GEOMETRIA ANALITICA

Introducción

La geometría analítica es el estudio de la geometría mediante un sistema de coordenadas que lleva asociada un álgebra.

Dos problemas fundamentales:

1. Dada una ecuación dependiente de las variables x e y, dibujar su gráfica es decir representarla geométricamente como un conjunto de puntos en el plano.

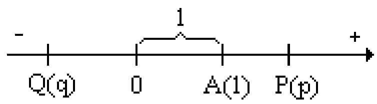
2. Dado un conjunto de puntos en el plano, relacionados por ciertas condiciones geométricas, determinar una ecuación cuya representación gráfica corresponda enteramente aquellos puntos. Este problema es conocido con el nombre de Lugar Geométrico.

Capítulo 6

Sistema Unidimensional

6.1. Sistema coordenado lineal

Sobre una recta fijamos un punto O, al cual se acostumbra a llamar origen, un sentido (de los dos que tiene esta recta) lo designaremos como positivo y el otro como negativo y sobre el definimos un segmento unidad, asi diremos que dicha recta esta metrizada (o que en ella podemos medir distancias)



Definición.

Se llama abscisa, de un punto P de una recta metrizada a la medida del segmento OP, tomando OA como unidad. Dicha medida, la consideraremos positiva cuando el sentido es acorde con el positivo y negativa en caso contrario.

Notación

A la abscisa de un punto P lo denotaremos por "p" o bien "x_p".

Nota Admitiremos que se cumple la siguiente propiedad fundamental llamado postulado de Dedekind. Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta metrizada y el conjunto de los números reales.

6.2. Relación Fundamental - Distancia

Definición.

Un segmento AB, se considera positivo cuando el sentido de A hacia B es acorde con el sentido positivo de la recta dirigida y negativo en caso contrario, así:

$$AB = -BA$$

Definición.

La suma de varios segmentos orientados consecutivos (es decir, tales que el origen de cada uno coincide con el extremo del anterior, excepto para el primero, que no tiene anterior), es el segmento orientado que tiene por origen el del primero y por extremo el del último, así:

$$AB + BC + CD = AD$$

Una consecuencia inmediata de esta definición es que: La suma de varios segmentos orientados y consecutivos, tales como el origen del primero se confunda con el extremo del último, es nula,

$$AB + BC + CA = 0$$

pues un segmento que tenga su origen y extremos coincidentes AA, tiene longitud nula.

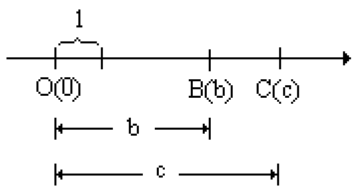
A esta última relación se conoce como la relación fundamental de MÖBIOS - CHASLES. Una consecuencia directa de la relaicón de CHASLES, es:
Sea el punto A coincidente con el origen $O(0)$ de las abscisas, se tiene entonces

$$OB + BC + CO = 0 \Longrightarrow BC = -CO - OB \text{ pero } -CO = OC$$

asi $BC = OC - OB$, ahora si representamos las abscisas de B y C sobre la recta orientada por b y c respectívamente tenemos, se tiene que

$$BC = c - b$$

Relación importante en la geometría analítica unidimensional, ya que expresa: La longitud de un segmento orientado, contenido en una recta metrizada es igual a la abscisa de su extremo (C) menos la abscisa de su origen (B).



Note que hemos dejado implícito en la notación: "$B(b)$" la abscisa del punto B es b.

6.3. Distancia

Dados los puntos $A(a)$ y $B(b)$, entonces

$$d_{AB} = |AB| = |b - a|$$

Notemos que

$$d_{AB} \geq 0, \; d_{AB} = 0 \Longleftrightarrow A = B$$

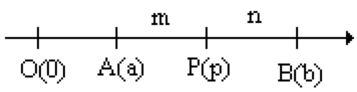
$$d_{AB} = d_{BA}$$

pues: $d_{AB} = |b - a| = | - (a - b)| = |a - b| = d_{BA}$.

6.4. División de un segmento en una razón dada

Dados los puntos: $A(a)$ y $B(b)$ tales que $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n} = \lambda$ entonces $p = \dfrac{n\,a + m\,b}{n + m}$ o bien $p = \dfrac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$

Demostración.



$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n} \Longleftrightarrow \frac{p-a}{b-p} = \frac{m}{n} \Longleftrightarrow np - na = mb - mp$$

$$\Longleftrightarrow (m+n)p = na + mb \Longleftrightarrow p = \frac{na + mb}{n + m}$$

Note que si: $\lambda = 1 \Longrightarrow p = \dfrac{a+b}{2}$ abscisa del punto medio del segmento AB

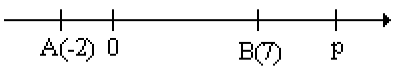
$\lambda > 0 \Longrightarrow$ puntos interiores del segmento AB

$\lambda < 0 \Longrightarrow$ puntos exteriores al segmento AB.

6.5. Ejercicios Resueltos

1. Determine la abscisa del punto P tal que $\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{1}{4}$ si $A(-2)$ y $B(7)$

   Solución.



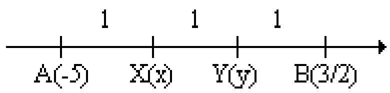
De la fórmula $p = \dfrac{na + mb}{n + m}$ se tiene

$$7 = \frac{1 \cdot X_p + 4(-2)}{1+4} \Longrightarrow 35 = X_p - 8$$

de donde $X_p = 43$

2. Dados los puntos $A(-5)$ y $B(\frac{3}{2})$, determine las abscisas de los puntos X e Y, que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

   Solución.

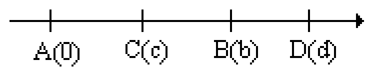
   

   De inmediato de $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2} \Longrightarrow X = \frac{2\cdot(-5)+1\cdot\frac{3}{2}}{2+1} = -\frac{17}{6}$ y de $\frac{AY}{YB} = \frac{2}{1}$ se tiene $Y = \frac{2\cdot\frac{3}{2}+1\cdot(-5)}{2+1} = -\frac{2}{3}$ luego los puntos son $X\left(-\frac{17}{6}\right)$ e $Y\left(-\frac{2}{3}\right)$

3. Se dice que 4 puntos forman un juego armónico, si los puntos C y D dividen al segmento AB; interior y exteriormente en la misma razón es decir $\dfrac{CA}{CB} = -\dfrac{DA}{DB}$ entonces demuestre que $AB = \dfrac{2\cdot AC\cdot AD}{AC+AD}$

   Demostración.

   Sea A el origen, así

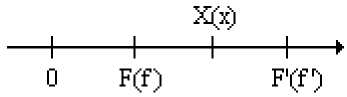
   

   $$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB} \Longleftrightarrow \frac{o-c}{b-c} = -\frac{o-d}{b-d} \Longleftrightarrow cd - bc = bd - cd$$

   de donde $b = \dfrac{2cd}{c+d} \Longleftrightarrow AB = \dfrac{2(c-o)(d-o)}{(c-o)+(d-0)} = \dfrac{2AC\ AD}{AC+BD}.$

4. Dos focos luminosos de intensidades α y α' estan situados en los puntos $F(f)$ y $F'(f')$ respectivamente. Determine el punto $X(x)$ de la recta FF', que recibe la misma iluminación de ambos focos. (Observe que, la luz recibida por un punto es directamente proporcional a la intensidad del foco emisor e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el punto y el foco).

   Solución.



   De acuerdo a la ley física, enunciada entre paréntesis tenemos

$$\frac{\alpha}{Fx^2} = \frac{\alpha'}{F'x^2} \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{(x-f)^2} = \frac{\alpha'}{(x-f')^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(x-f)^2}{\alpha} = \frac{(x-f')^2}{\alpha'} \Longleftrightarrow \frac{x-f}{\sqrt{\alpha}} = \pm\frac{x-f'}{\sqrt{\alpha'}}$$

   de donde resolviendo estas ecuaciones, una con el signo (+) y otra con el (-) se obtienen

$$x = \frac{\sqrt{\alpha'}\, f \pm \sqrt{\alpha} f'}{\sqrt{\alpha'} \pm \sqrt{\alpha}}$$

5. Si A, B, C, P y Q son puntos en un eje ordenado donde M es el punto medio entre A y B y si $\dfrac{AP}{PB} = -\dfrac{AQ}{AB}$, demuéstrese que

   a) $MA^2 = MP\, MQ$

   b) $\dfrac{1}{AP} + \dfrac{1}{AQ} = \dfrac{2}{AB}$

   Demostración.

a) M punto medio de $AB \Longleftrightarrow m = \dfrac{a+b}{2}$ y de $\dfrac{AP}{PB} = -\dfrac{AQ}{AB} \Longleftrightarrow$ $p(a+b) + q(a+b) = 2ab + 2pq$

$$\Longleftrightarrow 2pm + 2qm = 2ab + 2pq$$

$$\Longleftrightarrow pm + qm = a(2m - a) + pq$$

$$\Longleftrightarrow a^2 - 2am + m^2 = pq - pm - qm + m^2$$

$$\Longleftrightarrow (a-m)^2 = (p-m)(q-m) \Longleftrightarrow MA^2 = MP\ MQ$$

b) Análogamente de $p(a+b) + q(a+b) = 2ab + 2pq$

$$qb - qa + pb - pa - 2ab + 2a^2 = 2pq - 2pa - 2aq + 2a^2$$

$$(q-a) + (p-a)(b-a) = 2(p-a)(q-a) \Longleftrightarrow$$

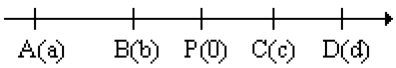
$$\frac{(q-a)+(p-a)}{(p-a)(q-a)} = \frac{2}{b-a} \Longleftrightarrow \frac{1}{q-a} + \frac{1}{p-a} = \frac{2}{b-a}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{AQ} + \frac{1}{AP} = \frac{2}{AB}$$

6. Si A, B, C y D son 4 puntos colineales y P es un punto en la misma recta tal que $PA\ PB = PC\ PD$ demuestre

$$PA \cdot BC \cdot BD = PB \cdot AC \cdot AD$$

Demostración.



Sea $P(o)$ el origen

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Longleftrightarrow (a-p)(b-p) = (c-p)(d-p)$$

$$\Longleftrightarrow ab = cd \qquad (1)$$

$$PA \cdot BC \cdot BD = (a-o)(c-b)(d-b) = a(cd - cb - bd + b^2)$$

por (1) se tiene:

$$= a(ab - cb - bd + b^2) = b(a^2 - ac - ad - ab)$$

$$= b(c-a)(d-a) = (b-o)(c-a)(d-a) = PB \cdot AC \cdot AD$$

7. Si A, B, C son tres puntos colineales y P es un punto sobre la misma recta tal que $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n}$, demuestre que

$$n(AC)^2 + m(BC)^2 = n(AP)^2 + m(BP)^2 + (n+m)(CP)^2$$

Demostración.

Eligiendo P como origen, se tiene

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n} \Longleftrightarrow p = \frac{na+mb}{n+m} \Longleftrightarrow na + mb = 0 \qquad (1)$$

luego de

$$n(AP)^2 + m(BP)^2 + (n+m)(CP)^2 = na^2 + mb^2 + (n+m)c^2$$

$$= na^2 + mb^2 + (n+m)c^2 - 2c(na+mb) \text{ por (1) esto es válido}$$

$$= n(a^2 - 2ac + c^2) + m(b^2 - 2bc + c^2) = n(AC)^2 + m(BC)^2$$

6.6. Ejercicios Propuestos

1. Dados los puntos $A(-3)$ y $B(5)$, determinar las abscisas de los puntos que dividen a AB en 4 partes iguales.

   Respuesta.

   $P_1(-1)$, $P_2(1)$ y $P_3(3)$

2. La ecuación $x^2 - 8x + 15 = 0$ (1), tiene dos soluciones $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ sobre una recta. Hallar la abscisa del punto medio del segmento P_1P_2. Si se toma como nuevo origen a este punto cual será la ecuación transformada de (1), referida a este nuevo origen.

   Respuesta.

   $4, \; {x'}^2 - 1 = 0$

3. Dados los puntos $A(-2)$, $B(4)$ y $P(1)$ ¿cuál es la razón $\dfrac{PA}{PB}$?

   Respuesta.

   P es el punto medio de AB.

4. Si los puntos A, B, C y D forman un juego armónico, demostrar que se cumple

$$2(ab + bc) - (a + b)(b + c) = 0$$

5. Dos móviles parten al mismo tiempo, de los puntos $A(a)$ y $B(b)$ moviéndose con movimiento uniforme sobre la recta AB y al encuentro el uno del otro. El primero con velocidad v y el segundo con velocidad v'.

   Encontrar la abscisa del punto en que se cruzan.

Respuesta.

$$\frac{v'a - vb}{v' - v}$$

6. Dados los segmentos AB y CD. M y N son sus puntos medios respectívamente, demuestre

$$2MN = AC + BD = AD + BC$$

7. Demostrar que si M es el punto medio de AB y P es un punto cualquiera de la recta que contiene a A y a B, se tiene

$$PA \cdot PB = (PM)^2 - (MA)^2$$

8. Si P y Q dividen a AB armónicamente, determine la abscisa de Q en términos de a, b y t dado que $A(a)$ y $B(b)$ y se verifica $\dfrac{AP}{AB} = t$.

   Respuesta.

   $$q = \frac{t(a+b) - a}{2t - 1}$$

9. Que condición deben cumplir los coeficientes de las ecuaciones

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \wedge \ a'x^2 + b'x^2 + c' = 0$$

   para que las raíces de la primera y las de la segunda correspondan a puntos de un juego armónico.

   Respuesta.

   $2(ac' - a'c) = bb'$

10. Un movil P parte del origen en el sentido positivo de una recta orientada, con una velocidad de $30\,Km/h$. Una hora después parte otro

móvil del punto $Q(500)$ en el sentido opuesto de la recta con una velocidad de $40\,Km/h$. Determinar la abscisa del punto del encuentro y el instante de dicho encuentro a partir del momento de partida del primer movil . Unidades de la recta en Km.

Respuesta.

371.42 Km   7.71 hr.

11. Un movil parte del punto $A(-5)$, en el sentido positivo y con una velocidad de $50\,Km/h$. Otro movil parte de $B(5)$ en el mismo sentido y con una velocidad de $48\,Km/h$. Hallar la abscisa del punto de encuentro y el instante del encuentro a partir del momento de partida de los dos móviles. Unidades de la recta en Km.

    Respuesta.

    245Km; 5 hr.

12. Si A y B son puntos fijos sobre una recta y K una constante dada, demostrar que existen dos, uno o ningún puntos P que satisfagan la relación

$$(PA)^2 + (PB)^2 = K(AB)^2$$

según si K es mayor, igual o menor que $\frac{1}{2}$.

13. Dados los puntos $A(a)$ y $B(b)$ sobre una recta, encontrar las abscisas de P y Q tales que

$$\frac{1}{2}PA = AB = \frac{1}{3}BQ$$

Respuesta.

$p = 3a - 3b;\ q = 4b - 3a$