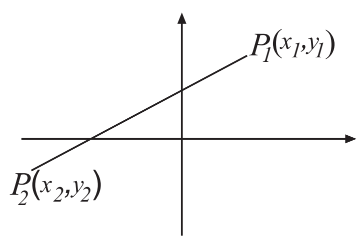
Capítulo 3

Las Funciones Trigonométricas

3.1. El círculo trigonométrico

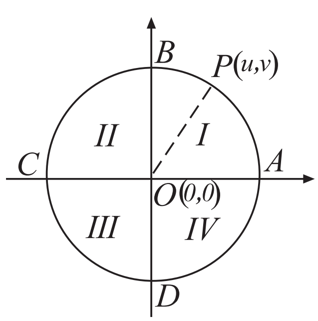
Vamos a suponer conocido el sistema cartesiano en lo que se refiere a conceptos fundamentales como son los de abscisa y ordenada de un punto, ubicación de diferentes puntos en el plano, algunas relaciones como por ejemplo, la distancia entre dos puntos dados. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$,



La distancia P_1P_2 esta dada por:

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

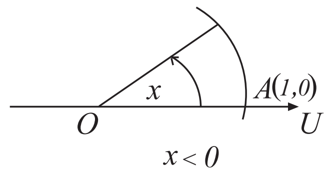
En un sistema cartesiano ortogonal (U, V), definimos una circunferencia con centro en el origen $(0, 0)$ y radio 1. Esta circunferencia, a la que se le acostumbra llamar círculo trigonométrico, sólo sirve de ayuda para comprender algunos conceptos, una vez definidas las funciones trigonométricas.

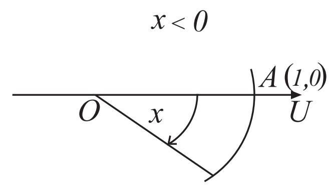


”u”se llama abscisa de $P(u, v)$
”v”se llama ordenada de $P(u, v)$

Note que
$\forall(u, v) : \sqrt{(u - 0)^2 + (v - 0)^2} = 1 \Rightarrow u^2 + v^2 = 1$
$A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ y $D = (0, -1)$

Tomaremos siempre el eje OU, como origen de ángulos, así

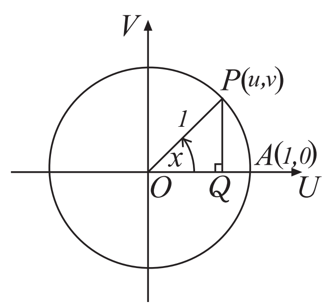




Es importante notar que un ángulo x determina un único punto en la circunferencia trigonométrica. Sin embargo dado P en la circunferencia trigonométrica hay muchos ángulos que le corresponden: aquellos que difieren en un múltiplo de 2π.

3.2. Definiciones

En estas definiciones extenderemos el concepto de razón trigonométrica al de **función trigonométrica**. Sea el círculo trigonométrico que se muestra en la figura.



Se define seno del ángulo x, por el número real

$$sen\, x = QP = \text{ordenada de}\, P = v$$

coseno del ángulo x, por el número real

$$cos\, x = OQ = \text{abscisa de}\, P = u$$

tangente del ángulo x, al número real

$$tg\, x = \frac{senx}{cosx} = \frac{v}{u}, \quad u \neq 0$$

cotangente del ángulo x, al número real

$$cotg\, x = \frac{cosx}{senx} = \frac{u}{v}, \quad v \neq 0$$

secante del ángulo x, al número real

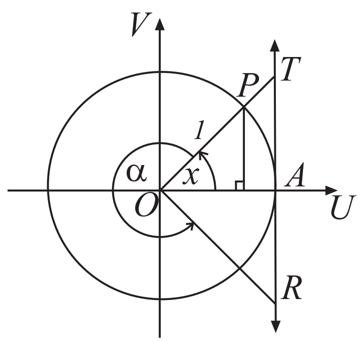
$$sec\,x = \frac{1}{cosx} = \frac{1}{u}, \quad u \neq 0$$

finalmente cosecante del ángulo x, al número real

$$cosec\,x = \frac{1}{senx} = \frac{1}{v}, \quad v \neq 0$$

Note que por estas definiciones, cada punto $P(u, v)$ de la circunferencia trigonométrica tiene coordenadas $P(cos\,x, sen\,x)$, esto es, hay una correspondencia biunívoca.
Sin embargo tal como hiciéramos ver anteriormente no hay correspondencia biunívoca entre $P(u, v)$ y el ángulo x.

Para el caso de la tangente, a pesar que se definió en términos del seno y coseno, vamos a dar la siguiente definición geométrica equivalente:

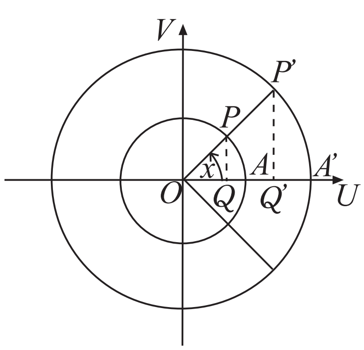


$$tg\,x = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

A la recta AT, que tiene su inicio en el punto A, se le acostumbra llamar eje de las tangentes. La medida de AT (que es positiva) es la tangente de x, y la medida de AR (que es negativa) es igual a la tangente de α.

Para el resto de las funciones trigonométricas existen definiciones geométricas equivalentes, pero no las mostraremos en este texto

Por último es necesario ser riguroso con nuestras definiciones, para lo cual consideraremos un círculo de radio cualquiera $r (r \neq 1)$. Haremos ver a lo menos que $sen\,x$ y $cos\,x$, son números reales que no dependen del tamaño del radio:



$OP = 1$, $OA = 1$, $OA' = r \quad (r \neq 1)$
Como $\triangle OQP \sim \triangle OQ'P'$

$$\frac{Q'P'}{OP'} = \frac{QP}{OP} = QP = v = sen\,x$$

$$\frac{OQ'}{OP'} = \frac{OQ}{OP} = OQ = u = cos\,x$$

3.3. Propiedades

De las definiciones anteriores, se tiene que

$$-1 \leq u \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq senx \leq 1 \Leftrightarrow \ |senx| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-1 \leq v \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq cosx \leq 1 \Leftrightarrow \ |cosx| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

tomando los valores recíprocos, se obtiene

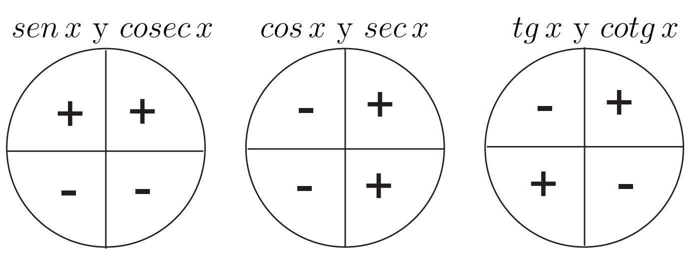
$$\frac{1}{senx} \leq -1 \veebar \frac{1}{senx} \geq 1 \Leftrightarrow |cosecx| \geq 1$$

y que:

$$\frac{1}{cosx} \leq -1 \veebar \frac{1}{cosx} \geq 1 \Leftrightarrow |secx| \geq 1$$

3.4. Signos

Según el cuadrante donde cae el ángulo x en cuestión , de las definiciones se tiene



3.5. Periodicidad

Se dice que una función $f(x)$ tiene período T, $T \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$f(x+T) = f(x)$$

es más si $f(x)$ tiene período T, entonces también se cumple

$$f(x) = f(x+kT), \ \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

Todas las funciones trigonométricas tienen período 2π, luego

$$func = func\ (\alpha + 2\,k\pi), \ k \in \mathbb{Z}$$

en particular las funciones tangente y cotangente tienen período π

$$tg\, x = tg(x + k\,\pi), \ k \in \mathbb{Z}$$

$$cotg\, x = cotg(x + k\pi), \ k \in \mathbb{Z}$$

OBS.:

2π período de : $sen\, x,\ cos\, x,\ cosec\, x$ y $sec\, x$.

π período de: $tg\, x$ y $cotg\, x$

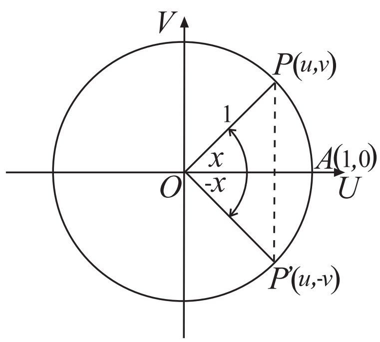
3.6. Paridad

Se dice que una función $f(x)$ es par si y sólo si

$$f(x) = f(-x)\ \forall\, x \in Dom\, f$$

y se dice que $f(x)$ es impar, si y sólo si

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in Dom\, f$$



De la figura se tiene:
$sen\, x = QP = v$ y $sen\,(-x) = QP' = -v$
Así: $sen\,(-x) = -sen\, x$, luego $sen\, x$ es impar.

$cos\, x = OQ = u$ y $cos\,(-x) = OQ = u$
Así $cos(-x) = cos\, x$, luego $cos\, x$ es par

$tg(-x) = \dfrac{sen(-x)}{cos(-x)} = \dfrac{-senx}{cosx} = -tgx$, luego $tg\, x$ es impar.

Análogamente, se prueba que $cotg\, x$ y $cosec\, x$ son impares y que $sec\, x$ es par.

3.7. Identidades fundamentales

Para cualquier $P(u, v)$ de la circunferencia trigonométrica recordemos que:
$u^2 + v^2 = 1$, pero $u = cos\, x$ y $v = sen\, x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, luego $sen^2x + cos^2x = 1$
($\forall\, x \in \mathbb{R}$, merece una explicación, por favor ver sección 3.8).

De aquí se obtienen, $1 + tg^2x = sec^2x$ y que $1 + cotg^2x = cosec^2x$, exceptuando aquellos valores para los que la $tg\, x$, $secx$, $cotgx$ y $cosecx$ no están definidas (ver siguiente sección).

La otras identidades fundamentales provienen directamente de las definiciones.

3.8. Variación de las funciones trigonométricas y sus gráficos

Recordando el concepto general de función, $f : A \to B$, A y $B \subseteq \mathbb{R}$, los conjuntos Dominio de f $(Dom\, f)$ y Recorrido de f $(Rec\, f)$ están dados por:

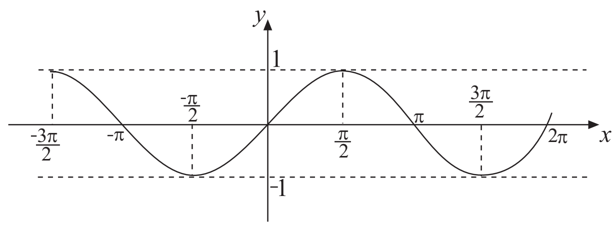
$$Dom\, f = \{x \in A \,/\, \exists\, y \in B : y = f(x)\}$$

$$Rec\, f = \{y \in B \,/\, \exists\, x \in A : y = f(x)\}$$

Función seno

Como: $-1 \leq senx \leq 1$ y el ángulo x puede tomar valores desde 0 hasta $\pm\infty$ (radianes = reales) afirmamos que: $f(x) = sen\, x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

$$Dom\, f = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Rec\, f = [-1, 1],$$



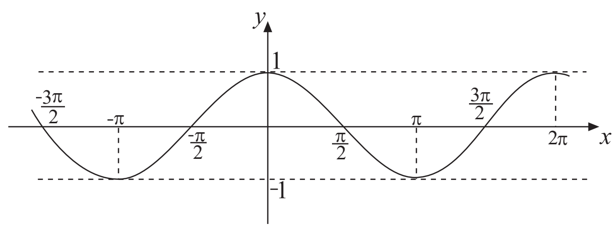
$sen\, 0 = 0$
$sen\, \frac{\pi}{2} = 1$
$sen\, \pi = 0$
$sen\, \frac{3\pi}{2} = -1$
$sen\; 2\pi = 0$

Función impar de período 2π

Función coseno

Como: $-1 \leq cos\, x \leq 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = cos\, x$

$$Dom\, f = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Rec\, f = [-1, 1]$$



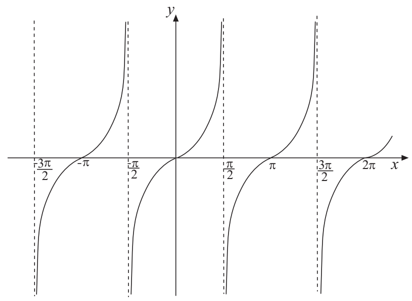
$cos\, 0 = 1$
$cos\, \frac{\pi}{2} = 0$
$cos\, \pi = -1$
$cos\, \frac{3\pi}{2} = 0$
$cos\, 2\pi = 1$

Función par de período 2π

Función tangente

Para el dominio de la tangente es necesario que $cosx \neq 0$ es decir $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. Según su definición geométrica (AT eje de las tangentes) se tiene que su recorrido son todos los reales, así

$$f(x) = tgx,\ Domf = \mathbb{R} - \{x \,|\, x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \ \text{ y } Recf = \mathbb{R}.$$



Función impar de período π

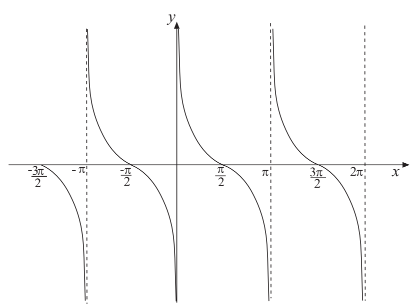
$tg\,0 = 0$
$tg\,\pi/2 = \pm\infty$
$tg\,\pi = 0$
$tg\,\frac{3\pi}{2} = \pm\infty$
$tg\,2\pi = 0$

Función cotangente

En forma análoga que para el caso de la función tangente, obtenemos

$$f(x) = cotg\,x, \quad Dom f = \mathbb{R} - \{x |\, x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \quad Rec\,f = \mathbb{R}$$

Note que $senx = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



Función impar de período π

$cotg\,0 = \pm\infty$

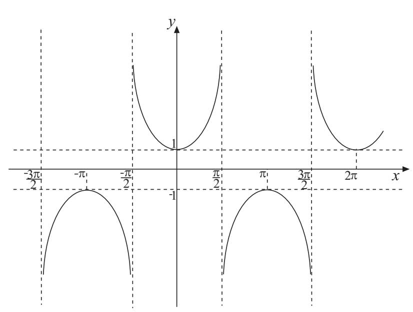
$cotg\,\frac{\pi}{2} = 0$

$cotg\,\pi = \pm\infty$

$cotg\,\frac{3\pi}{2} = 0$
$cotg\,2\pi = \pm\infty$

Función secante

$$f(x) = secx,\ Dom\,f = \mathbb{R} - \{x|\ x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\} \text{ y } Rec\,f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



Función par de período $2\,\pi$

$sec\,0 = 1$

$sec\,\dfrac{\pi}{2} = \pm\infty$

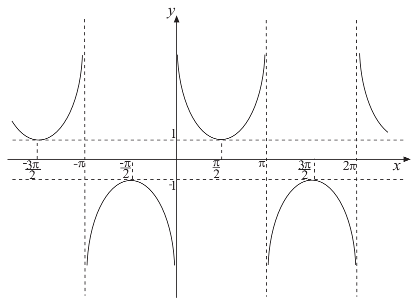
$sec\,\pi = -1$

$sec\,\dfrac{3\pi}{2} = \pm\infty$

$sec\,2\pi = 1$

Función cosecante

$$f(x) = cosecx;\ Dom f = \mathbb{R} - \{x |\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \text{ y } Rec\, f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



Función impar de período π

$cosec\, 0 = \pm\infty$

$cosec\, \pi/2 = 1$

$cosec\, \pi = \pm\infty$

$cosec\, \dfrac{3\pi}{2} = -1$

$cosec 2\, \pi = \pm\infty$

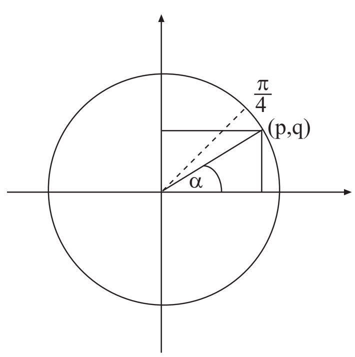
3.9. Reducción

Ahora veremos como las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera, se pueden expresar en términos de un ángulo positivo entre 0° y $\dfrac{\pi}{4}$.

Considerando siempre que α es un ángulo agudo entre 0 y $\dfrac{\pi}{4}$, tenemos 8 casos posibles:

Caso 1

(Siempre en un círculo de radio 1)



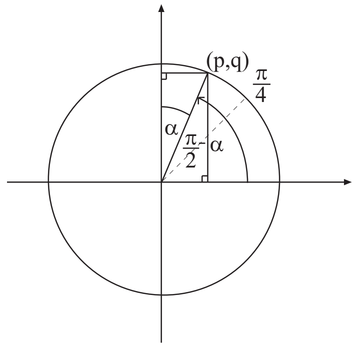
$sen(0 + \alpha) = sen\, \alpha$

$cos(0 + \alpha) = cos\, \alpha$

$tg(0 + \alpha) = tg\, \alpha$

Para las otra funciones trigonométricas basta tomar los recíprocos, es más, son suficientes tan solo $sen\, \alpha$ y $cos\, \alpha$. (¿porque?)

Caso 2

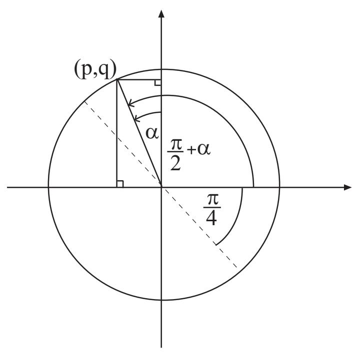


$$sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cos\,\alpha$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen\,\alpha$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cotg\,\alpha$$

Caso 3

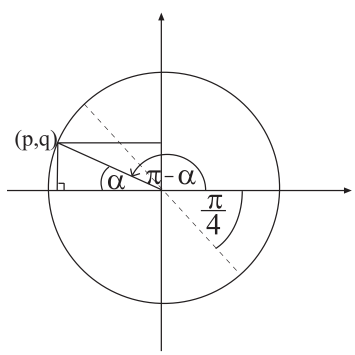


$$sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=cos\,\alpha$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-sen\,\alpha$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-cotg\,\alpha$$

Caso 4

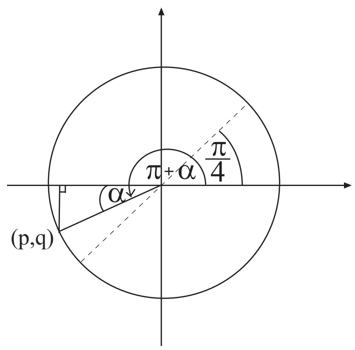


$$sen(\pi-\alpha)=sen\,\alpha$$

$$cos(\pi-\alpha)=-cos\,\alpha$$

$$tg(\pi-\alpha)=-tg\,\alpha$$

Caso 5

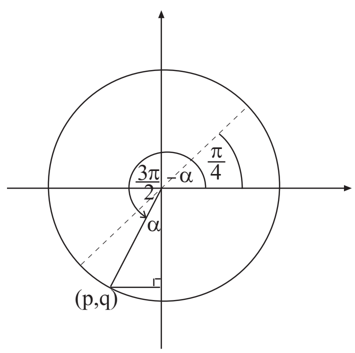


$$sen(\pi + \alpha) = -sen\,\alpha$$

$$cos(\pi + \alpha) = -cos\,\alpha$$

$$tg(\pi + \alpha) = tg\,\alpha$$

Caso 6

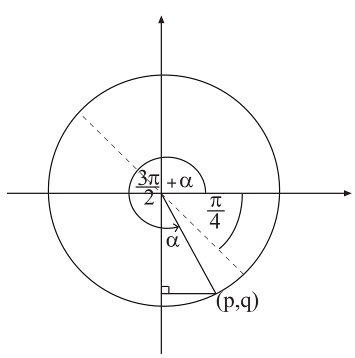


$$sen\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -cos\,\alpha$$

$$cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -sen\,\alpha$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = cotg\,\alpha$$

Caso 7

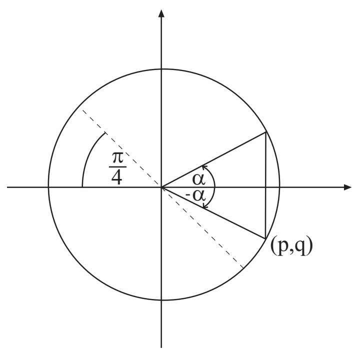


$$sen\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -cos\,\alpha$$

$$cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = sen\,\alpha$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -cotg\,\alpha$$

Caso 8



$$sen(2\pi - \alpha) = -sen\,\alpha$$

$$cos(2\pi - \alpha) = cos\,\alpha$$

$$tg(2\pi - \alpha) = -tg\,\alpha$$

Nota: Queremos hacer notar que las fórmulas recién establecidas también son válidas si α es un ángulo cualquiera, como lo justificaremos más adelante.

Ejemplo.

1. Calcular la expresión A, si $sen\,\alpha = \dfrac{2}{3}, \quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

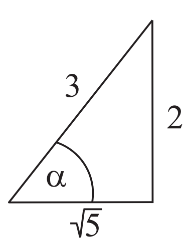
$$A = \frac{cotg(\pi + \alpha) - tg(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + cos(-\alpha)}{sen(\frac{\pi}{2} + \alpha) + sec(2\pi - \alpha) - tg(\pi - \alpha)}$$

2. Si $tg\,\alpha = -\dfrac{2}{3}$ y $\alpha \in$ IV cuadrante, calcular el valor de:

$$A = \frac{sen\,\alpha + cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + tg(5\pi + \alpha}{cosec(2\pi - \alpha) + sen(\frac{5\pi}{2} + \alpha)}$$

Solución.

1.



$$A = \frac{cotg(\pi + \alpha) - tg(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + cos(-\alpha)}{sen(\frac{\pi}{2} + \alpha) + sec(2\pi - \alpha) - tg(\pi - \alpha)}$$

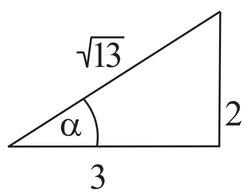
$$A = \frac{cotg\alpha - cotg\alpha + cos\alpha}{cos\alpha + sec\alpha - (-tg\alpha)} = \frac{cos\,\alpha}{cos\alpha + sec\,\alpha + tg\,\alpha}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}$$

2. Primero reducimos lo más posible, la expresión A.

$$A = \frac{sen\,\alpha - sen\,\alpha + tg\,\alpha}{-cosec\,\alpha + cos\,\alpha} = \frac{tg\,\alpha}{-cosec\alpha + cos\,\alpha}$$

Si $\alpha \in IV$ cuadrante $\Longrightarrow tg\,\alpha < 0$, $\quad cosec\,\alpha < 0$ y $cos\,\alpha > 0$, por tanto tomando en valor absoluto $tg\,\alpha = -\frac{2}{3}$, se tiene



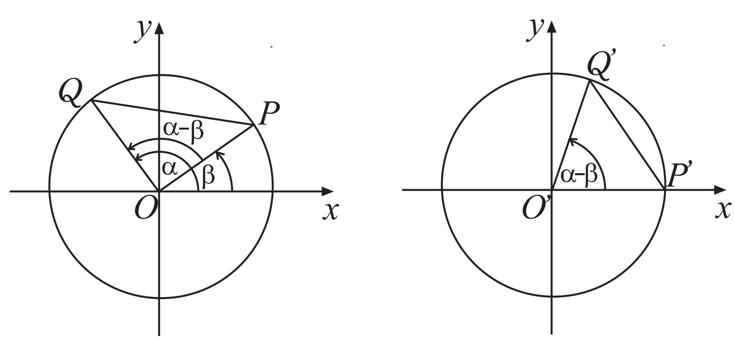
$$cosec\,\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$cos\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \text{ luego}$$

$$A = \frac{-\frac{2}{3}}{-(-\frac{\sqrt{13}}{2}) + \frac{3}{\sqrt{13}}} = -\frac{4\sqrt{13}}{57}$$

3.10. Fórmulas de suma y diferencia de ángulos

Vamos a demostrar que $cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\, cos\beta + sen\,\alpha\, sen\,\beta$ para cualquier valor de los ángulos α y β y con ella demostraremos las demás.
Para esto, sean las figuras que se indican a continuación (círculos de radio 1)



los triángulos OPQ y $O'P'Q'$ son congruentes.

Coordenadas de P, P', Q y Q' son:

$$P(cos\beta, sen\beta),\ P'(1,0), Q(cos\,\alpha, sen\,\alpha) \text{ y } Q'(cos(\alpha - \beta),\ sen(\alpha - \beta)).$$

Los lados QP y $Q'P'$ son iguales como también sus cuadrados, así

$$(Q'P')^2 = (QP)^2$$

$$(cos(\alpha-\beta)-1)^2+(sen(\alpha-\beta))^2=(cos\,\alpha-cos\,\beta)^2+(sen\,\alpha-sen\,\beta)^2$$

$$cos^2(\alpha-\beta)-2\,cos(\alpha-\beta)+1+sen^2(\alpha-\beta)=$$

$$cos^2\alpha-2\,cos\,\alpha\;cos\,\beta+cos^2\beta+sen^2\alpha-2sen\,\alpha\;sen\,\beta+sen^2\beta$$

de donde simplificando se obtiene

$$cos(\alpha-\beta)=cos\,\alpha\;cos\,\beta+sen\,\alpha\;sen\,\beta \tag{1}$$

haciendo $\beta=-\gamma$, se obtiene

$$cos(\alpha+\gamma)=cos\,\alpha\;cos(-\gamma)+sen\,\alpha\;sen(-\gamma)$$
$$cos(\alpha+\gamma)=cos\,\alpha\;cos\,\gamma-sen\,\alpha\;sen\,\gamma \tag{2}$$

Por las fórmulas de reducción, se tiene:

$$sen(\alpha-\beta)=cos(\tfrac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)),\;\forall\;\alpha,\beta$$

$$sen(\alpha-\beta)=cos[(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)+\beta]\text{ aplicando (2)}$$

$$sen(\alpha-\beta)=cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)cos\beta-sen(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\,sen\beta,\text{ de donde}$$
$$sen(\alpha-\beta)=sen\,\alpha\;cos\,\beta-cos\,\alpha\;sen\,\beta \tag{3}$$

haciendo $\beta=-\gamma$, se demuestra

$$sen(\alpha+\gamma)=sen\,\alpha\;cos\,\gamma+cos\,\alpha\;sen\,\gamma \tag{4}$$

ahora demostraremos que

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\;tg\,\beta}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)}=\frac{sen\,\alpha\;cos\,\beta+cos\,\alpha\;sen\,\beta}{cos\,\alpha\;\cos\,\beta-sen\,\alpha\;sen\,\beta}$$

dividiendo el numerador y denominador de la fracción por $cos\,\alpha\;cos\,\beta$ se obtiene lo requerido, es decir:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\;tg\,\beta} \tag{5}$$

análogamente se demuestra

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\;tg\,\beta} \tag{6}$$

$$cotg(\alpha+\beta)=\frac{cotg\,\alpha\;cotg\,\beta-1}{cotg\,\beta+cotg\,\alpha} \tag{7}$$

$$cotg(\alpha-\beta)=\frac{cotg\,\alpha\;cotg\,\beta+1}{cotg\,\beta-cotg\,\alpha} \tag{8}$$

3.11. Fórmulas del ángulo doble

Vamos establecer, apoyándonos en las fórmulas anteriores que:

$$sen2\alpha = 2sen\,\alpha\,cos\,\alpha$$

$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha \left\langle \begin{array}{l} cos2\alpha = 1 - 2sen^2\,\alpha \\ cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 \end{array} \right.$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Por fórmula (4), se tiene

$$sen(\alpha + \alpha) = sen\,\alpha\,cos\,\alpha + cos\,\alpha\,sen\,\alpha \text{ luego}$$

$$sen\,2\alpha = 2sen\,\alpha\,cos\,\alpha \tag{9}$$

como también

$$cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha \tag{10}$$

y

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha} \tag{11}$$

3.12. Fórmulas del ángulo triple

Análogamente, haciendo $\gamma = 2\alpha$ en (4) se obtiene:

$$sen3\alpha = sen\,\alpha\,cos\,2\alpha + sen\,2\alpha\,cos\,\alpha$$

$$sen3\alpha = sen\,\alpha(1 - 2sen^2\,\alpha) + 2sen\,\alpha(1 - sen^2\alpha)$$

$$sen3\alpha = 3sen\alpha - 4sen^3\alpha \tag{12}$$

como también

$$cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\,\alpha \tag{13}$$

$$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} \tag{14}$$

3.13. Fórmulas del ángulo medio

Haciendo $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$ en las identidades

$$cos2\beta = 1 - 2sen^2\,\beta \quad \text{y} \quad cos2\beta = 2cos^2\beta - 1$$

$$cos\alpha = 1 - 2sen^2\tfrac{\alpha}{2} \quad \text{y} \quad cos\alpha = 2cos^2\tfrac{\alpha}{2} - 1$$

de donde:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}} \tag{15}$$

$$cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{2}} \tag{16}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}} \tag{17}$$

Haciendo un comentario de estas fórmulas, notemos que para:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}}$$

como:

$$-1 \leq cos\,\alpha \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq -cos\,\alpha \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq 1 - cos\,\alpha \leq 2 \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{1 - cos\,\alpha}{2} \leq 1$$

o sea que la cantidad subradical siempre es positiva. Utilice (+) para cuando $\dfrac{\alpha}{2}$ cae en el I y II cuadrantes y (-) para cuando $\dfrac{\alpha}{2}$ cae en III y IV cuadrantes para: $cos\,\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1 + cos\,\alpha}{2}}$, análogamente $0 \leq \dfrac{1 + cos\alpha}{2} \leq 1$, úsese (+) para cuando $\dfrac{\alpha}{2}$ cae en I y IV cuadrantes y (-) para cuando $\dfrac{\alpha}{2}$ cae en II y III cuadrantes.

En tanto para:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}}$$

notemos que primero están prohibidos los ángulo α, tales que $1 + cos\,\alpha = 0 \Longleftrightarrow cos\,\alpha = -1 \Longleftrightarrow \alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ que es el caso en que $tg\dfrac{\alpha}{2}$ no está definida.

Finalmente notemos que los signos de $sen\,\dfrac{\alpha}{2}$ y $cos\,\dfrac{\alpha}{2}$ no dependen entre si, mientras que el de $tg\dfrac{\alpha}{2}$ depende de qué signo tomemos para $sen\dfrac{\alpha}{2}$ y $cos\dfrac{\alpha}{2}$ pues como sabemos $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{sen\dfrac{\alpha}{2}}{cos\dfrac{\alpha}{2}}$

Ejemplo.

Si $\alpha = 260° = 180° + 80° \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 90° + 40°$

$\dfrac{\alpha}{2}$ es un ángulo del II cuadrante, así

$$sen\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1 - cos260°}{2}}, \;\; cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + cos260°}{2}} \text{ y}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - cos260°}{1 + cos260°}}$$

3.14. Fórmulas de Prostaféresis

Productos en sumas

A partir de,

$$sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha\; cos\,\beta + sen\beta\; cos\,\alpha \tag{I}$$

$$sen(\alpha - \beta) = sen\,\alpha\; \cos\,\beta - sen\,\beta\; cos\,\alpha \tag{II}$$

$$cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha\; cos\,\beta - sen\alpha\; sen\,\beta \tag{III}$$

$$cos(\alpha - \beta) = cos\,\alpha\; cos\,\beta + sen\alpha\; sen\,\beta \tag{IV}$$

Sumando: (I y II) y (III y IV), se obtienen

$$sen\,\alpha\; cos\,\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha + \beta) + sen(\alpha - \beta)] \tag{18}$$

$$cos\,\alpha\; cos\,\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)] \tag{19}$$

Restando: (I y II) y (III y IV), se tienen

$$cos\,\alpha\; sen\,\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha + \beta) - sen(\alpha - \beta)] \tag{20}$$

$$sen\,\alpha\; sen\,\beta = -\frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) - cos(\alpha-\beta)] \tag{21}$$

Sumas en productos

Si en estas últimas, hacemos

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta = u\\ \alpha-\beta = v\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = \frac{u+v}{2} \text{ y } \beta = \frac{u-v}{2}$$

se obtienen:

$$sen\,u + sen\,v = 2\; sen\frac{u+v}{2}\; cos\frac{u-v}{2} \tag{22}$$

$$sen\,u - sen\,v = 2\; cos\frac{u+v}{2}\; sen\frac{u-v}{2} \tag{23}$$

$$cos\,u + cos\,v = 2\; cos\frac{u+v}{2}\; cos\frac{u-v}{2} \tag{24}$$

$$cos\,u - cos\,v = -2\; sen\frac{u+v}{2}\; sen\frac{u-v}{2} \tag{25}$$

3.15. Ejercicios Resueltos

1. Reducir las siguientes expresiones en términos del ángulo α.

$$cos(\alpha - 270°),\ cosec(\pi - \alpha),\ sen\left(\frac{5\pi}{2} + 2\alpha\right)$$

$$tg(1200° - \alpha),\ cotg(-90° - \alpha) \text{ y } cos(630° - \alpha)$$

Solución.

$$\begin{aligned}
cos(\alpha - 270°) &= cos(270° - \alpha) = -sen\alpha \\
cosec(\pi - \alpha) &= cosec\alpha \\
sen\left(\tfrac{5\pi}{2} + 2\alpha\right) &= cos2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha \\
tg(1200° - \alpha) &= tg(7 \cdot 180° - (60° + \alpha)) = -tg(60° + \alpha) \\
&= -\frac{tg60° + tg\,\alpha}{1 - tg60°\ tg\,\alpha} = \frac{\sqrt{3} + tg\,\alpha}{\sqrt{3}\,tg\,\alpha - 1} \\
cotg(-90° - \alpha) &= -cotg(90° + \alpha)\,(cotg\alpha \text{ es una función impar}) \\
&= -(-tg\,\alpha) = tg\,\alpha \\
cos(630° - \alpha) &= cos(7 \cdot 90° - \alpha) = -sen\,\alpha
\end{aligned}$$

2. Si $\alpha \in$ IV cuadrante y $sen\alpha = -\dfrac{7}{25}$ calcule el valor de

$$A = \sqrt{2}\,sen\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\alpha}{2}$$

Solución.

$\alpha \in$ IV cuadrante $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in$ II cuadrante por tanto $sen\frac{\alpha}{2} > 0$ y $tg\frac{\alpha}{2} < 0$, como:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{24}{23}}{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}} = -\frac{1}{7}, \text{luego}$$

$$A = \sqrt{2}\,\frac{1}{5\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{7-5}{35} = \frac{2}{35}$$

3. Demostrar que

$$cos(420^\circ + \alpha) + cos(60^\circ - \alpha) = sen(90^\circ - \alpha)$$

Demostración.

$$cos(420^\circ + \alpha) + cos(60^\circ - \alpha) = cos(360^\circ + (60^\circ + \alpha)) + cos(60^\circ - \alpha)$$

$$= cos(60^\circ + \alpha) + cos(60^\circ - \alpha) \text{ aplicando fórmula 3.15 - 24}$$

$$= 2\; cos60\; cos\,\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}\, cos\,\alpha = sen(90^\circ - \alpha)$$

4. Determine los valores de

i) $sen(270^\circ + \frac{\alpha}{2})$ si $sen\,\alpha = 0{,}6$

ii) $tg\,\alpha$ si $cos\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución.

i) Si $sen\,\alpha = 0{,}6 = \frac{3}{5} \Longrightarrow \alpha \in$ I o II cuadrantes en ambos casos $\frac{\alpha}{2} \in$ I cuadrante por tanto $cos\frac{\alpha}{2} > 0$, luego

$$sen\left(270^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = -cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{(por 3.9 caso 7)}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

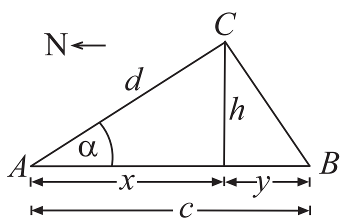
ii) Si $cos\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha \in$ I o III cuadrantes, por tanto $tg\,\alpha <$ o $tg\,\alpha > 0$, así $tg\,\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

5. Desde un punto A de un plano a nivel, el ángulo de elevación de una cometa es α y su dirección, sur; y desde un lugar, B, que está "c" m. al sur de A sobre el plano, la cometa se ve hacia el norte con un ángulo de elevación β. Demuestre que la distancia de la cometa a A y su altura sobre el plano son:

$$\frac{c\,sen\,\beta}{sen(\alpha+\beta)} \quad y \quad \frac{c\,sen\,\alpha\;sen\,\beta}{sen(\alpha+\beta)}$$

respectivamente.

Solución.



$$\left.\begin{array}{l} x = h\,cotg\,\alpha \\ y = h\,cotg\,\beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} x+y = h(cotg\alpha + cotg\,\beta) \\ c = h\left(\frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} + \frac{cos\,\beta}{sen\,\beta}\right) \end{array}$$

$\Rightarrow h = \frac{c\,sen\,\alpha\;sen\,\beta}{sen(\alpha+\beta)}$ por otra parte $sen\,\alpha = \frac{h}{d}$

$\Rightarrow d = \frac{h}{sen\,\alpha} = \frac{c\;sen\,\beta}{sen(\alpha+\beta)}$

6. Si $cotg\,\alpha = \dfrac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ y $cotg\,\beta = \dfrac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, demuestre que

i) $cosec^2\alpha + cosec^2\beta = \dfrac{44}{3}$

ii) $3\,cotg(\alpha-\beta) = 8$

Solución.

i) Note que

$$cotg\,\alpha = \tfrac{4}{\sqrt{3}} - 1$$

$$cotg\,\beta = \tfrac{4}{\sqrt{3}} + 1$$

de aquí

$$\left.\begin{array}{l} cotg\,\alpha + cotg\,\beta = \frac{8}{\sqrt{3}} \\ cotg\,\beta - cotg\,\alpha = 2 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow 2(cotg^2\alpha + cotg^2\beta) = 4 + \tfrac{64}{3}$$

$$cosec^2\alpha - 1 + cosec^2\beta - 1 = 2 + \tfrac{32}{3}$$

$$cosec^2\alpha + cosec^2\beta = \tfrac{44}{3}$$

ii) $3\,cotg(\alpha-\beta) = 3\cdot \frac{cotg\,\alpha\; cotg\,\beta + 1}{cotg\,\beta - cotg\,\alpha} = 3\frac{\frac{16}{3}}{2} = 8$

7. Demostrar las siguientes identidades

a) $sen(75^\circ-\alpha)\,cosec75^\circ - cos(75^\circ-\alpha)sec75^\circ = -4\,sen\,\alpha$

b) $\dfrac{sen(45^\circ-\alpha)-sen(45^\circ+\alpha)}{cos(60^\circ+\alpha)+cos(60^\circ-\alpha)} + sec45^\circ\; tg\alpha = 0$

c) $2 + tg^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) + tg^2\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{4}{1-sen\,2\alpha}$

d) $tg^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right) - tg^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right) = 4\,tg\,\alpha\; sec\,\alpha$

e) $\dfrac{sen3\theta + sen\theta}{1+2\,cos\theta + cos2\,\theta} = 2\,cotg\,\theta(1-cos\,\theta)$

f) $cotg\dfrac{\alpha}{2}\; cotg\,3\dfrac{\alpha}{2}\left(tg\,3\dfrac{\alpha}{2} - 3tg\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{4\,tg\,\alpha}{sec\,\alpha + 2}$

g) $sen80^\circ\; sen40^\circ\; sen20^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

h) $tg15^\circ + tg45^\circ + tg75^\circ = 5$

i) $tg20^\circ + tg40^\circ + \sqrt{3}\,tg20^\circ\; tg40^\circ = tg20^\circ\; tg40^\circ\; tg80^\circ = \sqrt{3}$

j) $\dfrac{sen\,6\alpha}{sen\,2\alpha} - \dfrac{cos\,6\alpha}{cos\,2\alpha} = 2$

Solución.

a)

$$sen(75^\circ-\alpha)cosec75^\circ - cos(75^\circ-\alpha)sec75^\circ =$$

$$\{sen\,75^\circ\;cos\,\alpha - cos\,75^\circ\;sen\,\alpha\}\;cosec75^\circ$$

$$-[cos\,75^\circ\;cos\,\alpha + sen\,75^\circ\;sen\,\alpha]sec75^\circ$$

$$= cos\,\alpha - \frac{cos\,75^\circ}{sen\,75^\circ}\;sen\,\alpha - cos\,\alpha - \frac{sen\,75^\circ}{cos\,75^\circ}\;sen\,\alpha$$

$$= -sen\,\alpha\left(\frac{cos^2 75^\circ + sen^2 75^\circ}{sen\,75^\circ\;cos\,75^\circ}\right)$$

$$= -sen\,\alpha\cdot\;\frac{2}{2\,sen75^\circ\;cos\,75^\circ} = -\frac{2\,sen\,\alpha}{sen\,150^\circ} = -4\,sen\,\alpha$$

b)

$$\frac{sen(45^\circ-\alpha)-sen(45^\circ+\alpha)}{cos(60^\circ+\alpha)+cos(60^\circ-\alpha)} + sec45^\circ\;tg\,\alpha =$$

aplicando las fórmulas de prostaféresis, se tiene:

$$\frac{2\;cos45^\circ\;sen(-\alpha)}{2\;cos\,60^\circ\;cos\alpha} + \sqrt{2}\,tg\,\alpha = 0$$

c)

$$2 + tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha)\right) + tg^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 2 + \left(\frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\,\alpha}{1-tg\frac{\pi}{4}\;tg\;\alpha}\right)^2 + \left(\frac{tg\alpha - tg\frac{3\pi}{4}}{1+tg\,\alpha\;tg\frac{3\pi}{4}}\right)^2$$

$$= 2 + 2\left(\frac{1+tg\,\alpha}{1-tg\,\alpha}\right)^2 = 2 + \frac{2(1+2tg\,\alpha+tg^2\alpha)}{1-2tg\,\alpha+tg^2\,\alpha}$$

$$= \frac{2-4tg\,\alpha+2tg^2\,\alpha+2+4\,tg\,\alpha+2tg^2\,\alpha}{sec^2\alpha-2tg\,\alpha}$$

$$= \frac{4\,sec^2\alpha}{sec^2\alpha-2\,tg\alpha} = \frac{4}{1-2tg\,\alpha\cdot cos^2\,\alpha} = \frac{4}{1-sen\,2\,\alpha}$$

d)

$$tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) - tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{sen^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\;cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

aplicando las fórmulas: 3.15 − 18 y 20 se tiene

$$= \frac{\left[\frac{1}{2}\left(sen\,\frac{\pi}{2}+sen\,\alpha\right)\right]^2-\left[\frac{1}{2}\left(sen\,\frac{\pi}{2}+sen(-\alpha)\right)\right]^2}{\left[\frac{1}{2}\left(cos\,\frac{\pi}{2}+cos\,\alpha\right)\right]^2}$$

$$= \frac{1+2sen\,\alpha+sen^2\,\alpha-1+2sen\,\alpha-sen^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha} = \frac{4sen\,\alpha}{cos\,\alpha}\cdot\frac{1}{cos\,\alpha}$$

$$= 4\,tg\,\alpha\,\cdot\,sec\,\alpha$$

e)

$$\frac{sen\,3\,\theta+sen\,\theta}{1+2\,cos\,\theta+cos\,2\,\theta} = \frac{2\ sen2\,\theta\ cos\,\theta}{1+2cos\ \theta+cos^2\theta-sen^2\theta}$$

$$= \frac{2\,sen\,2\theta\ cos\,\theta}{2cos\,\theta(1+cos\,\theta)} = \frac{2\,sen\,\theta\ cos\,\theta}{1+cos\,\theta}$$

$$= \frac{2sen\,\theta\ cos\,\theta(1-cos\,\theta)}{sen^2\theta} = 2cotg\,\theta(1-cos\,\theta)$$

f)

$$cotg\,\frac{\alpha}{2}\ cotg\,\frac{3\alpha}{2}\left(tg\,3\frac{\alpha}{2}-3\,tg\frac{\alpha}{2}\right) = cotg\,\frac{\alpha}{2}-3\,cotg\,\frac{3\alpha}{2}$$

$$= \frac{sen\frac{3}{2}\,\alpha\ cos\,\frac{\alpha}{2}-3\,cos\,\frac{3}{2}\,\alpha\ sen\,\frac{\alpha}{2}}{sen\,\frac{\alpha}{2}\ sen\,\frac{3}{2}\alpha}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}[sen\,2\alpha+sen\,\alpha]-3\cdot\frac{1}{2}[sen\,2\alpha-sen\,\alpha]}{-\frac{1}{2}[cos\,2\alpha-cos\,\alpha]}$$

$$= \frac{4\,sen\,\alpha-2\,sen\,2\alpha}{1+cos\,\alpha-2cos^2\,\alpha} = \frac{4sen\,\alpha}{cos\,\alpha}\ \frac{(1-cos\,\alpha)}{(1-2\,cos\,\alpha+sec\,\alpha)}$$

$$= 4\ tg\,\alpha\frac{(1-cos\,\alpha)}{(1-cos\,\alpha)(2+sec\,\alpha)} = 4\frac{tg\,\alpha}{sec\,\alpha+2}$$

g)

$$sen\,80^\circ\ sen\,40^\circ\ sen\,20^\circ = -\frac{1}{2}[cos\,120^\circ-cos\,40^\circ]sen20^\circ$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}-cos\,40^\circ\right]sen20^\circ = \frac{1}{4}\,sen\,20^\circ+\frac{1}{2}\,cos40^\circ\ sen20^\circ$$

$$= \frac{1}{4}\,sen\,20^\circ+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[sen\,60^\circ-sen20^\circ] = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

h)

$$tg\,15^\circ+tg\,45^\circ+tg\,75^\circ = tg15^\circ+tg\,75^\circ+1$$

$$= \frac{sen15^\circ\ cos\,75^\circ+sen\,75^\circ\ cos\,15^\circ}{cos\,15^\circ\ cos\,75^\circ}+1 = \frac{sen(75^\circ+15^\circ)}{\frac{1}{2}[cos\,90^\circ+cos\,60^\circ]}+1$$

$$= \frac{2}{(0+\frac{1}{2})}+1 = 5$$

i)

$tg\,20° + tg\,40° + \sqrt{3}tg\,20°\ tg\,40°$

$= \frac{sen\,20°\ cos\,40° + sen\,40°\ cos\,20°}{cos\,20°\ cos 40°} + \sqrt{3}\ \frac{sen\,20°\ sen\,40°}{cos 20°\ cos\,40°}$

$= \frac{sen\,60° + \sqrt{3}\ sen\,20°\ sen\,40°}{\frac{1}{2}[cos\,60° + cos\,20°]} = \sqrt{3}\ \frac{[1-(cos\,60° - cos\,20°)]}{cos\,60° + cos\,20°}$

$= \sqrt{3}$, por otra parte.

$tg\,20°\ tg\,40°\ tg 80° = \frac{sen\,20°\ sen\,40°\ sen\,80°}{cos\,20°\ cos\,40°\ cos\,80°}$

$= \frac{-\frac{1}{2}(cos\,60° - cos(-20°))\ sen\,80°}{\frac{1}{2}(cos\,60° + cos(-20°))\ cos 80°} = \frac{-\frac{1}{2}\ sen\,80° + sen\,80°\ cos\,20°}{\frac{1}{2}\ cos 80° + cos\,80°\ cos\,20°}$

$= \frac{-\frac{1}{2}\ sen\,80° + \frac{1}{2}(sen\,100° + sen\,60°)}{\frac{1}{2}\ cos\,80° + \frac{1}{2}(cos\,100° + cos\,60°)}$

pero $sen\,80° = sen(180° - 80°) = sen\,100°$
$cos\,80° = -cos(180° - 80°) = -cos\,100°,$ por tanto

$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$

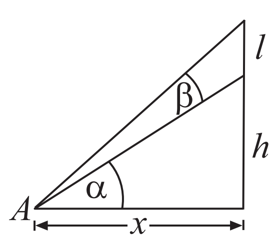
j)

$\frac{sen\,6\alpha}{sen\,2\alpha} - \frac{cos\,6\alpha}{cos\,2\alpha} = \frac{sen\,6\alpha\ cos\,2\alpha - sen\,2\alpha\ cos\,6\alpha}{sen\,2\alpha\ cos\,2\alpha}$

$= \frac{sen(6\alpha - 2\alpha)}{\frac{1}{2}\ sen\,4\alpha} = 2.$

8. En la cúspide de un edificio se encuentra una antena de l m. si desde un punto A situado en un plano horizontal, el ángulo de elevación del edificio es α y la antena subtiende un ángulo β desde el mismo punto. Demuestre que la altura del edificio es $l\,sen\,\alpha\ cosec\,\beta\ cos(\alpha+\beta)$ y que la distancia desde A a la base es $l\ cos\,\alpha\ cosec\,\beta\ cos(\alpha+\beta)$

Solución.



$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = \frac{h}{x} \\ tg(\alpha+\beta) = \frac{l+h}{x} \end{array}\right\}$$

de aquí se obtiene

$$h = \frac{l\,tg\,\alpha}{tg(\alpha+\beta) - tg\,\alpha}$$

$h = \frac{l\, sen\, \alpha}{cos\left[\frac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)} - \frac{sen\, \alpha}{cos\, \alpha}\right]} = \frac{l\, sen\, \alpha\, cos(\alpha+\beta)}{sen(\alpha+\beta)\, cos\, \alpha - cos(\alpha+\beta) sen\, \alpha}$

$h = \frac{l\, sen\, \alpha\, cos(\alpha+\beta)}{sen(\alpha+\beta-\alpha)} = l\ sen\, \alpha\ cosec\, \beta\ cos(\alpha+\beta)$

así también $x = h\, cotg\, \alpha \Longrightarrow x = l\ cos\, \alpha\ cosec\, \beta\ cos(\alpha+\beta)$

9. Si $tg\, \beta = tg\, 2\alpha$, demuestre que $tg(\alpha-\beta) + tg\, \alpha = 0$

   Demostración.

   $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\, \alpha - tg\, \beta}{1 - tg\, \alpha\ tg\, \beta} = \frac{tg\, \alpha - tg\, 2\alpha}{1 - tg\, \alpha\ tg\, 2\alpha}$

   $= \frac{-tg\, \alpha - tg^3\, \alpha}{1 + tg^2\, \alpha} = -tg\, \alpha \Longrightarrow tg(\alpha-\beta) + tg\, \alpha = 0$

10. Demostrar que

$$cotg\, \alpha - 8\, cotg\ 8\, \alpha = tg\, \alpha + 2tg\, 2\alpha + 4tg\ 4\alpha$$

   Demostración.

   Previamente note que, como $cotg\, 2\alpha = \frac{cotg^2 \alpha - 1}{2\, cotg\, \alpha} = \frac{1}{2}\, cotg\, \alpha - \frac{1}{2}\, tg\, \alpha$ y de aquí: $tg\, \alpha = cotg\, \alpha - 2\, cotg\ 2\alpha$, entonces

$$tg\, \alpha + 2\, tg\, 2\alpha + 4\, tg\, 4\alpha = cotg\alpha - 2cotg\, 2\alpha + 2(cotg\, 2\alpha - 2cotg\, 4\alpha) +$$

$$+4(cotg\, 4\alpha - 2\ cotg\, 8\alpha) = cotg\, \alpha - 8\ cotg\, 8\alpha.$$

11. Demuestre que si $sen\, \alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$, entonces el valor de $32\ cos\dfrac{\alpha}{2}\ cos\dfrac{5}{2}\alpha$ es -7 o bien 11.

   Demostración.

   Si $sen\, \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ entonces $\alpha \in \mathrm{I}$ o bien $\alpha \in \mathrm{II}$ cuadrantes, por tanto si $\alpha \in \mathrm{I} \Longrightarrow cos\, \alpha = \frac{3}{4}$ y como $32cos\, \frac{\alpha}{2}\ cos\frac{5}{2}\, \alpha = 32 \cdot \frac{1}{2}\, [cos\, 3\alpha + cos\, \alpha]$
   $= 16[4\, cos^3\, \alpha - 3\, cos\alpha + 2\, cos^2\alpha - 1] = 16 \cdot \left(-\frac{7}{16}\right) = -7$
   si $\alpha \in \mathrm{II} \Longrightarrow cos\, \alpha = -\frac{3}{4} \Longrightarrow 32cos\frac{\alpha}{2}\ cos\frac{5}{2}\alpha = 11$

12. Si $3\; sen(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)=0$, demuéstrese que

$$2\,cotg\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

Demostración.

Como de la hipótesis, se puede expresar $2(sen(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta))=cos(\alpha-\beta)-sen(\alpha+\beta)$ y aplicando las fórmulas de prostaféresis, se obtiene:

$$4sen\left(\tfrac{\pi}{4}+\beta\right)\; cos\left(-\tfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=2\; cos\left(\tfrac{\pi}{4}+\beta\right)\; sen\left(\tfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

$$2\,\frac{sen\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)}{cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)}=\frac{sen\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)};\quad cos\left(-\tfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=cos\left(\tfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

$2\; tg\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ pero $cotg\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$

así $2\,cotg\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

13. Si $2\,cos\dfrac{u}{2}=sen\,v$ demuestre que

$$cotg\,\frac{u+v}{4}\; cotg\frac{u-v}{4}=cotg^2\left(\frac{\pi-v}{4}\right)$$

Demostración.

$$cotg\,\tfrac{u+v}{4}\; cotg\,\tfrac{u-v}{4}=\frac{cos\frac{u+v}{4}\; cos\frac{u-v}{4}}{sen\frac{u+v}{4}\; sen\frac{u-v}{4}}=\frac{\frac{1}{2}\left[cos\frac{u}{2}+cos\frac{v}{2}\right]}{-\frac{1}{2}\left[cos\frac{u}{2}-cos\frac{v}{2}\right]}$$

$=\dfrac{cos\frac{v}{2}+cos\frac{u}{2}}{cos\frac{v}{2}-cos\frac{u}{2}}$ pero $2\,cos\dfrac{u}{2}=senv\iff$

$\iff 2cos\,\frac{u}{2}=2\; sen\frac{v}{2}\; cos\frac{v}{2}$, por tanto

$$=\frac{cos\frac{v}{2}\left(1+sen\frac{v}{2}\right)}{cos\frac{v}{2}\left(1-sen\frac{v}{2}\right)}=\frac{1+cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{v}{2}\right)}{1-cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{v}{2}\right)}$$

$$=cotg^2\left(\tfrac{\pi-v}{4}\right)$$

14. Demuestre que eliminando θ entre las ecuaciones

$$x = 2\,sen\theta + 2 sen\,3\theta$$

$$y = 4\,cos^3\theta + 2\,cos\,3\theta$$

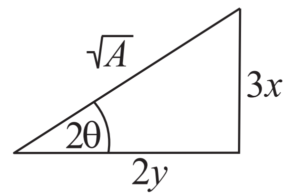
se obtiene: $A^{3/2} = 72(\sqrt{A} + 2y),\ A = 9x^2 + 4y^2$

Demostración.

$y = cos\,3\theta + 3\,cos\theta + 2\,cos\,3\theta$

$y = 3\,cos\theta + 3\,cos\,3\theta$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{2} = sen\,\theta + sen\,3\theta \Longleftrightarrow \frac{x}{2} = 2\ sen\,2\theta\ cos\,\theta \\ \\ \frac{y}{3} = cos\,\theta + cos\,3\theta \Longleftrightarrow \frac{y}{3} = 2\,cos\,2\theta\ cos\,\theta \end{array}\right\} tg\,2\theta = \frac{3x}{2y} \longrightarrow$$



$A = 9x^2 + 4y^2$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{4\,cos\theta} = sen\,2\theta \\ \frac{y}{6\,cos\,\theta} = cos\,2\theta \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x^2}{16\,cos^2\theta} + \frac{y^2}{36\,cos^2\theta} = 1$$

$9x^2 + 4y^2 = 144\,cos^2\theta$

pero $cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{y}{\sqrt{A}} \Longrightarrow 9x^2 + 4y^2 = 72 + \frac{144y}{\sqrt{9x^2+4y^2}}$

de aquí: $A^{3/2} = 72(\sqrt{A} + 2y);$ con $A = 9x^2 + 4y^2.$

15. Resolver, considerando $0 \leq x \leq 2\pi$, las siguientes ecuaciones:

a) $cos\,x - sen\,2x = cos\,3x - sen\,4x$

b) $2\,sen\,4x\ sen\,x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,sen 3x - 2\,cos^2\dfrac{5x}{2} + 1$

c) $cosec\,x + cosec\,5x = 0$

d) $tg\,x + tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\left(\dfrac{3\pi}{4} + x\right) = 3$

e) $cos^2\,2x + 3\,sen\,2x - 3 = 0$

f) $\dfrac{cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{sen\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - sen\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)} + \sqrt{2}\,cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = 0$

g) $cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=cos\left(6x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

h) $sen\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\;cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\;sen\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$

Solución.

a)

$sen4x-sen\,2x=cos\,3x-cos\,x$

$2\;cos\,3x\;sen\,x=-2\;sen\,2x\;sen\,x$

$senx(cos\,3x+sen\,2x)=0$ de aquí

$sen\,x=0$ o $cos\,3x+sen\,2x=0$

$\Updownarrow$

$x=0,\;x=\pi$ o $x=2\pi$

$cos\,3x+sen\,2x=0\Longleftrightarrow 4\,cos^3x-3\,cosx+2senx\;cosx=0$

$\Longleftrightarrow cos\,x(4\,cos^2x-3+2\,sen\,x)=0$

$cos\,x=0\Longleftrightarrow x=\frac{\pi}{2},\;x=\frac{3\pi}{2}$ o bien

$4\,sen^2x-2\,sen\,x-1=0\Longleftrightarrow sen\,x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$sen\,x=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Longrightarrow x=54^\circ,\;x=126^\circ$

$sen\,x=\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Longrightarrow x=198^\circ,\;x=342^\circ$

Vamos a justificar, los resultados anteriores. Previo calcularemos $sen18^\circ$, sea $\alpha=18^\circ$

$5\,\alpha=90^\circ\Longleftrightarrow 3\,\alpha=90^\circ-2\,\alpha\Longleftrightarrow cos\,3\alpha=sen\,2\alpha$

$4\,cos^3\alpha-3\,cos\,\alpha=2\,sen\,\alpha\;cos\,\alpha,$ dividiendo por $cos\,\alpha\neq 0$

$4sen^2\alpha+2\,sen\alpha-1=0\Longrightarrow sen\,\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$, de aquí

$sen\,18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, ahora

$sen\,54^\circ=cos\,36^\circ=1-2\,sen^2\,18^\circ;\quad cos\,2\theta=1-2sen^2\,\theta$

$sen\,54^\circ=1-2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

b)

$2\,sen\,4x\;sen\,x=\frac{1}{\sqrt{3}}\,sen\,3x-2\,cos^2\,\frac{5x}{2}+1$

$-2\,\frac{1}{2}[cos\,5x-cos\,3x]=\frac{1}{\sqrt{3}}\,sen\,3x-cos\,2\left(\frac{5x}{2}\right)$

$-cos\,5x+cos\,3x=\frac{1}{\sqrt{3}}\,sen3x-cos\,5x\Longrightarrow tg\,3x=\sqrt{3}$

$x=\frac{\pi}{9},\;x=\frac{4\pi}{9},\;x=\frac{7\pi}{9},\;x=\frac{10}{9},\;x=\frac{13}{9}\pi$

y $x=\frac{16}{9}\pi$

c)

$cosec\,x+cosec\,5x=0\Longleftrightarrow sen\,5x+sen\,x=0$

$2\;sen\,3x\cdot\,cos\,2x=0\Longleftrightarrow sen\,3x=0$ o $cos\,2x=0$

$sen\,3x=0\Longleftrightarrow x=\frac{\pi}{3};\;x=\frac{2\pi}{3},\;x=\frac{4\pi}{3},\;x=\frac{5\pi}{3}$

note que $x=0,\;\pi$ y 2π no son soluciones de la ecuación dada.

$cos\,2x=0\Longleftrightarrow x=\frac{\pi}{4},\;x=\frac{3\pi}{4},\;x=\frac{5\pi}{4},\;x=\frac{7\pi}{4}$

d)

$tg\,x+tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+tg\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)=3$

$tg\,x+\frac{1-tg\,x}{1+tg\,x}+\frac{-1+tg\,x}{1+tg\,x}=3$

$tg\,x+tg^2x+1-tg\,x-1+tg\,x=3+3\,tgx$

$tg^2x-2\,tgx-3=0\Longrightarrow tg\,x=3$ o $tg\,x=-1$

note que $tg\,x=-1$ no es solución de la ecuación,en tanto que: $tg\,x=3\Longleftrightarrow x\simeq 1.249,\;x\simeq 4.39$ (radianes).

e)

$cos^2\,2x+3\,sen\,2x-3=0$

$1-sen^2\,2x+3\,sen\,2x-3=0\Longleftrightarrow sen^2 2x-3\,sen\,2x+2=0$

$\Longleftrightarrow\;sen\,2x=2$ que no da solución o bien

$sen\,2x=1\Longrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ o $x=\frac{5\pi}{4}$

f)
$$\frac{cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{sen\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)-sen\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}+\sqrt{2}\,cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0$$

$\frac{-2\,sen\frac{\pi}{4}\,sen(-x)}{2\,cos\frac{2\pi}{3}\,senx}+\sqrt{2}\,senx=0 \Longleftrightarrow -\sqrt{2}+\sqrt{2}\,senx=0$

$sen\,x=1 \Longleftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$

g)
$cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right) \Longleftrightarrow cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$-2\,sen\,4x\;sen\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0$

$sen\,4x=0 \Longrightarrow x=0,\ x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{3\pi}{4},\ x=\pi,$

$x=\frac{5\pi}{4},\ x=\frac{3\pi}{2},\ x=\frac{7\pi}{4}$ y $x=2\pi$

o $sen\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0 \Longrightarrow x=\frac{\pi}{8},\ x=\frac{5\pi}{8},\ x=\frac{9\pi}{8}$ y $x=\frac{13\pi}{8}$

h)
$sen\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\;cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\;sen\left(\frac{\pi}{6}-x\right) \Longleftrightarrow$

$tg\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=tg\left(\frac{\pi}{6}-x\right) \Longrightarrow 3x=k\pi-\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}$
de aquí : $x=-\frac{\pi}{18},\ x=\frac{5\pi}{18},\ x=\frac{11\pi}{18},\ x=\frac{17}{18}\pi,\ x=\frac{23}{18}\pi$

$x=\frac{29}{18}\pi,\ x=\frac{35}{18}\pi$

otra forma de resolver la ecuación es

$sen\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\;cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\;sen\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=0$

$\Longleftrightarrow sen\left(2x+\frac{\pi}{3}-\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right)=0 \Longleftrightarrow sen\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=0$

relación que entrega las mismas soluciones.

16. Si $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, demuestre:

a) $cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma+2\,cos\,\alpha\;cos\,\beta\;cos\,\gamma=1$

b) $cos\,\alpha+cos\,\beta-cos\,\gamma+1=4\,cos\frac{\alpha}{2}\;cos\frac{\beta}{2}\;sen\frac{\gamma}{2}$

c) $sen\,2\alpha+sen\,2\beta+sen\,2\gamma=4\,sen\,\alpha\;sen\,\beta\;sen\,\gamma$

$d)$ $\dfrac{cos^2\gamma + cos(\alpha+\beta)\, cos(\alpha-\beta)}{sen^2\gamma + sen(\alpha+\beta)\, sen(\alpha-\beta)} = -cotg\,\alpha\; cotg\,\gamma$

$e)$ $cos\dfrac{\alpha}{2} - cos\dfrac{\beta}{2} + cos\dfrac{\gamma}{2} = 4\, cos\dfrac{\pi+\alpha}{4}\; cos\dfrac{\pi-\beta}{4}\; cos\dfrac{\pi+\gamma}{4}$

$f)$ $\dfrac{sen\,\alpha + sen\,\beta + cos\,\gamma + 1}{sen\,\alpha - sen\,\beta - cos\,\gamma + 1} = cotg\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\beta}{2}\right)\, cotg\dfrac{\gamma}{2}$

Demostración.

$a)$

$$\alpha+\beta = \pi-\gamma \Longleftrightarrow cos(\alpha+\beta) = -cos\,\gamma$$

$$cos\,\alpha\; cos\,\beta - sen\,\alpha\; sen\,\beta = -cos\,\gamma$$

$$cos\,\alpha\; cos\,\beta + cos\,\gamma = sen\,\alpha\; sen\,\beta$$

$$cos^2\alpha\; cos^2\,\beta + 2\,cos\,\gamma\; cos\,\beta\; cos\,\gamma + cos^2\,\gamma = sen^2\,\alpha\; sen^2\,\beta$$

$$cos^2\alpha\; cos^2\beta + 2\; cos\,\alpha\; cos\,\beta\; cos\,\gamma + cos^2\gamma = (1-cos^2\alpha)(1-cos^2\beta)$$

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma + 2\,cos\,\alpha\; cos\,\beta\; cos\,\gamma = 1$$

$b)$

$$cos\,\alpha + cos\,\beta + 1 - cos\,\gamma = 2\,cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\; cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + 2\,sen^2\tfrac{\gamma}{2}$$

pero $cos\frac{\alpha+\beta}{2} = cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = sen\frac{\gamma}{2},$ así
$2\,sen\frac{\gamma}{2}\left(cos\frac{\alpha-\beta}{2} + sen\frac{\gamma}{2}\right)$

$$= 2\,sen\tfrac{\gamma}{2}\left(cos\tfrac{\gamma-\beta}{2} + cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 2\,sen\tfrac{\gamma}{2}\; 2cos\tfrac{\alpha}{2}\; cos\,\tfrac{\beta}{2} = 4\; cos\tfrac{\alpha}{2}\; cos\tfrac{\beta}{2}\; sen\tfrac{\gamma}{2}$$

$c)$

$$sen\,2\alpha + sen\,2\beta + sen\,2\gamma = 2\,sen(\alpha+\beta)\; cos(\alpha-\beta) + 2\,sen\,\gamma\; cos\,\gamma$$

pero : $sen(\alpha+\beta) = sen(\pi-\gamma) = sen\,\gamma$
y $\quad cos(\alpha+\beta) = cos(\pi-\gamma) = -cos\,\gamma,$ así

$$= 2\,sen\,\gamma(cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta))$$

$$2\; sen\,\gamma(-2\,sen\,\alpha\; sen(-\beta)) = 4\,sen\,\alpha\; sen\,\beta\; sen\,\gamma$$

d)

$$\frac{cos^2\gamma+cos(\alpha+\beta)\;cos(\alpha-\beta)}{sen^2\gamma+sen(\alpha+\beta)\;sen(\alpha-\beta)}=\frac{cos^2\gamma+cos(\pi-\gamma)\;cos(\alpha-\beta)}{sen^2\gamma+sen(\pi-\gamma)\;sen(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{cos\,\gamma(cos\,\gamma-cos(\alpha-\beta))}{sen\,\gamma(sen\,\gamma+sen(\alpha-\beta))}\text{ pero }\begin{array}{l}cos\,\gamma=-cos(\alpha+\beta)\\ sen\,\gamma=sen(\alpha+\beta)\end{array}$$

$$\frac{-cos\,\gamma(cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta))}{sen\,\gamma(sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta))}=-cotg\,\gamma\frac{2\,cos\,\alpha\,cos\,\beta}{2\,sen\,\alpha\,cos\,\beta}$$

$$=-cotg\,\alpha\;cotg\,\gamma$$

e)

$$4\,cos\left(\frac{\pi+\alpha}{4}\right)\;cos\left(\frac{\pi-\beta}{4}\right)\;cos\left(\frac{\pi+\gamma}{4}\right)=$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta-\alpha}{4}\right)+cos\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right)\right]cos\left(\frac{\pi-\gamma}{4}\right)$$

$$=2\,sen\,\frac{\beta-\alpha}{4}\;cos\left(\frac{\pi+\gamma}{4}\right)+2\;cos\,\frac{\alpha+\beta}{4}\;cos\left(\frac{\pi+\gamma}{4}\right)$$

$$=sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta+\gamma}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)+sen\left(\frac{\beta}{4}-\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{4}\right)$$
$$+cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}\right)+cos\left(\frac{\alpha+\beta}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{4}\right)$$

$$=sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi-\alpha}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)+sen\left(\frac{\beta}{4}-\frac{\pi-\beta}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+cos\left(\frac{\pi-\gamma}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{4}\right)$$

$$=sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+sen\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{4}\right)\right)+cos\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$=cos\,\frac{\alpha}{2}-cos\frac{\beta}{2}+cos\frac{\gamma}{2}$$

f)

$$\frac{sen\,\alpha+sen\,\beta+1+cos\,\gamma}{sen\,\alpha-sen\,\beta+1-cos\,\gamma}=\frac{2\,sen\frac{\alpha+\beta}{2}\;cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\;cos^2\frac{\gamma}{2}}{2\;cos\frac{\alpha+\beta}{2}\;sen\frac{\alpha-\beta}{2}+2\,sen^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$=\frac{cos\frac{\gamma}{2}\left(cos\frac{\alpha-\beta}{2}+cos\frac{\gamma}{2}\right)}{sen\frac{\gamma}{2}\left(sen\frac{\alpha-\beta}{2}+sen\frac{\gamma}{2}\right)}=cotg\frac{\gamma}{2}\;\frac{cos\frac{\alpha-\beta}{2}+sen\frac{\alpha+\beta}{2}}{sen\frac{\alpha-\beta}{2}+cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$=cotg\frac{\gamma}{2}\;\frac{cos\frac{\alpha-\beta}{2}+cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{sen\frac{\alpha-\beta}{2}+sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=cotg\frac{\gamma}{2}\;\frac{2\,cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$=cotg\frac{\gamma}{2}\;cotg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$$

17. Si $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ demuestre que

$$\frac{sen\,\alpha}{cos\,\beta\;cos\,\gamma}+\frac{sen\,\beta}{cos\,\alpha\;cos\,\gamma}+\frac{sen\,\gamma}{cos\,\alpha\;cos\,\beta}=2tg\,\alpha\;tg\,\beta\;tg\,\gamma$$

Demostración.

$$\frac{sen\,\alpha}{cos\,\beta\;cos\,\gamma}+\frac{sen\,\beta}{cos\,\alpha\;cos\,\gamma}+\frac{sen\,\gamma}{cos\,\alpha\;cos\,\beta}=\frac{sen\,\alpha\;cos\,\alpha+sen\,\beta\;cos\,\beta+sen\,\gamma\;cos\,\gamma}{cos\,\alpha\;cos\,\beta\;cos\,\gamma}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(sen\,2\alpha+sen\,2\beta+sen\,2\gamma}{cos\,\alpha\;cos\,\beta\;cos\,\gamma)}\ \text{pero por ejercicio (3.15 - 16 c)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot 4\,sen\,\alpha\;sen\,\beta\;sen\,\gamma}{cos\,\alpha\;cos\,\beta\;cos\,\gamma}=2\;tg\,\alpha\;tg\,\beta\;tg\,\gamma.$$

18. Si $\dfrac{2}{tg\,\alpha+cotg\,\alpha}=cos\,2\beta$ demostrar que un valor de $\alpha-\beta$ o de $\alpha+\beta$ es $\dfrac{\pi}{4}$.

Demostración.

$$\frac{2}{\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}+\frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}}=cos\,2\,\beta$$

$$\Longrightarrow 2\,sen\,\alpha\;cos\,\alpha=cos\,2\beta\Longleftrightarrow sen\,2\alpha-cos\,2\beta=0$$

$$sen\,2\alpha-sen\left(\tfrac{\pi}{2}-2\,\beta\right)=0$$

$$2\,cos\left(\tfrac{\pi}{4}+\alpha-\beta\right)sen\;\left(\alpha+\beta-\tfrac{\pi}{4}\right)=0\Longleftrightarrow$$

$$cos\left(\tfrac{\pi}{4}+\alpha-\beta\right)=0\Longrightarrow\tfrac{\pi}{4}+\alpha-\beta=\tfrac{\pi}{2}\Longrightarrow\alpha-\beta=\tfrac{\pi}{4}$$

$$\text{o}\;sen\left(\alpha+\beta-\tfrac{\pi}{4}\right)=0\Longrightarrow\alpha+\beta-\tfrac{\pi}{4}=0\Longrightarrow\alpha+\beta=\tfrac{\pi}{4}$$

19. Si $tg(\alpha+\theta)=2\,tg(\alpha-\theta)$ demuestre que

$$3\,sen\,2\theta=sen\,2\alpha$$

Demostración.

$$\frac{sen(\alpha+\theta)}{cos(\alpha+\theta)}=2\frac{sen(\alpha-\theta)}{cos(\alpha-\theta)}$$

$$sen(\alpha+\theta)\,cos(\alpha-\theta)=2\,sen(\alpha-\theta)\,cos(\alpha+\theta)$$

$\frac{1}{2}\,[sen\,2\alpha + sen\,2\theta] = sen\,2\alpha + sen(-2\theta)$

$sen\,2\alpha + sen\,2\theta = 2\,sen\,2\alpha - 2\,sen\,2\theta$

$3sen\,2\theta = sen\,2\alpha.$

20. Si $cos\,\gamma = \dfrac{cos\,\alpha - cos\,\beta}{1 - cos\,\alpha\;cos\,\beta}$ demuestre que un valor de $tg\,\dfrac{\gamma}{2}$ es $tg\,\dfrac{\alpha}{2}\;cotg\dfrac{\beta}{2}$; α y β dados

Demostración.

Nótese que

$$\frac{1-cos\,\gamma}{1+cos\,\gamma} = \frac{1-cos\,\alpha\;cos\,\beta-cos\,\alpha+cos\,\beta}{1-cos\,\alpha\;cos\,\beta+cos\,\alpha-cos\,\beta}$$

$$\frac{1-cos\,\gamma}{1+cos\,\gamma} = \frac{(1-cos\,\alpha)(1+cos\,\beta)}{(1+cos\,\alpha)(1-cos\,\beta)}$$

como $tg^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1-cos\,\gamma}{1+cos\,\gamma} \Longrightarrow tg^2\frac{\gamma}{2} = tg^2\frac{\alpha}{2}\cdot cotg^2\frac{\beta}{2}$ de aquí se deduce lo pedido.

21. Si $\alpha + \beta = \pi$ demuestre que

$$cos^2\alpha + cos^2\beta = 2\;(1 - sen\,\alpha\;sen\,\beta)$$

Demostración.

$\alpha + \beta = \pi \Longleftrightarrow \alpha = \pi - \beta \Longleftrightarrow cos\,\alpha = -cos\,\beta$

$cos\,\alpha + cos\,\beta = 0 \Longleftrightarrow cos^2\alpha + cos^2\,\beta = -2\,cos\,\alpha\;cos\,\beta$

$cos^2\alpha + cos^2\beta = -2\cdot\frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)]$ pero $\alpha + \beta = \pi$

$cos^2\alpha + cos^2\beta = -(-1 + cos\,\alpha\;cos\,\beta + sen\,\alpha\;sen\,\beta)$

$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos\,\alpha\;cos\,\beta = 1 - sen\,\alpha\;sen\,\beta$

pero $cos\,\alpha\;cos\,\beta = -\frac{1}{2}(cos^2\alpha + cos^2\beta)$, luego

$cos^2\alpha + cos^2\beta - \frac{1}{2}(cos^2\alpha + cos^2\beta) = 1 - sen\,\alpha\;sen\,\beta$

de aquí $cos^2\alpha + cos^2\beta = 2(1 - sen\,\alpha\;sen\,\beta)$.

22. Elimine θ entre las ecuaciones

$$a\,sec\,\theta - x\,tg\,\theta = y$$

$$b\,sec\,\theta + y\,tg\,\theta = x$$

Solución.

Resolviendo el sistema para $sec\,\theta$ y $tg\,\theta$, se obtienen:

$sec\,\theta = \frac{x^2+y^2}{ay+bx}$ si $tg\,\theta = \frac{ax-by}{ay+bx}$

$sec^2\theta - tg^2\theta = 1 = \frac{(x^2+y^2)^2}{(ay+bx)^2} - \frac{(ax-by)^2}{(ay+bx)^2} \Longleftrightarrow$

$(ay+bx)^2 + (ax-by)^2 = (x^2+y^2)^2 \Longleftrightarrow a^2+b^2 = x^2+y^2$

23. Demostrar

$$\frac{1}{cotg\,\theta + cotg^3\,\theta} + \frac{1}{tg\,\theta + tg^3\theta} = sec\,\theta\;cosec\,\theta - sen\,2\theta$$

Demostración.

$\frac{1}{cotg\,\theta+cotg^3\theta} + \frac{1}{tg\,\theta+tg^3\theta} = \frac{tg^3\theta}{sec^2\theta} + \frac{cotg^3\theta}{cosec^2\theta}$

$= \frac{sen^4\theta+cos^4\theta}{sen\,\theta\;cos\,\theta} = \frac{(sen^2\theta+cos^2\theta)^2-2\,sen^2\theta\;cos^2\,\theta}{sen\,\theta\;cos\,\theta}$

$= \frac{1}{sen\,\theta\;cos\,\theta} - 2\,sen\,\theta\;cos\,\theta = sec\,\theta\;cosec\,\theta - sen\,2\theta$

24. Si $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ y $cos\,\theta(sen\,\beta + sen\,\gamma) = sen\,\alpha$ demuestre que

$$tg^2\frac{\theta}{2} = tg\,\frac{\beta}{2}\;tg\frac{\gamma}{2},\;\alpha,\beta,\,\gamma \neq \pi$$

Demostración.

$cos\,\theta(sen\,\beta + sen\,\gamma) = sen\,\alpha$

$cos\,\theta\; 2sen\frac{\beta+\gamma}{2}\; cos\frac{\beta-\gamma}{2} = sen\,\alpha;\;\; \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$

$cos\,\theta\; 2cos\frac{\alpha}{2}\; cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 2\; sen\frac{\alpha}{2}\; cos\frac{\alpha}{2}$

$cos\,\theta\left[cos\frac{\beta}{2}\; cos\frac{\gamma}{2} + sen\frac{\beta}{2}\; sen\frac{\gamma}{2}\right] = sen\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right) = cos\frac{\beta+\gamma}{2}$
$cos\,\theta\left[cos\frac{\beta}{2}\; cos\frac{\gamma}{2} + sen\frac{\beta}{2}\; sen\frac{\gamma}{2}\right] = cos\frac{\beta}{2}\; cos\frac{\gamma}{2} - sen\frac{\beta}{2}\; sen\frac{\gamma}{2}$

de aquí $(1 - cos\,\theta)\left(cos\frac{\beta}{2}\; cos\frac{\gamma}{2}\right) = (1 + cos\,\theta)\left(sen\frac{\beta}{2}\; sen\frac{\gamma}{2}\right) \Longrightarrow$

$\frac{1-cos\,\theta}{1+cos\,\theta} = \frac{sen\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\beta}{2}}\frac{sen\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\gamma}{2}} \Longrightarrow tg^2\frac{\theta}{2} = tg\,\frac{\beta}{2}\; tg\frac{\gamma}{2}$

3.16. Ejercicios Propuestos

1. Reducir las siguientes expresiones en términos del ángulo α.

$$sen^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right); \qquad tg\left(\pi - sen\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right), \quad cosec\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$cos\left(\frac{5\pi}{4}-\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right); \quad cosec(1200^\circ+\alpha)$$

Respuesta.
$cos^2\alpha;\ tg(cos\,\alpha);\ sec\,\alpha;\ -cos\,\alpha\ -\frac{2}{sen\,\alpha+\sqrt{3}\,cos\,\alpha}$

2. Demuestre que

1) $tg(180^\circ+\alpha)-cotg(-\alpha)-cotg(270^\circ-\alpha)=cotg\,\alpha$

ii) $\dfrac{cos(90^\circ-\alpha)\ tg(180^\circ+\alpha)\ cos(720^\circ-\alpha)}{cotg(270^\circ-\alpha)\ sen(180^\circ+\alpha)\ tg(90^\circ+\alpha)}=sen\,\alpha$

3. Si $630^\circ<\alpha<720^\circ$, y $tg\,\alpha=-\dfrac{7}{24}$ calcular

i) $sen\,\alpha+cos\,\alpha$ ii) $cotg\,2\alpha$

Respuesta.
$\frac{17}{25};\ -\frac{527}{336}$

4. Si $\alpha=\dfrac{16}{3}\pi$. Hallar el valor de

$$A=4\,sen^2\frac{\alpha}{2}-2\,tg^2\alpha+sec^2\,3\alpha-3\,cotg^2\frac{\alpha}{2}$$

Respuesta.
-3

5. Si $sen\,\theta=-\dfrac{1}{3}$ encuentre el valor de $tg\,\theta$

Respuesta.
$\pm\frac{1}{\sqrt{8}}$

6. Si $\alpha + \beta = \dfrac{5\pi}{4}$, demuestre que

$$\frac{2}{(1 + tg\,\alpha)(1 + tg\,\beta)} = 1$$

7. Demostrar las siguientes identidades

   a) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\,cos\,8\theta}}} = 2\,cos\,\theta$

   b) $tg(15^\circ - \alpha)\,cotg\,15^\circ + cotg(75^\circ + \alpha)\cdot tg75^\circ = 2\,tg75^\circ\ cotg(\alpha + 75^\circ)$

   c) $\dfrac{cosec(45^\circ - \alpha) + cosec(45^\circ + \alpha)}{sec(30^\circ + \alpha) - sec(30^\circ - \alpha)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(sec\,2\alpha + 2)\,cotg\,\alpha$

   d) $3 + cotg^2\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) + 2\,cotg^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right) = 12\left(\dfrac{cosec\,\alpha}{\sqrt{3}\,cotg\,\alpha - 1}\right)^2$

   e) $\dfrac{cos\,3\theta - cos\,\theta}{2\,sen\,\theta + sen\,2\theta} = 2\,cotg\,\theta(cos\,\theta - 1)$

   f) $3tg\dfrac{\theta}{2} - tg\dfrac{3\,\theta}{2} = \dfrac{4\,sen\,\theta}{1 - 2\,cotg^2\,\theta(1 + cos\,\theta)}$

   g) $2\,sen\,70^\circ - 8\,cos\,10^\circ\ cos\,50^\circ\ cos\,80^\circ = 1$

   h) $cos\,10^\circ - \sqrt{3}\,cos\,20^\circ + cos\,50^\circ = 0$

   i) $\dfrac{cos\,3\alpha}{sen\,\alpha} + \dfrac{sen\,3\alpha}{cos\,\alpha} = 2\ cotg\,2\alpha$

   j) $\dfrac{cos\,3\alpha - sen\,3\alpha}{cos\,\alpha + sen\,\alpha} = 1 - 2\,sen2\alpha$

   Nota: Para demostrar todas estas identidades, ver en forma casi homóloga las identidades resueltas de (3.15 - 7).

8. Una torre BC de $80m.$ se encuentra sobre una cima AB de $20m.$ en la punta de la torre hay una antena CD de $25m.$, si desde un punto E situado en un plano horizontal la antena y la altura AB subtienden el mismo ángulo. Calcule la distancia EB desde E a la base de la torre.

   (Note que A, B, C y D están sobre la misma vertical, los puntos E y A en el mismo plano).

   Respuesta.

   224,5$m.$

9. Si $cos\,2\alpha + cos\,2\beta\ sen^2\beta = 0$ demuestre que

$$tg(\alpha + \beta) - tg(\alpha - \beta) = 4\ tg\,\beta\ sec\,2\beta.$$

10. Si $3\,tg\,\alpha = tg(\alpha+\beta)$ demuestre que

$$sen(2\,\alpha+\beta) = 2\,sen\,\beta$$

11. Si $cos\,\alpha = \dfrac{3}{5}$ y $sen\,\beta = \dfrac{1}{2}$, $\beta \in$ primer cuadrante. Calcule los posibles valores de A

$$A = sen(\alpha - 2\beta) + sen(\alpha + 2\beta)$$

Respuesta.

$A = \pm 0{,}8$

12. Si $sen\,\alpha = cos\,\alpha\;cos\,\beta$ demuestre que

$$tg(\alpha+\beta) - tg\,\beta = \frac{sec\,\beta}{1 - sen\,\beta}$$

13. Si $cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta) = 2\,cos\,\theta$ demuestre que

$$cotg^2\frac{\beta}{2} = cotg\frac{\theta+\alpha}{2}\;cotg\frac{\theta-\alpha}{2}$$

14. Elimine α entre las ecuaciones

$$x + y = 3 - cos\,3\alpha$$

$$x - y = 4\,sen\,2\alpha; \quad x \text{ e } y > 0$$

Respuesta.

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$

15. Elimínese θ entre las ecuaciones

$$x\,sen\,\theta - y\,cos\,\theta = c$$

$$\frac{cos^2\theta}{a^2} + \frac{sen^2\theta}{b^2} = \frac{1}{c^2}; \quad c = \sqrt{x^2+y^2}$$

Respuesta.

$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$

16. Si $cos\,\alpha = \dfrac{a}{b+c}$, $cos\,\beta = \dfrac{b}{a+c}$ y $cos\,\gamma = \dfrac{c}{a+b}$ demuestre que

$$tg^2\frac{\alpha}{2} + tg^2\frac{\beta}{2} + tg^2\frac{\gamma}{2} = 1$$

17. Resolver, considerando $0 \leq x \leq 2\pi$, las siguientes ecuaciones

    a) $2\,sen\,x + sen\,2x = sen\,3x$

    b) $sen\,4x\;cosx = \dfrac{1}{4} + sen\dfrac{5x}{2}\;cos\dfrac{5x}{2}$

    c) $sec\,x + sec\,3x = 0$

    d) $tg\,x + tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\left(\dfrac{3\pi}{4} + x\right) = 1$

    e) $sec^3x - \sqrt{2}tg^2x = \sqrt{2}$

    f) $\dfrac{sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + sen\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} - tg\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + tg\,x = 0$

    g) $sen\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = cos\left(4x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

    h) $tg(\pi\;cotg\;x) = 0$

    Nota: Ver ejercicios resueltos (3.15 - 15) homólogamente.

    Respuesta.

    a) $0,\ 180°,\ 360°,\ 130°38'\ 47.75''$ y $229°21'\ 13.25''$

    b) $\frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{18},\ \frac{13\pi}{18},\ \frac{17\pi}{18},\ \frac{25\pi}{18},\ \frac{29\pi}{18}$

    c) $\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$

    d) $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$

    e) $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$

    f) $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$

    g) $0,\ \pi,\ 2\pi;\ \frac{\pi}{12},\ \frac{13\pi}{12}$

    h) $\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$

18. Si $2\,sen(\alpha - \beta) = sec(\alpha + \beta)$ y $sen(\alpha + 2\beta) = 1 + cos\dfrac{\alpha}{2} + sen\,2\alpha$ demuestre que un valor de $(\alpha + 4\beta)$ es $\dfrac{\pi}{3}$

19. Si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ demuestre que

$$\frac{cos\,\alpha}{sen\,\beta\ sen\,\gamma} + \frac{cos\,\beta}{sen\,\alpha\ sen\,\gamma} + \frac{cos\,\gamma}{sen\,\alpha\ sen\,\beta} = 2$$

(Ver ejercicio resuelto (3.15 - 17))

20. Si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ demuestre que

    a) $cos\,\alpha + cos\,\beta - sen\,\gamma = 4\,sen\frac{\gamma}{2}\ sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\ sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$
    b) $tg\,\alpha\ tg\,\beta + tg\,\alpha\ tg\,\gamma + tg\,\beta\ tg\,\gamma = 1$
    c) $(cotg\,\alpha + cotg\,\beta)(cotg\,\beta + cotg\,\gamma)(cotg\,\gamma + cotg\,\alpha) = cosec\,\alpha\ cosec\,\beta\ cosec\,\gamma$

21. Demostrar que

    $3(sen\,2\alpha + cos\,2\alpha) + 3(cos\,4\alpha - sen\,4\alpha) + (sen\,8\alpha + cos\,8\alpha) + (cos\,10\alpha - sen\,10\alpha) = 8\,cos^3 3\alpha(sen\,\alpha + cos\,\alpha)$

22. Demostrar que

    a) $sen 54^\circ = sen\,162^\circ + sen 30^\circ$
    b) $sen\,\alpha - sen\,2\alpha + sen\,3\alpha = 4\,sen\frac{\alpha}{2}\ cos\,\alpha\ cos\frac{3\alpha}{2}$

23. Demostrar que

$$(cotg\,\alpha - cotg\,2\alpha)(sen\,\alpha + sen\,3\alpha) = 2cos\,\alpha$$

24. Elimine θ entre las ecuaciones

$$cos\,\theta - sen\,\theta = x$$

$$cos\,3\theta + sen\,3\theta = y$$

    y demuéstrese que $x + 2y^3 = 3y$

25. Demostrar que

a) $cos\,\alpha+cos\,\beta+cos\,\gamma+cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4\,cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\;cos\dfrac{\gamma+\alpha}{2}\;cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ y de aqui, si $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, compruébese que $cos\,\alpha+cos\,\beta+cos\,\gamma = 4\,sen\dfrac{\alpha}{2}\;sen\dfrac{\beta}{2}\;sen\dfrac{\gamma}{2}+1$

b) Si $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ demuestre que

$$\frac{cos\,2\alpha + cos\,2\beta - sen\,2\gamma}{cos\,2\alpha - cos\,2\beta + sen\,2\gamma} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)\;tg\,\gamma$$

c) Si $\alpha+\beta+\gamma = 0$, demuestre que

$$sen^2\gamma + sen^2\beta - sen^2\alpha = 2\,sen\;\gamma\;sen\,\beta\;cos\,\alpha$$

26. Demostrar que

a) $4\,cos\,8\,0^\circ + \sqrt{3}\;cotg80^\circ = 1$

b) $cotg\,40^\circ + cotg\,20^\circ = \sqrt{3}(cotg\,40^\circ\;cotg\,20^\circ - 1)$

27. Demostrar que

a) $4\,sen\,5\alpha\;cos\,3\alpha\;cos\,2\alpha = sen\,4\alpha + sen\,6\alpha + sen\,10\alpha$

b) $cos^2(\alpha-\beta) - cos(2\alpha-\beta)cos\,\beta = sen^2\alpha$

c) $tg(\alpha-\beta) + tg(\beta-\gamma) + tg(\gamma-\alpha) = tg(\alpha-\beta)\;tg(\beta-\gamma\;tg(\gamma-\alpha)$
(aplique: $tg(u+v)$ en forma acertada).

28. Si α y β son dos ángulos agudos y

$$3sen^2\,\alpha + 2sen^2\,\beta = 1$$

$$3sen\,2\alpha - 2sen\,2\beta = 0$$

entonces $\alpha + 2\,\beta = 90^\circ$