que es:

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

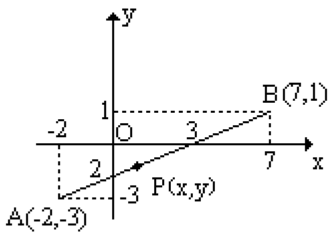
Ejemplo.

Sea $A(-2, -3)$ y $B(7, 1)$, determinamos P y Q tales que

1. $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{2}{3}$
2. $\dfrac{AQ}{QB} = -\dfrac{1}{3}$

Solución.

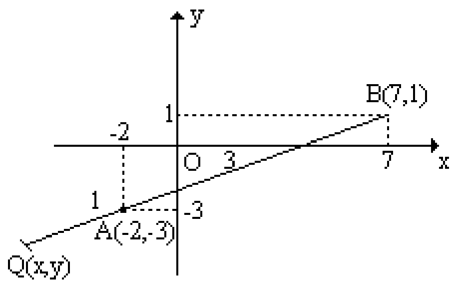
1.



Aplicando $x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{n+m} \Longrightarrow x = \dfrac{3(-2) + 2 \cdot 7}{3+2} = \dfrac{8}{5}$ e

$y = \dfrac{3(-3) + 2 \cdot 1}{3+2} = \dfrac{-7}{5}$ por tanto: $P\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{-7}{5}\right)$

2. $\dfrac{AQ}{QB} = -\dfrac{1}{3} \Longleftrightarrow \dfrac{QA}{AB} = \dfrac{1}{3}$ (ver figura)



De la figura, se tiene:

$$-2 = \frac{1 \cdot 7 + 3x}{1+3} \Longrightarrow x = -5$$

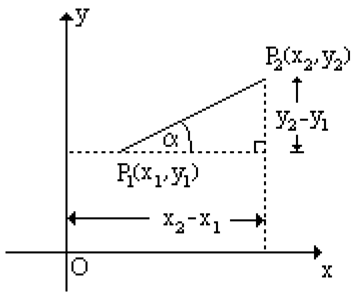
$$-3 = \frac{1 \cdot 1 + 3y}{1+3} \Longrightarrow y = -\frac{13}{3}$$

7.5. Pendiente

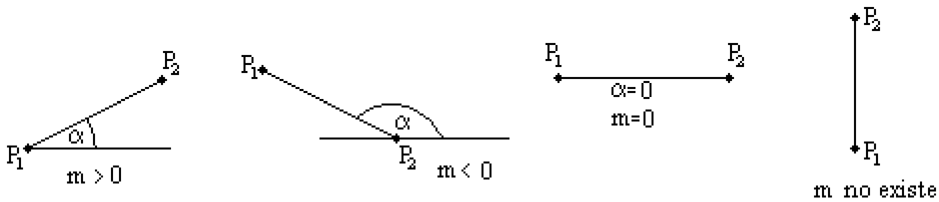
Dado un segmento P_1P_2 mediante los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ la pendiente del segmento P_1P_2 esta dada por

$$m = tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2 \tag{3}$$

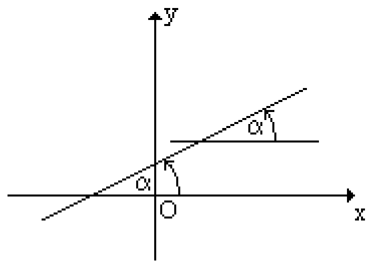
si $x_2 = x_1$ se dice que el segmento no tiene pendiente.



Nótese que la pendiente mide el grado de inclinación que tiene el segmento con relación a la horizontal paralela al eje X. Si $\alpha = 0°$ o $\alpha = 180°$ note que la pendiente del segmento es cero



Del concepto de segmento o trazo, podemos pasar en forma simple al concepto de una recta en el plano, basta con dejar libres en forma indefinida los extremos del segmento, notemos que el concepto de pendiente no varía, el ángulo α ahora se mide con respecto al eje X. (ver fig.)



Es decir la pendiente común a todos los puntos que forman la recta, esta dada por

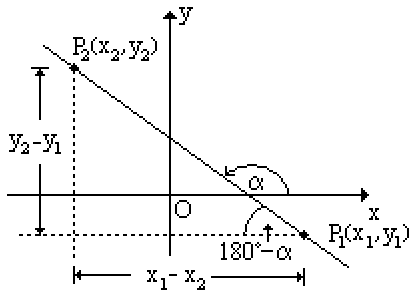
$$m = tg\,\alpha$$

donde α es el ángulo medido desde el eje X, hasta su encuentro con dicha recta, el ángulo α (positivo) puede ser medido en contra de los punteros de un reloj o bien a favor (negativo).

Por tanto para determinar la pendiente de una recta, basta tomar dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ que pertenezcan a la recta y aplicar la fórmula de pendiente de un segmento.

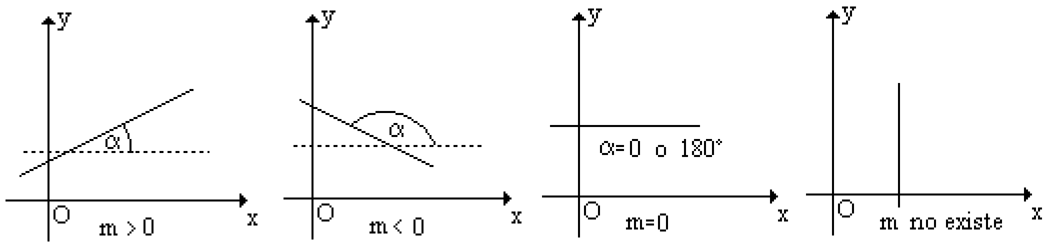
$$m = tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1$$

En efecto:



$$tg(180° - \alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$\Updownarrow$$
$$-tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$
$$\Updownarrow$$
$$tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$ Notemos que $x_1 - x_2 > 0 \wedge y_2 - y_1 > 0$

por tanto, al igual que para los segmentos, se tienen:

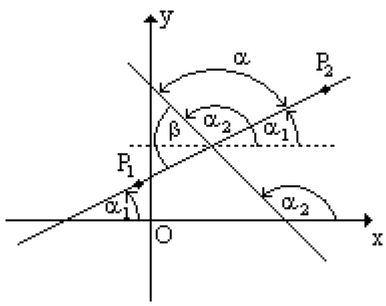


7.6. Paralelismo y Perpendicularidad

Sean dos segmentos dados P_1P_2 y P_3P_4 cuyas pendientes son conocidas m_1 y m_2.

Consideremos que los segmentos se cortan o bien sus prolongaciones asi sean α y β los ángulos que forman dichos segmentos al cortarse. Note que una relación entre estos ángulos es que:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \tag{4}$$

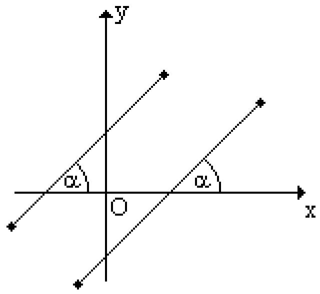


y como se conocen m_1 y m_2 esto implica que $tg\,\alpha_1 = m_1$ y $tg\,\alpha_2 = m_2$, de la figura $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \Longleftrightarrow tg\,\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1)$

$$tg\,\alpha = \frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\alpha_2\, tg\,\alpha_1} \Longleftrightarrow tg\,\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \tag{5}$$

de aquí si los segmentos son paralelos o coincidentes $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$ en ambos casos

$$m_2 - m_1 = 0 \Longleftrightarrow m_2 = m_1 \text{ (condición de paralelismo)}$$



si los segmentos son perpendiculares $\alpha = 90°$ o $\alpha = 270°$ en ambos casos $tg\,\alpha$ no existe y por tanto de (5)

$$1 + m_2 m_1 = 0 \Longleftrightarrow m_2 m_1 = -1 \text{ (condición de perpendicularidad).}$$

7.7. Lugares Geométricos - Ecuación

Definición

El lugar geométrico de un punto se puede definir como aquel conjunto de puntos del plano cartesiano que satisfacen ciertas condiciones geométricas dadas para dicho punto.

El lugar geométrico de un punto cosntituye por lo general una curva en el plano cartesiano, asi entonces también podemos agregar que una curva es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas.

Dicha curva en general se representa en el plano cartesiano por medio de una ecuación que involucra a las variables x e y, es decir por

$$F(x, y) = 0$$

Así, los valores reales x e y son todas las coordenadas de los puntos y solamente de aquellos puntos, que cumplen la condición o condiciones geométricas dadas y que definen el lugar geométrico.

Ejemplo.

1. Sea P un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que P está a una distancia constante de un punto fijo C, del mismo plano.

   El lugar geométrico definido es una circunferencia de centro C. A la distancia constante se suele llamar radio.

2. Sea P un punto del plano cartesiano que equidista (está a igual distancia) de dos puntos fijos A y B del mismo plano.

   El lugar geométrico es la mediatriz (o simetral) del segmento AB.

3. Sea P un punto fijo de una circunferencia que rueda a lo largo de una recta.

   Este lugar se llama cicloide. Note que el punto aunque esta fijo en la circunferencia es movil con respecto a la recta.

Observación.

El problema que se nos plantea cuando nos definen un lugar geométrico, es el de encontrar una ecuación que lo represente. A esta ecuación como se dijo se llama ecuación del lugar geométrico.

Una vez encontrada dicha ecuación estudiaremos sus propiedades algebraicamente y deduciremos de ellas las propiedades del lugar.

7.8. Ejercicios Resueltos

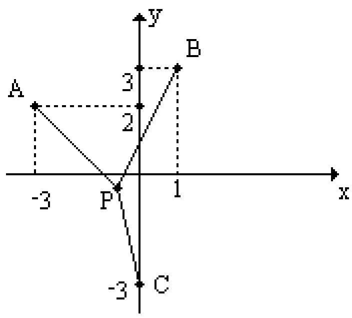
1. Determine un punto $P(x, y)$ tal que equidiste de tres puntos fijos dados por: $A(-3, 2), B(1, 3)$ y $C(0, -3)$

Solución.

Notemos que $P(x,y)$, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

Se debe tener:

$$PA = PC = P13 \qquad (1)$$



$$PA = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2}$$

$$PC = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$PB = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

así de (1) se obtienen

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = -2 \\ \\ 2x + 12y = 1 \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son: $x = -\frac{19}{46}$ e $y = \frac{7}{46}$

2. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son los puntos $O(0,0)$ y $A(-2,-3)$. Determine las coordenadas de los otros vértices.

   Solución.

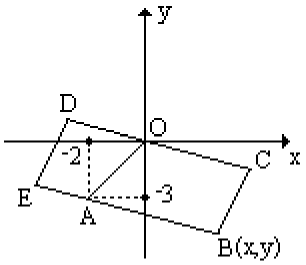
   Notemos que hay dos soluciones posibles, y también que el cuadrado es de lado $l = \sqrt{13}$. Sea el vértice $B(x,y)$, se debe tener:

$$\left.\begin{array}{l} AB = \sqrt{13} \\ \\ OB = \sqrt{26} \end{array}\right\}$$

$$AB = \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2}$$

$$OB = \sqrt{x^2 + y^2}$$

de donde resulta el sistema:



$$x^2 + y^2 = 26$$

$$2x + 3y = -13$$

cuyas soluciones son: $B(1,-5)$ y $E(-5,-1)$ análogamente el vértice $C(x,y)$, debe cumplir

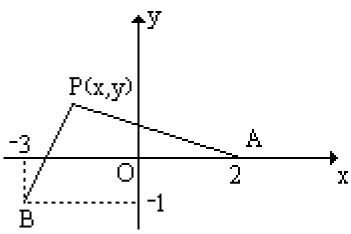
$$\left.\begin{array}{r} OC = \sqrt{13} \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 13 \\ AC = \sqrt{26} \Longleftrightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 = 26 \end{array}\right\}$$

de donde resolviendo se obtienen $C(3,-2)$ y $D(-3,2)$

3. Determine la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x,y)$ cuya distancia al punto $A(2,0)$ es el doble de su distancia al punto $B(-3,-1)$.

Solución.

Condición del L.G. de $P(x,y)$ es



$$PA = 2\,PB$$
$$\Updownarrow$$
$$(PA)^2 = 4(PB)^2$$

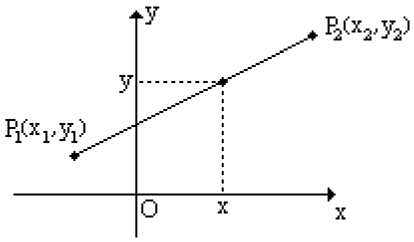
$$(x-2)^2 + y^2 = 4[(x+3)^2 + (y+1)^2]$$

de donde simplificando resulta:

$$3x^2 + 3y^2 + 28x + 8y + 36 = 0$$

4. Probar que el punto cuyas coordenadas son $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$ e $y = y_1 + t(y_2 - y_1)$ divide el segmento que une $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ en la razón $\dfrac{t}{1-t}$, $x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2 \wedge t \neq 1$.

Solución.



Sabemos que

$$x = \frac{x_1 + \lambda\, x_2}{1+\lambda}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda\, y_2}{1+\lambda}$$

de aquí

$$x_1 + t(x_2 - x_1) = \frac{x_1 + \lambda\, x_2}{1+\lambda} \iff$$

$$\lambda\left[(x_1 - x_2) + t(x_2 - x_1)\right] = -t(x_2 - x_1) \text{ como } x_1 \neq x_2$$

$$\lambda(-1+t) = -t \Longrightarrow \lambda = \frac{t}{1-t},\ t \neq 1$$

resulta lo mismo si se toma y.

5. Dado el segmento AB, donde $A(0,2)$ y $B(3,6)$. Determine la razón en que $P_1\left(2, \dfrac{14}{3}\right)$ divide a AB. Como también $P_2\left(-\dfrac{3}{2},\, 0\right)$.

Solución.

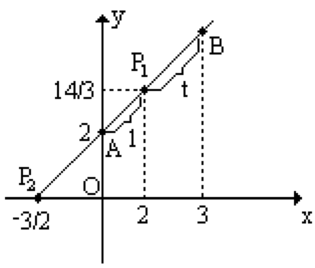
$$\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{1}{t}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{t\cdot 0 + 1\cdot 3}{t+1} = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$t = 1/2$$



y también

$$y = \frac{t\cdot 2 + 1\cdot 6}{t+1} = \frac{14}{3}$$
$$\Updownarrow$$
$$t = 1/2$$

asi $\dfrac{AP_1}{P_1B} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{1}$, análogamente para P_2

$$\frac{P_2A}{AB} = \frac{1}{t} \Longleftrightarrow 0 = \frac{1\cdot 3 + t\cdot \frac{-3}{2}}{1+t} \Longrightarrow t = 2$$

y $2 = \dfrac{1\cdot 6 + t\cdot 0}{1+t} \Longleftrightarrow 2 + 2t = 6 \Longrightarrow t = 2$

luego

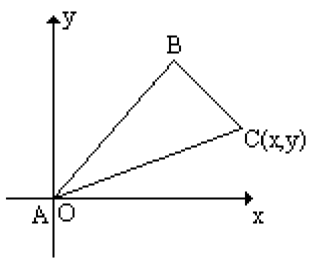
$$\frac{P_2A}{AB} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{P_2B - P_2A}{P_2A} = 2 \Longleftrightarrow \frac{P_2B}{P_2A} = 3$$

$$\Longleftrightarrow \frac{P_2A}{P_2B} = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \frac{AP_2}{P_2B} = -\frac{1}{3}$$

6. Determine la ecuación del L.G. del vértice $C(x, y)$ de un triángulo ABC donde $A(0,0)$, $B(a, 3a)$, $a \neq 0$ y tal que el producto de las pendientes de los lados AC y BC sea el doble de la pendiente del lado AB.

Solución.

Condición del L.G. del vértice $C(x, y)$



$$m_{AC} \cdot m_{BC} = 2\, m_{AB}$$

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{y - 3a}{x - a} = 2\,\frac{3a}{a},\ a \neq 0$$

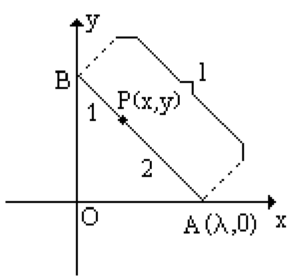
$$y(y - 3a) = 6x(x - a)$$

$$6x^2 - y^2 - 6ax + 3ay = 0$$

7. Un segmento de longitud l, desliza apoyado siempre sobre los ejes coordenados, determine la ecuación del L.G. de un punto $P(x, y)$ que divide al segmento dado en la razón $\frac{2}{1}$ medido desde su extremo sobre el eje X. ¿En que se transforma dicha ecuación si el punto P es el punto medio del segmento?

Solución.

Sea $A(\lambda, 0)$ las coordenadas del extremo inferior del segmento, $\lambda \neq 0$ parámetro variable se debe tener que $B(0, \sqrt{l^2 - \lambda^2})$ y que:



$$x = \frac{1 \cdot \lambda + 2 \cdot 0}{3} \Longrightarrow \lambda = 3x$$

$$y = \frac{1 \cdot 0 + 2\sqrt{l^2 - \lambda^2}}{3} \Longleftrightarrow$$

$$3y = 2\sqrt{l^2 - \lambda^2} \text{ pero } \lambda = 3x, \text{ entonces}$$

$$3y = 2\sqrt{l^2 - 9x^2} \Longleftrightarrow x^2 + \frac{1}{4}y^2 = \left(\frac{l}{3}\right)^2$$

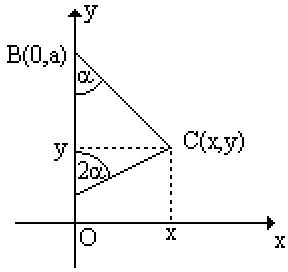
Si es el caso de que P es el punto medio se obtiene

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

8. Determine la ecuacioón del L.G. del vértice $C(x, y)$ de un triángulo ABC si $A(0,0)$ y $B(0,a)$ tal que el ángulo CAB es doble que el ángulo $CBA \quad (a > 0)$.

   Solución.

   Condición del L.G. de $C(x, y)$

   $\sphericalangle CAB = 2 \sphericalangle CBA$
   por otra parte

   $$tg\,\alpha = \frac{x}{a-y} \wedge tg\,2\alpha = \frac{x}{y}$$

   pero $tg\,2\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} \Longleftrightarrow$

   $$\frac{x}{y} = \frac{2\frac{x}{a-y}}{1 - \frac{x^2}{(a-y)^2}} \Longleftrightarrow x^2 - 3y^2 + 4ay - a^2 = 0$$

9. Determine las coordenadas del ortocentro del triángulo ABC si $A(-1,1)$, $B(4,3)$ y $C(3,-2)$.

   Solución.

   Recuerde que el ortocentro es el punto de intersección de las alturas del triángulo.

   Sean las coordenadas del ortocentro del $\triangle, H(x, y)$

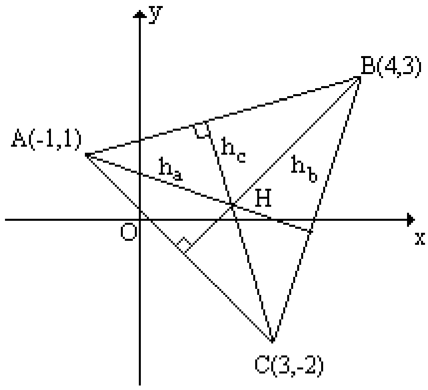
   $$m_{HC} \cdot m_{AB} = -1$$

   $$\frac{y+2}{x-3} \cdot \frac{2}{5} = -1,$$

   $$5x + 2y - 11 = 0 \qquad (1)$$

   análogamente $m_{HB} \cdot m_{AC} = -1 \Longleftrightarrow \dfrac{y-3}{x-4} \cdot \dfrac{3}{-4} = -1$

$\Longleftrightarrow 4x - 3y - 7 = 0$ (2), resolviendo (1) y (2) se obtiene $H\left(\dfrac{47}{23}, \dfrac{8}{23}\right)$



10. Demuestre analíticamente que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre si.

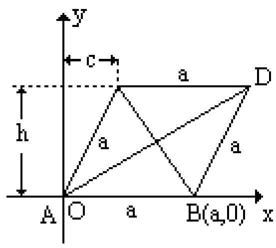
Solución.

Sea el rombo de vértices $A(0,0)$, $B(a,0), C(c,h)$ y $D(a+c,h)$.

Por demostrar

$m_{BC}\, m_{AD} = -1$

$$m_{BC} = \frac{h}{c-a},\ m_{AD} = \frac{h}{a+c}$$



$$m_{BC}\, m_{AD} = \frac{h^2}{c^2 - a^2}$$

pero $c^2 - a^2 = -h^2$

luego $m_{BC} m_{AD} = \dfrac{h^2}{-h^2} = -1.$

11. Dado el $\triangle\, ABC$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ determine el centro de gravedad del $\triangle$ y demuestre que el centro de gravedad de $\triangle\, PQR$ es el mismo que el del $\triangle\, ABC$, siendo P, Q y R los puntos en que dividen a los lados AB, BC y CA del triángulo ABC en la misma razón.

Solución.

El centro de gravedad del $\triangle\, ABC$ es el punto de intersección de sus transversales de gravedad.

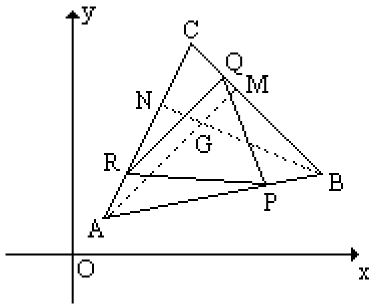
Sea $G(\bar{x}, \bar{y})$, sabemos de la geometría elemental que $\dfrac{AG}{GM} = \dfrac{2}{1}$, en que M es el punto medio del lado BC, $M\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}, \dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)$, entonces $\bar{x} = \dfrac{2\frac{x_2+x_3}{2} + 1x_1}{2+1} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, análogamente $\bar{y} = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ se obtiene el mismo resultado tomando las otras transversales.

Coordenadas de P, Q y R si $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{\lambda}{1} \Longleftrightarrow$

$$x_P = \frac{\lambda\, x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \qquad y_P = \frac{\lambda\, y_2 + y_1}{\lambda + 1}$$

$$x_Q = \frac{\lambda\, x_3 + x_2}{\lambda + 1}, \qquad y_Q = \frac{\lambda\, y_3 + y_2}{\lambda + 1}$$

$$x_R = \frac{\lambda\, x_1 + x_3}{\lambda + 1}, \qquad y_R = \frac{\lambda\, y_1 + y_3}{\lambda + 1}$$



Si G' es el centro de gravedad de $\triangle\, PQR$, se tiene

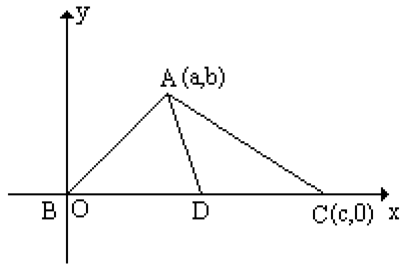
$$x_{G'} = \frac{x_P + x_Q + x_R}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = x_G$$

análogamente para $y_{G'} = y_G$.

12. Probar analíticamente que en cualquier $\triangle ABC$ se tiene $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + DC^2)$ donde D es el punto medio de BC.

Solución.

Sea el $\triangle\, ABC$ que se muestra en la figura de inmediato $D\left(\frac{c}{2}, 0\right)$



$AB^2 = a^2 + b^2$

$AC^2 = (a-c)^2 + b^2 = a^2 + c^2 + b^2 - 2ac$

$AB^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ac \quad (1)$

por otra parte

$$AD^2 = \left(a - \frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = a^2 - ac + \frac{c^2}{4} + b^2$$

$$DC^2 = \frac{c^2}{4}$$

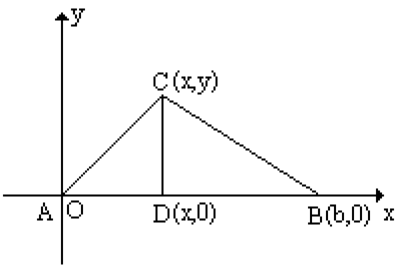
$$2(AD^2 + DC^2) = 2\left(a^2 - ac + b^2 + \frac{c^2}{2}\right) = 2a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ac \quad (2)$$

como (1) = (2) se tiene lo pedido.

13. Determinar la ecuación del L.G. del vértice C de un triángulo de base AB fija, en cual se verifica que $AD \cdot BC = DB \cdot AC$ siendo D el pie de la altura bajada desde el vértice C.

Solución.

Sea el $\triangle\, ABC$ que se muestra en la figura



$AD = |x|$

$BC = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$

$DB = |b - x|$

$AC = \sqrt{x^2 + y^2}$

así $|x|\sqrt{(b-x)^2 + y^2} = |b - x|\,\sqrt{x^2 + y^2}$ de donde simplificando se obtiene $x = \dfrac{b}{2}$

7.9. Ejercicios Propuestos

1. Sean los puntos $P_1(2,4)$ y $P_2(8,-4)$ los extremos de un segmento. Hallar el punto $P(x,y)$ que divide a este segmento en dos partes tales que $\dfrac{P_2P}{PP_1} = -\dfrac{2}{1}$

   Respuesta.

   $(-4, 12)$

2. Si M, N y P son los puntos medios de los lados de un triángulo ABC, determine las coordenadas de los vértices del triángulo, donde $M(-2,1)$, $N(3,2)$ y $P(0,-2)$.

   Respuesta.

   $A(-5,-3)$, $B(5,-1)$ y $C(1,5)$

3. Uno de los extremos de un segmento de longitud 5 es el punto $(3,-2)$. Si la abscisa del extremo es 6. Hallar su ordenada.

   Respuesta.

2 y -6

4. Dos extremos de un segmento son los puntos $A(7,4)$ y $B(-1,-4)$. Hallar la razón $\dfrac{P_1P}{PP_2}$ en que el punto $P(1,-2)$ divide al segmento.

   Respuesta.

   3

5. Hallar los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son los puntos $A(-6,3)$ y $B(12,-6)$.

   Respuesta.

   $(0,0)$ y $(6,-3)$

6. Uno de los extremos de un segmento es el punto (2,3) y su punto medio es (6,-8). Determine las coordenadas del otro extremo.

   Respuesta.

   (10, -19)

7. Dos vértices de un triángulo equilátero son $A(2,0)$ y $B(5,4)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice. (Dos soluciones)

   Respuesta.

   $$\left(\frac{7+5\sqrt{2}}{2}, \frac{16-15\sqrt{2}}{8}\right) \text{ y } \left(\frac{7-5\sqrt{2}}{2}, \frac{16+15\sqrt{2}}{8}\right)$$

8. Demostrar que los puntos $A(0,0)$, $B(2,3)$, $C(4,3), D(1,-\frac{3}{2})$ son los vértices de un trapecio. Calcular su perímetro y su área.

Respuesta.

$\simeq 12.866; \quad 7.5$

9. Uno de los extremos de un segmento de longitud 10 es el punto $A(2,0)$. Si la ordenada del otro extremo es 6. Hallar su abscisa. (Dos soluciones)

   Respuesta.

   -6 y 10

10. En un triángulo rectángulo cualquiera demuestre que el punto medio de su hipotenusa equidista de los tres vértices.

11. Determine la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x,y)$ que equidista del punto fijo (0,0) una distancia de r unidades ($r > 0$).

    Respuesta.

    $x^2 + y^2 = r^2$

12. Demuestre que el triángulo inscrito en una semicircunferencia de radio r, es rectángulo. (ocupe la ecuación del ejercicio 11).

13. Determine la ecuación del L.G. de un punto $P(x,y)$ que equidista de los puntos fijos $A(2,-1)$ y $B(6,5)$. Demuestre también que el punto medio de AB satisface a esta ecuación.

    Respuesta.

    $2x + 3y - 14 = 0$

14. Determine la ecuación del L.G. de un punto $P(x, y)$ cuya diferencia de los cuadrados de las distancias a dos puntos fijos $P_1(x_1, y_1)$ y$P_2(x_2, y_2)$, es cero.

    Respuesta.

    $2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2$

15. Determine la ecuación del L.G. del vértice $C(x, y)$ de un $\triangle ABC$, rectángulo en C, donde $A(2, -1)$ y $B(4, 5)$.

    Respuesta.

    $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$

16. Demostrar que los puntos $A(-1, 6)$, $B(5, -4)$ y $C(-3, -2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Calcule su área.

    Respuesta.

    34

17. Calcular los ángulos interiores del triángulo cuyas vértices son los puntos $A(-2, 1)$, $B(2, 5)$ y $C(-3, 4)$

    Respuesta.

    $33.7°$, $63.43°$ y $82.87°$

18. Un segmento de pendiente 4 pasa por el punto $(-1, 5)$ y por los puntos $P_1(x_1, 3)$ y $P_2(6, y_2)$. Determine x_1 e y_2.

    Respuesta.

$$x_1 = \frac{-3}{2} \quad \text{e} \quad y_2 = 33$$

19. Tres vértices de un paralelogramo son $(3,3)$, $(-3,6)$ y $(-6,5)$. Determine las coordenadas del cuarto vértice.

    Respuesta.

    (0,2)

20. Hallar la ecuación del L.G. de un punto $P(x,y)$ que debe estar sobre el segmento determinado por los puntos $P_1(-2,8)$ y $P_2(4,1)$.

    Respuesta.

    $7x + 6y - 34 = 0$

21. Dos segmentos se cortan en el punto $(3,4)$ formando un ángulo de 45° o bien de 135°, si uno de ellos pasa por el punto $(-1,6)$ determine la ordenada de un punto A de abscisa -5 y que pertenece al otro segmento.

    Respuesta.

    $\frac{4}{3}$

22. Dos vértices extremos de lado diferente de un triángulo isósceles son los puntos $A(1,1)$ y $B(5,3)$. Determine las coordenadas del tercer vértice C si este satisface la ecuación $x - 6 = 0$.

    Respuesta.

    (6,-4)

23. Demuestre analíticamente que el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases e igual a su semisuma.

24. Demuestre que el segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es igual a la mitad de la diferencia de las longitudes de sus lados no paralelos.

25. Demuestre que los segmentos que unen los puntos medios de cada dos lados opuestos de un cuadrilátero cualquiera se dimidian entre si.

26. Determinar la ecuación del L.G. del vértice $C(x, y)$ de un triángulo de base fija $AB = c$, de modo que la transversal de gravedad que pasa por el vértice B, sea igual a la mitad del lado AC.

    Respuesta.

    Considerando $A(0, 0)$ y $B(c, 0)$, $c > 0$ la ecuación del L.G. pedido es: $x = c$.

27. Dados los puntos $A(2, 5)$ y $B(3, 1)$. Determine:

    a) Las coordenadas de un punto C, que equidiste de A y de B tal que satisfaga a la ecuación $x - 2y + 3 = 0$.

    b) Las coordenadas de un punto D tal que el área del triángulo ABD sea igual a $\dfrac{15}{2}$.

    c) Las coordenadas de un punto E tal que la perpendicular de AB por E pase por el origen y el área del triángulo ABE sea $\dfrac{5}{2}$.

    Respuesta.

    a) $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{13}{4}\right)$ b) D pertenece a: $4x + y = 28$ c) $\left(\dfrac{32}{17}, \dfrac{8}{17}\right)$.

28. Demostrar que el segmento de recta que une los puntos medios de dos lados cualquiera de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

29. Demostrar que los dos segmentos que se obtienen uniendo dos vértices opuestos de un paralelogramo, con los puntos medios de sus lados opuestos son iguales y paralelos.

30. Demostrar que la suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.

31. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(-1, 2)$ es igual al doble de su distancia al eje X. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

    Respuesta.

    $x^2 - 3y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$

32. Demostrar que los puntos medios de dos lados opuestos de cualquier cuadrilatero y los puntos medios de sus diagonales son los vértices de un paralelogramo.

33. Encontrar la ecuación del L.G. de un punto $P(x, y)$ cuya distancia al punto $(-2, 1)$ es igual a su distancia al origen de coordenadas y demuestre que dicho L.G. es una recta perpendicular al segmento que une $(-2, 1)$ con el origen.

    Respuesta.

    $4x - 2y + 5 = 0$

34. Determine la ecuación del L.G. de un punto $P(x, y)$ para el cual la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos fijos $A(a, 0)$, $B(a, a)$ y $C(0, a)$ es igual al triple del cuadrado de su distancia al origen.

    Respuesta.

    $x + y = a$

35. Un segmento de longitud 4 se mueve de tal manera que uno de sus extremos permanece siempre sobre el eje X y el otro sobre el eje Y. Hallar la ecuación del L.G. del punto medio del segmento.

    Respuesta.

    $x^2 + y^2 = 4$

36. Demostrar que el punto de intersección de los segmentos que unen los puntos medios de los lados de un cuadrilátero coincide con el punto medio del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

37. Hallar la ecuación del L.G. de un punto para el cual la diferencia de los cuadrados de sus distancias a A y B vértices de un triángulo isósceles ABC, de lados $AC = BC = a$, es igual a, a^2.

    Respuesta.

    $x - y = \dfrac{a}{2}$

38. Un triángulo equilátero tiene sus lados de longitud 2. Se toma el lado AB sobre el eje X tal que la simetral del lado AB coincide con el eje Y, sobre los lados AC y BC se construyen cuadrados hacia el exterior. Determinar las coordenadas de los vértices del triángulo y del cuadrado.

    Respuesta.

$(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,\sqrt{3})$, $(\pm\sqrt{2},2\sqrt{2})$, $(\pm 2\sqrt{2},\sqrt{2})$

39. Dados los puntos $A(0,3)$ y$B(3,2)$. Determine sobre el eje X un punto C tal que el ángulo agudo que forme AC con el eje X sea igual al ángulo formado con dicho eje por el trazo CB.

    Respuesta.

    $\left(\dfrac{9}{5},0\right)$