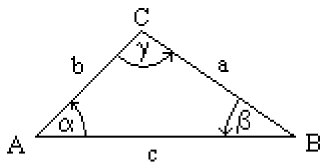
Capítulo 5

Triángulos

Hemos trabajado con el triángulo rectángulo en general ahora estudiaremos un triángulo cualquiera y sus relaciones más importantes.

5.1. Relaciones elementales

Dado el triángulo ABC, que se muestra en la figura



las medidas de sus ángulos las denotaremos por: a, b y c sus ángulos por α, β y γ; α correspondiente al vértice A, β al vértice B y γ al vértice C. $(a, b \, \text{y} \, c > 0)$

En todo triángulo se tiene que:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \qquad (1)$$

y que: $a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b$ tambien que a ángulo mayor se opone lado mayor y a ángulo menor se opone el lado menor. $(a<b \Longleftrightarrow \alpha<\beta)$ α, β y γ se llaman ángulos interiores del triángulo.

De la relación (1), recordamos que se deduce que un triángulo es posible que tenga sus tres ángulos agudos (acutángulo), dos agudos y uno recto (rectángulo) y un ángulo obtuso y dos agudos (obtusángulo).

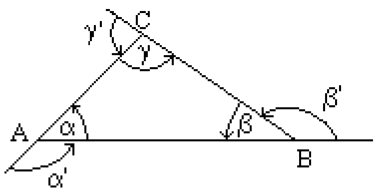
Tambien de (1) se deduce que

$$0<\alpha<\pi,\ 0<\beta<\pi,\ 0<\gamma<\pi$$

y por tanto: $sen\,\alpha>0$, $sen\,\beta>0$ y $sen\,\gamma>0$

ángulos exteriores

Dado el triángulo de la figura



α', β' y γ' se llaman ángulos exteriores y es fácil notar que

$$\alpha+\alpha'=\pi,\ \beta+\beta'=\pi \quad \text{y} \quad \gamma+\gamma'=\pi$$

$$\alpha'=\beta+\gamma,\ \beta'=\alpha+\gamma \quad \text{y} \quad \gamma'=\alpha+\beta$$

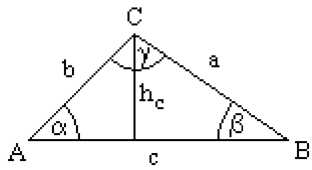
$$\text{y} \qquad \alpha'+\beta'+\gamma'=360^\circ$$

5.2. Teorema del seno

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}$$

Demostración.

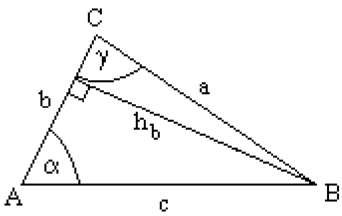
Sea el $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo como se muestra en la figura



Sea h_C la altura trazada desde el vértice C, así

$$\left.\begin{array}{l} sen\,\alpha = \dfrac{h_C}{b} \\ \\ sen\,\beta = \dfrac{h_C}{a} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} \qquad (1)$$

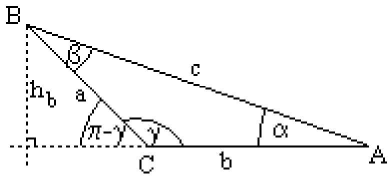
análogamente para la altura h_B, se obtiene:



$$\left.\begin{array}{l} sen\,\alpha = \dfrac{h_B}{c} \\ \\ sen\,\gamma = \dfrac{h_B}{a} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{c}{sen\,\gamma} \qquad (2)$$

por tanto de (1) y (2) se tiene: $\dfrac{a}{sen\,\alpha} = \dfrac{b}{sen\,\beta} = \dfrac{c}{sen\,\gamma}$

En caso que el $\triangle ABC$ sea obtusángulo,

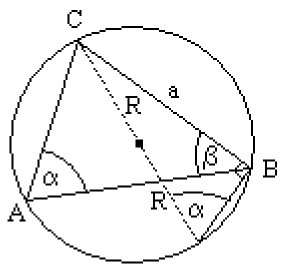


$$\left.\begin{array}{l} sen\,\alpha = \dfrac{a}{sen\,\alpha} = \dfrac{h_B}{c} \\ sen(\pi-\gamma) = \dfrac{h_B}{a} \end{array}\right\} \text{como } sen(\pi-\gamma) = sen\,\gamma \Rightarrow \frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{c}{sen\,\gamma}$$

análogamente si se toma la altura h_C, asi

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}$$

probaremos ahora que esta igualdad es igual a 2 veces el radio de la circunferencia circunscrita al $\triangle$, asi



En $\triangle$ rectángulo BDC, $sen\,\alpha = \dfrac{a}{2R} \Longrightarrow \dfrac{a}{sen\,\alpha} = 2R$ siendo R el radio de la circunferencia circunscrita al $\triangle$, análogamente si el $\triangle$ es obtusángulo.

Por último notemos que si el $\triangle$ es rectángulo en C $\gamma = 90° \Longrightarrow sen\,\alpha = \dfrac{a}{c} \wedge sen\,\beta = \dfrac{b}{c}$ que son las razones trigonométricas definidas para el caso de un $\triangle$ rectángulo.

En resumen

$$\frac{a}{sen\,\alpha}=\frac{b}{sen\,\beta}=\frac{c}{sen\,\gamma}=2R$$

es el teorema del seno.

5.3. Teorema de las proyecciones

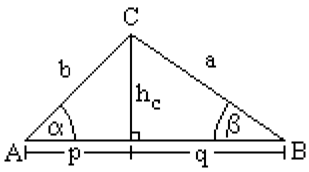
$$a=b\cos\gamma+c\cos\beta$$

$$b=c\cos\alpha+a\cos\gamma$$

$$c=a\cos\beta+b\cos\alpha$$

Demostración.

Sea el triángulo acutángulo de la figura

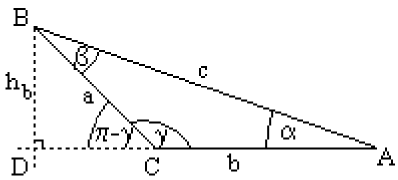


$$\cos\alpha=\frac{p}{b}$$

$$\cos\beta=\frac{q}{a}$$

$c=p+q=b\cos\alpha+a\cos\beta$, análogamente para a y b.

Si el $\triangle$ es obtusángulo, se tiene



De la figura

$$AC=AD-DC$$

$$b=c\cos\alpha-a\cos(\pi-\gamma)$$

$$b=c\cos\alpha+a\cos\gamma$$

análogamente para a y c.

5.4. Teorema del coseno

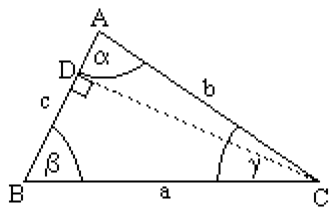
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,cos\,\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\,cos\,\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,cos\,\gamma$$

Demostración.

Sea el triángulo acutángulo ABC, de la figura



$$a^2 = BD^2 + DC^2$$

$$a^2 = (c - b\,cos\,\alpha)^2 + b^2 sen^2\alpha$$

$$a^2 = c^2 - 2\,bc\,cos\,\alpha + b^2 cos^2\,\alpha + b^2 sen^2\alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,cos\,\alpha$$

análogamente para b^2 y c^2. Ahora ud. puede demostrarlo para el caso de un triángulo obtusángulo.

5.5. Equivalencia

Los sistemas:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \;\wedge\; \text{el teorema del seno} \tag{1}$$

$$\text{Teorema de las proyecciones} \tag{2}$$

Teorema del coseno (3)

se dicen equivalentes, es decir cada uno de los tres es un sistema fundamental, es decir de (1) se deduce (2) de (2) se deduce (3) y por tanto de (3) se deduce (1) ud. a modo de ejercicio verifique estas implicaciones.

5.6. Fórmulas de Briggs

$$sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad sen\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \quad sen\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \quad cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

donde $s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$

Demostración.

$$0 < \alpha < \pi \Longleftrightarrow 0 < \tfrac{\alpha}{2} < \tfrac{\pi}{2} \Longrightarrow$$

$$sen\tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\tfrac{1-cos\,\alpha}{2}} \quad cos\tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\tfrac{1+cos\,\alpha}{2}}$$

pero el teorema del coseno $cos\,\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ y como $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, resultan

$$sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \text{ y } cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

análogamente para los otros casos, note también que:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \text{ etc...}$$

es fácil verificar que $s-a$, $s-b$ y $s-c$ son siempre positivos.

De las anteriores fórmulas, es fácil obtener

$$sen\,\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ \text{etc...}$$

5.7. Fórmulas de las tangentes

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\frac{\alpha-\beta}{2}};\ \frac{b+c}{b-c} = \frac{tg\frac{\beta+\gamma}{2}}{tg\frac{\beta-\gamma}{2}};\ \frac{c+a}{c-a} = \frac{tg\frac{\gamma+\alpha}{2}}{tg\frac{\gamma-\alpha}{2}}$$

Demostración.

Del teorema del seno $\dfrac{a}{b} = \dfrac{sen\,\alpha}{sen\,\beta}$

$$\Longrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{sen\,\alpha + sen\,\beta}{sen\,\alpha - sen\,\beta} = \frac{2sen\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2cos\frac{\alpha+\beta}{2}sen\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

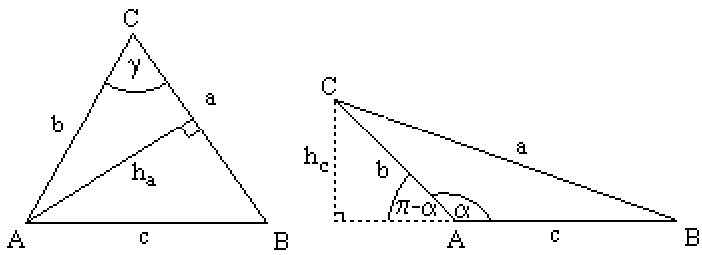
5.8. Area de un triángulo

De la geometría elemental recordemos

$$A = \frac{1}{2}\,a\,h_A = \frac{1}{2}b\,h_B = \frac{1}{2}\,h_C$$

a) Dos lados y ángulo comprendido,

$$A = \frac{1}{2}\,ab\,sen\,\gamma = \frac{1}{2}\,bc\,sen\,\alpha = \frac{1}{2}\,ca\,sen\,\beta$$



$A = \frac{1}{2}\, a h_A,$ pero $sen\,\gamma = \frac{h_A}{b} \Longrightarrow h_A = b\, sen\,\gamma \Longrightarrow$

$A = \frac{1}{2}\, ab\, sen\,\gamma$

$A = \frac{1}{2}\, c\, h_C,$ de la fig (2) $sen(\pi - \alpha) = \frac{h_C}{b} \Longrightarrow h_C = b\, sen\,\alpha$

$\Longrightarrow A = \frac{1}{2}\, cb\, sen\,\alpha.$

b) Tres lados (Fórmula de Herón)

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Demostración.

De Briggs y como

$sen\,\alpha = 2\, sen\frac{\alpha}{2}\, cos\frac{\alpha}{2} \Longrightarrow$

$sen\,\alpha = 2\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}\,\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}} = \dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

y como $A = \dfrac{1}{2}\, bc\, sen\,\alpha = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

c) Un lado y dos ángulos

$$A = \frac{1}{2} b^2\, \frac{sen\,\alpha\ sen\,\gamma}{sen(\alpha+\gamma)}$$

Demostración.

Del Teorema del seno $c = \frac{b\, sen\,\gamma}{sen\,\beta} = \frac{b\, sen\,\gamma}{sen(\alpha+\gamma)}$ y como $A = \frac{1}{2}\, bc\, sen\,\alpha = \frac{1}{2} b^2 \frac{sen\,\alpha\ sen\,\gamma}{sen(\alpha+\gamma)}$

d) Otras fórmulas

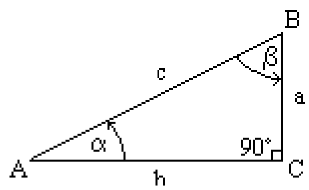
Del Teorema del seno $\begin{array}{l} b = 2\,R\,sen\beta \\ \\ c = 2\,R\,sen\gamma \end{array}$ y como

$A = \dfrac{1}{2}\,bc\,sen\,\alpha = \dfrac{1}{2}4R^2\,sen\,\alpha\;sen\,\beta\;sen\,\gamma \Longrightarrow$
$A = 2R^2\,sen\,\alpha\;$ sen $\beta\;sen\,\gamma$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, de aquí como $sen\,\alpha = \dfrac{a}{2R}$, $sen\,\beta = \dfrac{b}{2R}$ y $sen\,\gamma = \dfrac{c}{2R}$ entonces $A = \dfrac{abc}{4R}$

5.9. Resolución de triángulos

Triángulos rectángulos

Dado el triángulo rectángulo, de la figura $\gamma = 90°$ se conoce



Caso I Dados dos catetos, hallar la hipotenusa y los dos ángulos agudos

$$\text{De } tg\,\alpha = \frac{a}{b} \text{ se obtiene } \alpha$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$c = a\,sen\,\alpha \text{ o bien } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Caso II Dados la hipotenusa y un cateto, hallar el otro cateto y los ángulos agudos

Dados c y a

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$sen\,\alpha = \frac{a}{c} \text{ y } \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

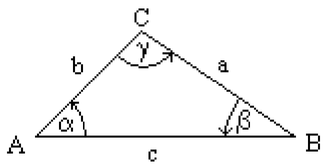
Caso III Dados un cateto y un ángulo agudo, hallar la hipotenusa, el otro cateto y el otro ángulo

Dados a y α

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$b = a\,cotg\,\alpha \;\wedge\; c = a\,cosec\,\alpha$$

Triángulos cualesquiera.



Caso I Dados los tres lados.

Por medio del teorema del coseno, se hallan α y β es decir $cos\,\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ y $cos\,\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ de aquí $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.

Nótese que para que exista el $\triangle$ debe cumplirse

$$a + b > c;\; b + c > a;\; c + a > b$$

Caso II Dados dos lados y el ángulo comprendido

Sean dados: a, b y γ

c se determina mediante: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,\gamma}$ y $cos\,\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Longrightarrow$ $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$

También se puede resolver mediante:

$\alpha + \beta$ conocido, supongamos $a > b$, por medio de: $tg\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right) = \dfrac{a-b}{a+b}\,cotg\dfrac{\gamma}{2}$ se calcula $\alpha - \beta$ por tanto se conocen α y β; para c, mediante: $c = a\dfrac{sen\,\gamma}{sen\,\alpha}$

Caso III Dados dos ángulos y un lado

Dados: a, β y $\gamma,\ \beta + \gamma < 180°$

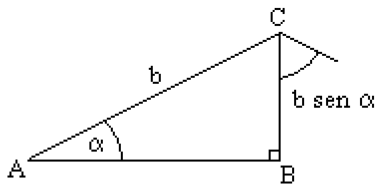
$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma),\ c = a\frac{sen\,\gamma}{se,\ \alpha}\ \wedge\ b = \frac{sen\,\beta}{sen\,\alpha}$$

Caso IV Dados dos lados y ángulo opuesto a uno de ellos

Dados: a, b y $\alpha,$ se determina β mediante

$$sen\,\beta = \frac{b}{a}\,sen\,\alpha$$

1. Si $a < b\,sen\,\alpha \Longrightarrow \dfrac{bsen\,\alpha}{a} > 1 \Longrightarrow sen\,\beta > 1$, lo que no es posible, en este caso no hay solución ver fig. 1



No es posible construir un triángulo con $a < b\,sen\,\alpha$

Fig. 1

2. Si $a = b\,sen\,\alpha \Longrightarrow \dfrac{bsen\,\alpha}{a} = 1 \Longrightarrow sen\,\beta = 1 \Longrightarrow \beta = 90°$

en este caso el triángulo es rectángulo y hay una solución, ver fig. 2

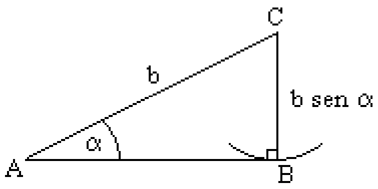


fig 2

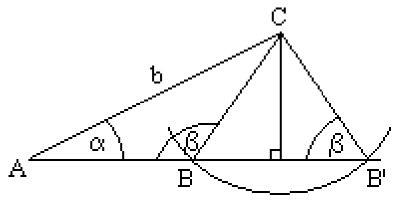


fig 3

3. Si $a > b\,sen\,\alpha \Longrightarrow sen\,\beta < 1$, hay dos valores para β, uno que es un ángulo agudo y el otro obtuso estos ángulos son suplementarios.

   a) Si $a < b \Longrightarrow \alpha < \beta$, entonces α no puede ser obtuso por tanto β puede ser agudo o bien obtuso (dos soluciones). En este caso se conoce como el caso ambiguo, ver fig. 3 (triángulos ABC o $AB'C$

   b) Si $a = b \Longrightarrow \alpha = \beta, \beta$ no puede se obtuso luego hay una solución y triángulo es isósceles, ver fig. 4

   Si $a > b \Longrightarrow \alpha > \beta, \beta$ no puede ser obtuso, luego también hay una sola solución, ver fig. 5

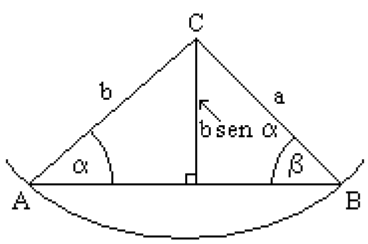


fig 4

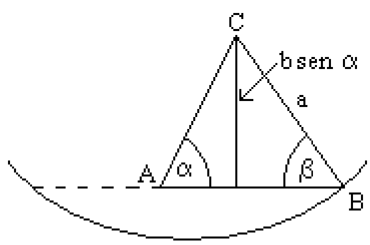


fig 5

Note que si $a > b$ la solución para $\beta > 90°$ es imposible, por no cumplir con los datos dados.

5.10. Ejercicios resueltos

1. Demuestre que todo triángulo se verifican:

   a) $c(a\cos\beta - b\cos\alpha) = a^2 - b^2$

   b) $b(cotg\,\alpha + cotg\,\beta) = c\,cosec\,\alpha$

   c) $\dfrac{\cos\beta + \cos\gamma}{2\,sen^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{b+c}{a}$

   d) $\dfrac{sen(\gamma-\alpha)}{sen(\gamma-\beta)} = \dfrac{a}{b}\dfrac{(c^2-a^2)}{(c^2-b^2)}$

   e) $b\,sen^2\dfrac{\gamma}{2} + c\,sen^2\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{2}(b+c-a)$

   f) $a\cos\alpha + c\cos\gamma = b\cos(\alpha-\gamma)$

   g) $\dfrac{c+a}{c-a}\,tg\dfrac{\beta}{2} = tg\,\dfrac{1}{2}(2\,\alpha+\beta)$

   h) $tg\,\alpha\;cotg\,\beta = \dfrac{a^2-b^2+c^2}{c^2+b^2-a^2}$

   i) $\dfrac{(\cos\alpha+\cos\beta)(2\cos\gamma+1)}{1+\cos\gamma-2\cos^2\gamma} = \dfrac{a+b}{c}$

   j) $b^2(\cos\beta + \cos\alpha\,\cos\gamma) = ac\,sen^2\,\beta$

   Demostración.

   a)
   $$c(a\cos\beta - b\cos\alpha) = ac\cos\alpha) = ac\cos\beta - bc\cos\alpha$$
   $$= a(a - b\cos\gamma) - b(b - a\cos\gamma)$$
   $$= a^2 - ab\cos\gamma - b^2 + ab\cos\gamma = a^2 - b^2$$

   b)

$$b(cotg\,\alpha + cotg\,\beta) = b\tfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} + b\tfrac{cos\,\beta}{sen\,\beta}$$

$$= \tfrac{c-a\,cos\,\beta}{sen\,\alpha} + \tfrac{b\,cos\,\beta}{sen\,\beta} = \tfrac{c}{sen\,\alpha} - \tfrac{a\,cos\,\beta}{sen\,\alpha} + \tfrac{b\,cos\,\beta}{sen\,\beta}$$

$$= \tfrac{c}{sen\,\alpha} - cos\,\beta\left(\tfrac{a}{sen\,\alpha} - \tfrac{b}{sen\,\beta}\right) = \tfrac{c}{sen\,\alpha} = c\;cosec\,\alpha$$

c)

$$\tfrac{cos\,\alpha+cos\,\beta}{2\,sen^2\frac{\gamma}{2}} = \tfrac{2\,cos\frac{\alpha+\beta}{2}\;cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\,sen^2\frac{\gamma}{2}} = \tfrac{sen\frac{\gamma}{2}\;cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{sen^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$= \tfrac{2\,cos\frac{\gamma}{2}\;cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\,sen\frac{\gamma}{2}\;cos\frac{\gamma}{2}} = \tfrac{2\,sen\frac{\alpha+\beta}{2}\;cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{sen\,\gamma}$$

$$= \tfrac{sen\,\alpha+\text{sen}\;\beta}{sen\,\gamma} = \tfrac{sen\,\alpha}{sen\,\gamma} + \tfrac{sen\,\beta}{sen\,\gamma} = \tfrac{a+b}{c}$$

d)

$$\tfrac{sen(\gamma-\alpha)}{sen(\gamma-\beta)} = \tfrac{sen\,\gamma\;cos\,\alpha-sen\,\alpha\;cos\,\gamma}{sen\,\gamma\;\cos\,\beta-sen\,\beta\;cos\,\gamma}$$

$$= \tfrac{sen\,\alpha}{sen\,\beta}\,\tfrac{\left(\frac{sen\,\gamma}{sen\,\alpha}\;cos\,\alpha-cos\,\gamma\right)}{\left(\frac{sen\,\gamma}{sen\,\beta}\;cos\,\beta-cos\,\gamma\right)} = \tfrac{a}{b}\;\tfrac{\frac{c}{a}\;cos\,\alpha-cos\,\gamma}{\frac{c}{b}\;cos\,\beta-cos\,\gamma}$$

$$= \tfrac{c\,cos\,\alpha-a\,cos\,\gamma}{c\,cos\,\beta-b\,cos\,\gamma} = \tfrac{b-a\,cos\,\gamma-a\,cos\,\gamma}{a-b\,cos\,\gamma-b\,cos\,\gamma}$$

$$= \tfrac{b-2a\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}{a-2b\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)} = \tfrac{a}{b}\,\tfrac{(c^2-a^2)}{(c^2-b^2)}$$

e)

$$b\,sen^2\tfrac{\gamma}{2} + c\,sen^2\tfrac{\beta}{2} = b\left(\tfrac{1-cos\,\gamma}{2}\right) + c\left(\tfrac{1-cos\,\beta}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(b + c - (b\,cos\,\gamma + c\,cos\,\beta)) = \tfrac{1}{2}(b + c - a)$$

f) Por el teorema de las proyecciones

$$b\,cos\,\alpha = c - a\,cos\,\beta$$

$$b\,cos\,\gamma = a - c\,cos\,\beta$$

multiplicando miembro a miembro

$$b^2\,cos\,\alpha\;cos\,\gamma = ac - (a^2 + c^2)cos\beta + ac\,cos^2\,\beta \qquad (1)$$

por otra parte del Teorema del seno, se tiene

$$b\,sen\,\alpha = a\,sen\,\beta \;\wedge\; b\,sen\,\gamma = c\,sen\,\beta$$

de donde $\quad b^2 sen\,\alpha\; sen\,\gamma = ac\,sen^2\,\beta$ sumando con (1)

$$b^2(cos\,\alpha\; cos\,\gamma + sen\,\alpha\; sen\,\gamma) = 2ac - (a^2+c^2)cos\,\beta$$

$$b\,cos(\alpha-\gamma) = \frac{1}{b}(2ac - (a^2+c^2)cos\,\beta) \tag{2}$$

ahora, nuevamente del Teorema de las proyecciones

$$ac = bc\,cos\,\gamma + c^2\,cos\,\beta$$

$$ac = a^2 cos\,\beta + ab\,cos\,\alpha$$

sumando y ordenando y

$$2ac - (a^2+c^2)cos\,\beta = b(c\,cos\,\gamma + a\,cos\,\alpha) \text{ en} \tag{2}$$

$$b\,cos(\alpha-\gamma) = c\,cos\,\gamma + a\,cos\,\alpha.$$

$g)$ Por el teorema de las tangentes se tiene

$\frac{c+a}{c-a} = \frac{tg\,\frac{\gamma+\alpha}{2}}{tg\,\frac{\gamma-\alpha}{2}} = \frac{tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{tg\,\frac{\gamma-\alpha}{2}}$ de aquí

$\frac{c+a}{c-a}\,tg\frac{\beta}{2} = \frac{cotg\,\frac{\beta}{2}\cdot tg\,\frac{\beta}{2}}{tg\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)} = cotg\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) = tg\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

$= tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)$ pero $\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$

$= tg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = tg\frac{1}{2}(2\alpha+\beta)$

$h)$

$\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2} = \frac{2ac\,cos\,\beta}{2bc\,cos\,\alpha} = \frac{a}{b}\frac{cos\,\beta}{cos\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha\,cos\,\beta}{sen\,\beta\,cos\,\alpha}$

$= tg\,\alpha\cdot cotg\,\beta$

i)

$$\frac{(cos\,\alpha+cos\,\beta)(2cos\,\gamma+1)}{1+cos\,\gamma-2\,cos^2\gamma} = \frac{2\,cos\,\frac{\alpha+\beta}{2}\;cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}\;(2cos\,\gamma+1)}{(2\,cos\,\gamma+1)(1-cos\,\gamma)}$$

$$= \frac{2\,sen\,\frac{\gamma}{2}\;cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\,sen^2\,\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\,cos\,\frac{\gamma}{2}\;cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\;sen\,\frac{\gamma}{2}\;cos\,\frac{\gamma}{2}}$$

$$= \frac{2\,sen\,\frac{\alpha+\beta}{2}\;cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{sen\,\gamma} = \frac{sen\,\alpha+sen\,\beta}{sen\,\gamma} = \frac{a+b}{c}$$

j)

$$b^2(cos\,\beta + cos\,\alpha\;cos\,\gamma) = b^2\left(cos\,\beta + \tfrac{1}{2}\{cos(\alpha+\gamma) + cos(\alpha-\gamma)\}\right)$$

$$= b^2\left(cos\,\beta + \tfrac{1}{2}\{cos(\pi-\beta) + cos(\alpha-\gamma)\}\right)$$

$$= \tfrac{b^2}{2}(cos\,\beta + cos(\alpha-\gamma))$$

$$= \tfrac{b^2}{2}\,2\,cos\tfrac{\beta+\alpha-\gamma}{2}\;cos\tfrac{\beta-\alpha+\gamma}{2}$$

$$= b^2\;cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\gamma\right)\;cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$= b^2\;sen\,\gamma\;sen\,\alpha = bsen\,\gamma\cdot bsen\,\alpha$$

$$= c\,sen\,\beta\cdot a\,sen\,\beta = ac\,sen^2\beta.$$

2. Si en un triángulo $tg\,\alpha,\;tg\,\beta,\;tg\,\gamma$ estan en progresión armónica, demuéstrese que a^2, b^2, c^2 están en progresión aritmética.

Demostración.

$tg\,\alpha$, $tg\,\beta$, $tg\,\gamma$ en P.H. $\Longleftrightarrow$

$\frac{1}{tg\,\alpha}, \frac{1}{tg\,\beta}, \frac{1}{tg\,\gamma}$ estan en progresión aritmética y de aquí

$cotg\,\alpha, cotg\,\beta, cotg\,\gamma$ en P.A.

$\iff 2\,cotg\,\beta = cotg\,\alpha + cotg\,\gamma$

$2\frac{cos\,\beta}{sen\,\beta} = \frac{cos\,\alpha\; sen\,\gamma + sen\,\alpha\; cos\,\gamma}{sen\,\alpha\; sen\,\gamma} = \frac{sen(\gamma+\alpha)}{sen\,\alpha\; sen\,\gamma}$
$\iff 2\frac{cos\,\beta}{sen\,\beta} = \frac{sen\,\beta}{sen\,\alpha\; sen\,\gamma} \iff 2\,cos\,\beta = \frac{sen\,\beta}{sen\,\alpha} \cdot \frac{sen\,\beta}{sen\,\gamma}$

pero el Teorema del seno y coseno se tiene:

$\frac{a^2+c^2-b^2}{ac} = \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{c} \iff b^2 - a^2 = c^2 - b^2$

$\Longrightarrow a^2, b^2$ y c^2 están en progresión aritmética.

3. En un $\triangle$ si $\alpha = 45°$, demuéstrese que

$$cotg\,\beta + cotg\,\gamma + cotg\,\beta\; cotg\,\gamma = 1$$

Demostración.

$cotg\,\beta + cotg\,\gamma + cotg\,\beta\; cotg\,\gamma = \frac{sen\,\gamma\; cos\,\beta + sen\,\beta\; cos\,\gamma}{sen\,\beta\; sen\,\gamma} + \frac{cos\,\beta\; cos\,\gamma}{sen\,\beta\; sen\,\gamma}$

$= 1 + \frac{sen(\gamma+\beta)}{sen\,\beta\; sen\,\gamma} + \frac{cos\,\beta\; cos\,\gamma - sen\,\beta\; sen\,\gamma}{sen\,\beta\; sen\,\gamma};\ \gamma + \beta = \pi - \alpha$

$= 1 + \frac{sen\,\alpha}{sen\,\beta\; sen\,\gamma} + \frac{cos(\beta+\gamma)}{sen\,\beta\; sen\,\gamma} = 1 + \frac{sen\,\alpha}{sen\,\beta\; sen\,\gamma} + \frac{-cos\alpha}{sen\beta\; sen\,\gamma}$

pero: $\alpha = 45°$ y como $sen\,45° = cos\,45°$, entonces resulta lo pedido.

Una solución alternativa resulta de: $\beta + \gamma = 135°$ y aplicar cotagente.

4. Si en un triángulo se verifica

$$\frac{sen(\gamma-\beta)}{sen(\gamma+\beta)} = \frac{c^2-b^2}{c^2+b^2}$$

demuestre que el triángulo es isósceles o rectángulo.

Demostración.

$\gamma+\beta=\pi-\alpha \Longrightarrow sen(\gamma+\beta)=sen\,\alpha,$ así

$\frac{sen\,\gamma\,cos\,\beta-sen\,\beta\,cos\,\gamma}{sen\,\alpha}=\frac{c^2-b^2}{c^2+b^2}$

$\frac{sen\,\gamma}{sen\,\alpha}\,cos\,\beta-\frac{sen\,\beta}{sen\,\alpha}\cdot cos\,\gamma=\frac{c^2-b^2}{c^2+b^2}$

$\frac{c}{a}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)-\frac{b}{a}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=\frac{c^2-b^2}{c^2+b^2}$

de aquí se llega a: $\frac{c^2-b^2}{a^2}=\frac{c^2-b^2}{c^2+b^2}$

Si $b=c$ la relación se cumple y el $\triangle$ es isósceles.

Si $b\neq c \Longrightarrow c^2+b^2=a^2$ y el $\triangle$ es rectángulo.

5. En un triángulo si $tg\,\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{a}{b+c}$, demuestre que el triángulo es rectángulo.

Demostración.

$\frac{sen\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{sen\,\alpha}{sen\,\beta+sen\,\gamma}\Longleftrightarrow$

$\frac{sen\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\,sen\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\alpha}{2}}{2sen\frac{\beta+\gamma}{2}\,cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$ pero $sen\frac{\beta+\gamma}{2}=sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$

$sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\,cos\frac{\beta-\gamma}{2}=cos^2\frac{\alpha}{2}$

$cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta-\gamma}{2}=cos^2\frac{\alpha}{2}\Longleftrightarrow cos\frac{\beta-\gamma}{2}=cos\frac{\alpha}{2}$

de donde $\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\alpha}{2}\Longleftrightarrow \alpha=\beta-\gamma$ pero $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

$\pi-\beta-\gamma=\beta-\gamma\Longrightarrow \beta=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow$ el $\triangle$ es rectángulo.

6. Demuestre que en todo triángulo si

$$sen\,\beta\ sec(\gamma-\alpha) = cotg\,\alpha - tg(\gamma-\alpha)$$

el triángulo es rectángulo.

Demostración.

$\frac{sen\,\beta}{cos(\gamma-\alpha)} = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} - \frac{sen(\gamma-\alpha)}{cos(\gamma-\alpha)} \frac{sen\,\beta+sen(\gamma-\alpha)}{cos(\gamma-\alpha)} = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} \Longrightarrow$

$$\frac{2\,sen\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\ cos\frac{\beta-\gamma+\alpha}{2}}{cos(\gamma-\alpha)} = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} \frac{2\,sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\ cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}{cos(\gamma-\alpha)} = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$$

$2\,sen\,\gamma\ sen\,\alpha = cos(\gamma-\alpha) 2\,sen\,\gamma\ sen\,\alpha = cos\,\gamma\ cos\,\alpha + sen\,\gamma\ sen\,\alpha$

$\Longrightarrow cos\,\gamma\ cos\,\alpha - sen\,\gamma\ sen\,\alpha = 0 \Longleftrightarrow cos(\gamma+\alpha) = 0$

de aquí $\gamma + \alpha = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$ el triángulo es rectángulo.

7. Demostrar que si en un triángulo ABC se cumple que

$$\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 \quad \text{y} \quad sen\,\beta\ sen\,\gamma = \frac{3}{4}$$

entonces el triángulo es equilátero.

Demostración.

De $\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 \Longleftrightarrow b^3+c^3 = a^2(b+c)$

$(b+c)(b^2-bc+c^2) = a^2(b+c)$ pero $b+c>0$

$b^2+c^2-a^2 = bc$ por el Teorema del coseno se tiene

$2\,bc\,cos\,\alpha = bc \Longrightarrow cos\,\alpha = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

De $sen\,\beta\; sen\,\gamma = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow -\frac{1}{2}[cos(\beta+\gamma) - cos(\beta-\gamma)] = \frac{3}{4}$

$cos(\beta-\gamma) - cos(\pi-\alpha) = \frac{3}{2} \Longleftrightarrow cos(\beta-\gamma) + cos\,\alpha = \frac{3}{2}$

$cos(\beta-\gamma) = 1 \Longleftrightarrow \beta-\gamma = 0 \Longleftrightarrow \beta = \gamma$ y como $\alpha+\beta+\gamma = \pi$

$\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow$ el triángulo es equilátero.

8. Demuestre que en cualquier triángulo

$$\frac{b^2-c^2}{cos\,\beta + cos\,\gamma} + \frac{c^2-a^2}{cos\,\gamma + cos\,\alpha} + \frac{a^2-b^2}{cos\,\alpha + cos\,\beta} = 0$$

Demostración.

Por el Teorema del seno $\begin{array}{l} b = k\,sen\,\beta \\ c = k\,sen\,\gamma, k \text{ cte.} \end{array}$

$\frac{b^2-c^2}{cos\,\beta+cos\,\gamma} = \frac{k^2(sen^2\beta - sen^2\gamma)}{cos\,\beta+cos\,\gamma} = \frac{k^2(cos^2\gamma - cos^2\beta)}{cos\,\beta+cos\,\gamma}$

$= k^2(cos\,\gamma - cos\,\beta),$ análogamente

$\frac{c^2-a^2}{cos\,\gamma+cos\,\alpha} = k^2(cos\,\alpha - cos\,\gamma)$ y $\frac{a^2-b^2}{cos\,\alpha+cos\,\beta} = k^2(cos\,\beta - cos\,\alpha)$

luego

$\frac{b^2-c^2}{cos\,\beta+cos\,\gamma} + \frac{c^2-a^2}{cos\,\gamma+cos\,\alpha} + \frac{a^2-b^2}{cos\,\alpha+cos\,\beta} =$

$k^2(cos\,\gamma - cos\,\beta + cos\,\alpha - cos\,\gamma + cos\,\beta - cos\,\alpha) = 0$

9. Si los lados de un $\triangle$ rectángulo son

$$cos\,2\alpha + cos\,2\beta + 2\,cos(\alpha+\beta) \text{ y } sen\,2\alpha + sen\,2\beta + 2sen(\alpha+\beta)$$

demuestre que la hipotenusa es $4\,cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

Demostración.

$cos\,2\alpha + cos\,2\beta + 2\,cos(\alpha+\beta) =$

$2\,cos(\alpha+\beta)\;cos(\alpha-\beta) + 2\,cos(\alpha+\beta)$

$= 2\,cos(\alpha+\beta)(cos(\alpha-\beta)+1)$ por otra parte;

$sen\,2\alpha + sen\,2\beta + 2\,sen(\alpha+\beta) =$

$= 2\,sen(\alpha+\beta)\;cos(\alpha-\beta) + 2sen(\alpha+\beta)$

$= 2\,sen(\alpha+\beta)(cos(\alpha-\beta)+1),$ ahora por Pitágoras

$4(cos(\alpha-\beta)+1)^2(cos^2(\alpha+\beta)+sen^2(\alpha+\beta)) = 4(cos(\alpha-\beta)+1)^2$

la hipotenusa es la raíz cuadrada de esta última expresión es decir:

$$2(cos(\alpha-\beta)+1) = 4\,cos^2\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

10. Demostrar que en todo triángulo se verifica

$$\frac{a^2sen(\beta-\gamma)}{sen\,\alpha} + \frac{b^2sen(\gamma-\alpha)}{sen\,\beta} + \frac{c^2sen(\alpha-\beta}{sen\,\gamma} = 0$$

Demostración.

$\frac{a}{sen\,\alpha}\;asen(\beta-\gamma) + \frac{b}{sen\,\beta}\,bsen(\gamma-\alpha) + \frac{c}{sen\,\gamma}\;sen(\alpha-\beta) =$

pero $\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma} = K,$ entonces

$K[a\,sen\,\beta\;cos\,\gamma - a\,sen\,\gamma\;cos\,\beta + b\,sen\,\gamma\;cos\,\alpha - b\,sen\,\alpha\;cos\,\gamma$

$+c\,sen\,\alpha\;cos\,\beta - c\,sen\,\beta\;cos\,\alpha]$

pero nuevamente por el Teorema del seno la expresión entre paréntesis se anula.

11. Demuestre que si en un triángulo se cumple

$$cos\,\alpha + cos\beta = \frac{a+b}{2c} \text{ entonces } \gamma = 60^\circ$$

Demostración.

$cos\,\alpha + cos\,\beta = \frac{a+b}{2c}$

$2\,cos\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{sen\,\alpha+sen\,\beta}{2\,sen\,\gamma}$, pero $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$

$2\,sen\frac{\gamma}{2}\,cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2\,sen\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\,sen\,\gamma}$

$sen\frac{\gamma}{2} = \frac{cos\frac{\gamma}{2}}{2\,sen\,\gamma} = \frac{cos\frac{\gamma}{2}}{4\,sen\frac{\gamma}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}} \Longleftrightarrow sen^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4}$

$sen\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{\gamma}{2} = 30^\circ \Longrightarrow \gamma = 60^\circ$

12. Si los lados de un triángulo son:$2a+3$, a^2+3a+3 y a^2+2a, $a>0$ demuestre que el ángulo mayor es 120°

Demostración.

Nótese que $\forall \quad a > 0$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + a > 0 \Longleftrightarrow a^2+3a+3 > 2a+3 \\ a+3 > 0 \Longleftrightarrow a^2+3a+3 > a^2+2a \end{array}\right. y$$

por tanto el lado mayor resulta ser a^2+3a+3, $\forall a > 0$ así por el Teorema del coseno se tiene

$$cos\,\alpha = \frac{(2a+3)^2+(a^2+2a)^2-(a^2+3a+3)^2}{2(2a+3)(a^2+2a)}$$

$$cos\,\alpha = \frac{-2a^3-7a^2-6a}{2a(2a^2+7a+6)} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = 120°$$

13. Demostrar que todo triángulo se verifica

a) $c\,sen^2\dfrac{\beta}{2} + b\,sen^2\dfrac{\gamma}{2} = s - a$

b) $bc\,cos^2\dfrac{\alpha}{2} + ac\,cos^2\dfrac{\beta}{2} + ab\,cos^2\dfrac{\gamma}{2} = s^2$

c) $a^2sen2\beta + b^2\,sen2\alpha = 4A$

s es el semiperímetro del triángulo y A su área.

Solución.

a)

$$c\,sen^2\tfrac{\beta}{2} + b\,sen^2\tfrac{\gamma}{2} = c\,\tfrac{1-cos\,\beta}{2} + b\,\tfrac{1-cos\,\gamma}{2}$$

$$= \tfrac{c}{2} - \tfrac{c}{2}\,cos\,\beta + \tfrac{b}{2} - \tfrac{b}{2}\,cos\,\gamma = \tfrac{c}{2} + \tfrac{b}{2} - \tfrac{1}{2}(c\,cos\,\beta + b\,cos\,\gamma)$$

$$= \tfrac{c}{2} + \tfrac{b}{2} - \tfrac{a}{2} = s - a,\;\; s = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

b)

$$bc\,cos^2\tfrac{\alpha}{2} + ac\,cos^2\tfrac{\beta}{2} + ab\,cos^2\tfrac{\gamma}{2} = bc\tfrac{1+cos\,\alpha}{2} + ac\tfrac{1+cos\,\beta}{2} + ab\tfrac{1+cos\,\gamma}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(bc + ac + ab + bc\,cos\,\alpha + ac\,cos\,\beta + ab\,cos\,\gamma)$$

y por el Teorema del coseno

$$= \tfrac{1}{2}\left[bc + ac + ab + \tfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) + \tfrac{1}{2}(a^2+c^2-b^2) + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}[a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca] = \left[\tfrac{1}{2}(a+b+c)\right]^2 = s^2$$

c)

$$a^2 sen\, 2\beta + b^2\, sen\, 2\alpha = 2(a^2\, sen\, \beta\, cos\, \beta + b^2\, sen\, \alpha\, cos\, \alpha)$$

por el Teorema del seno $a\, sen\, \beta = b\, sen\, \alpha,$ entonces

$= 2a\, sen\, \beta(a\, cos\, \beta + b\, cos\, \alpha)$

$= 2ac\, sen\, \beta = 2 \cdot 2A = 4A,$ Area $= A = \frac{1}{2}\, ac\, sen\, \beta.$

14. Resolver los siguientes triángulos cuyos datos son

a) $a = 2\ b = \sqrt{3} - 1$ y $c = \sqrt{2}$
b) $c = 2\sqrt{3},\ b = 3\sqrt{2}$ y $\alpha = 60°$
c) $\alpha = 30°,\ \beta = 75°$ y $c = 8$
d) $a = 7,\ b = 8\sqrt{3}$ y $\alpha = 30°$
e) $a = 2,\ c = \sqrt{2}$ y $\beta = 45°$
f) $a = \dfrac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}},\ b = \dfrac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$ y $\gamma = 60°$

Solución.

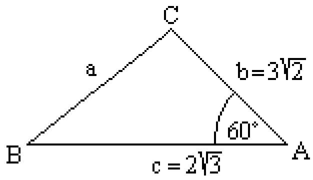
a) $a = 2,\ b = \sqrt{3} - 1$ y $c = \sqrt{2}$ (Caso I)

$cos\, \alpha \frac{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \alpha = 135°$

$cos\, \beta = \frac{2^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}-1)^2}{4\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow \beta = 15°$

por tanto $\gamma = 30°$

b) $c = 2\sqrt{3},\ b = 3\sqrt{2}$ y $\alpha = 60°$ (Caso II)



$$a^2 = (2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2 - 12\sqrt{6}\,cos\,60^\circ$$

$$a = \sqrt{30 - 6\sqrt{6}} \simeq 3.91$$

$$cos\,\beta = \frac{(30-6\sqrt{6})+12-18}{2\sqrt{30-6\sqrt{6}}\cdot 2\sqrt{3}} \simeq 0.343$$

$$\Longrightarrow \beta \simeq 69.92^\circ \Longrightarrow \gamma \simeq 50.08^\circ$$

c) $\alpha = 30^\circ,\ \beta = 75^\circ$ y $c = 8$ (Caso III)

De inmediato $\gamma = 75^\circ,\ a = c\,\frac{sen\,\alpha}{sen\,\gamma} = 8\,\frac{sen\,30^\circ}{sen\,75^\circ} \simeq 13.57$
$b = c\,\frac{sen\,\beta}{sen\,\gamma} = 8$ como era de esperar pues se trata de un triángulo isósceles.

d) $a = 7,\ b = 8\sqrt{3}$ y $\alpha = 30^\circ$ (Caso IV)

$b\,sen\,\alpha = 8\sqrt{3}\cdot sen\,30^\circ \simeq 6.928 \Longrightarrow a > b\,sen\,\alpha$

como $a < b \Longrightarrow \alpha$ es agudo, β puede ser un ángulo agudo u obtuso, de $sen\,\beta = \frac{6.928}{7}$ se obtienen

$\beta_1 = 81.786^\circ$ o $\beta_2 = 98.214^\circ,$ luego

$\gamma_1 = 68.214^\circ$ y $c_1 = 13$

$\gamma_2 = 51.786^\circ$ y $c_2 = 11$

e) análoga a b), los resultados son $b = \sqrt{2},\ \alpha = 90^\circ$ y $\gamma = 45^\circ$ (el triángulo es rectángulo).

f) (Caso II)

$$c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^2 - 2\,\frac{1}{6-2}\,cos\,60^\circ$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \beta = 105^\circ \text{ y } \alpha = 15^\circ$$

15. Demuestre que si en todo triángulo se verifica

$$cos\,3\alpha + cos\,3\beta + cos\,3\gamma = 1$$

un ángulo debe ser $\dfrac{2\pi}{3}$

Demostración.

$2\,cos\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\;cos\frac{3}{2}(\alpha-\beta) - (1 - cos\,3\gamma) = 0$

$2\,cos\frac{3}{2}(\pi-\gamma)\;cos\frac{3}{2}(\alpha-\beta) - 2\,sen^2\frac{3\gamma}{2} = 0$

$-2\,sen\frac{3}{2}\gamma\;cos\frac{3}{2}(\alpha-\beta) - 2\,sen^2\frac{3\gamma}{2} = 0$

$-2\,sen\frac{3}{2}\gamma\left(cos\frac{3}{2}(\alpha-\beta) + sen\frac{3}{2}\gamma\right) = 0$

$-2\,sen\frac{3}{2}\gamma\left(cos\frac{3}{2}(\alpha-\beta) - cos\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\right) = 0$
$-2\,sen\frac{3}{2}\gamma\left(-2\,sen\frac{3}{2}\alpha\cdot sen(-\frac{3}{2}\beta)\right) = 0$

$-4\,sen\frac{3}{2}\gamma\;sen\frac{3}{2}\,\alpha\;sen\frac{3}{2}\beta = 0$ de esta relación

se deduce que $\frac{3}{2}\gamma = \pi$ o $\frac{3}{2}\alpha = \pi$ o $\frac{3}{2}\beta = \pi$

en cuyo caso $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ o $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ o $\beta = \frac{2\pi}{3}$

16. En todo triángulo demuestre que si

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$$

entonces $\gamma = 45°$ o $\gamma = 135°$

Demostración.

$a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2a^2 + 2c^2b^2$

$a^4 + b^4 + c^4 - 2c^2a^2 - 2c^2b^2 + 2a^2b^2 = 2a^2b^2$

$(a^2 + b^2 - c^2)^2 = 2a^2b^2$ pero por el Teorema del coseno

$(2\, ab\, cos\, \gamma)^2 = 2a^2b^2 \iff cos^2\gamma = \frac{1}{2}$

$cos\, \gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ de donde $\gamma = 45°$ o $\gamma = 135°$

17. Si en un triángulo se verifica que

$$\frac{sen\frac{\alpha+\gamma}{2}}{sen\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{b(a+c)}{c(a+b)}$$

entonces es isósceles.

Demostración.

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{b(a+c)}{c(a+b)} \Longrightarrow \frac{cos\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{b(a+c)}{c(a+b)} \Longrightarrow$$

$$\frac{cos^2\frac{\beta}{2}}{cos^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{b^2(a+c)^2}{c^2(a+b)^2} \Longrightarrow \frac{1+cos\beta}{1+cos\beta} = \frac{b^2(a+c)^2}{c^2(a+b)^2}$$

por el teorema del coseno, se tiene:

$$\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2ab + b^2 + a^2 - c^2} = \frac{b^2(a+c)^2}{c^2(a+b)^2} \Longrightarrow \frac{(a+c)^2 - b^2}{(a+b)^2 - c^2} = \frac{b(a+c)^2}{c(a+b)^2} \Longrightarrow$$

$$\frac{(a+c-b)(a+c+b)}{(a+b-c)(a+b+c)} = \frac{b(a+c)^2}{c(a+b)^2} \iff c(a+c-b)(a+b)^2 =$$

$b(a+c)^2(a+b-c)$

$c(a+c)(a+b)^2 - bc(a+b)^2 = b(a+c)^2(a+b) - bc(a+c)^2 \Longrightarrow$

$(a+c)(a+b)a(c-b) + bc((a+c)^2 - (a+b)^2) = 0 \Longrightarrow$

$(a+c)(a+b)a(c-b) + bc(c-b)(b+c+2a) = 0$

$(c-b)[a(a+c)(a+b) + bc(b+c+2a)] = 0 \Longrightarrow c-b=0 \Longrightarrow b=c$

note que el otro término es siempre positio, luego el $\triangle$ es isósceles.

5.11. Ejercicios Propuestos

1. Demuestre que en todo triángulo se verifican:

   a) $(a^2-b^2-c^2)sen\,\alpha\, cos\,\beta + (a^2-b^2+c^2)sen\,\beta\, cos\,\alpha = 0$
   b) $a^2\, cos\,2\beta - b^2\, cos\,2\alpha = a^2 - b^2$
   c) $sen\,2\beta - sen\,2\gamma = 2\,cos\,\alpha\; sen(\gamma-\beta)$
   d) $\dfrac{b^2-c^2}{a}\,cos\,\alpha + \dfrac{c^2-a^2}{b}\,cos\,\beta + \dfrac{a^2-b^2}{c}\,cos\,\gamma = 0$
   e) $b^2 sen2\,\gamma + c^2\, sen\,2\beta = 2bc\, sen\alpha$
   f) $bc\,cos\,\alpha + ac\,cos\,\beta + 2ab\,cos\,\gamma = a^2 + b^2$

2. Demuestre que si en un triángulo se verifica

$$cos\,\alpha + cos\,\beta + 2\,cos\,\gamma = 2$$

   entonces a es medio aritmético entre b y c

3. Si en un triángulo se tiene que $\gamma = 60°$ demuestre que

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

4. Si los lados de un triángulo rectángulo son $2(1 + sen\,\theta) + cos\,\theta$ y $2(1+cos\,\theta)+sen\,\theta$ demuestre que la hipotenusa es $3+2(cos\,\theta+sen\,\theta)$

5. En un triángulo demuestre que si

$$sen\,\alpha\, sen(\beta-\gamma) = sen\,\gamma\; sen(\alpha-\beta)$$

entonces a^2, b^2 y c^2 estan en P.A.

6. En un triángulo dados: $a^2 = 2 \quad b^4 - 4b^2 + 2 = 0$ y $\sqrt{2}\,sen\,2\,\gamma = 1$ resuélvase el triángulo.

Respuesta.

$\alpha = 45°\qquad \beta = 112{,}5°\qquad c = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

7. En un triángulo si $a = 200;\ 2\,\beta = 45°$ y $2\,\gamma = 135°$. Calcúlese su área.

Respuesta.

7071

8. Hallar el área de triángulo cuyos lados son

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{a},\quad \frac{c}{a}+\frac{a}{b},\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{c}$$

Respuesta.

$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}$