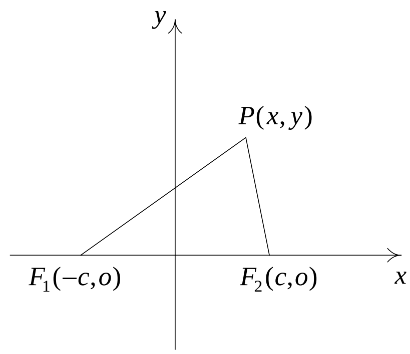
Capítulo 12

La elipse y la hipérbola

12.1 Definición.

Se llama **elipse**, al lugar geométrico de los puntos de un plano cuya **suma** de distancias a dos puntos fijos del mismo plano es constante. Los puntos fijos se acostumbran a llamar **focos.**



<u>Ecuación:</u>

Considerando los focos sobre el eje X y la distancia constante la denotaremos por $2a$, $a > 0$, sea $P(x, y)$ un punto cualquiera que pertenece a dicho lugar geométrico y sean $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, $c > 0$, las coordenadas de los focos, entonces de la definición se tiene

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

de donde se obtiene la ecuación

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \qquad (1)$$

Nótese que en el triángulo F_1PF_2 se tiene que

$$PF_1 + PF_2 > F_1F_2 \Rightarrow a > c$$

Ahora de (1) resulta : $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2$

sea $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow a > c$ y $a > b$ en tal caso $b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2$ y de aquí

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

Discusión de la ecuación (2) y gráfico

Intersecciones con los ejes coordenados

Intersección con el eje X, $x=\pm a$ de donde $V_1(-a,0)$ y $V_2(a,0)$ son las coordenadas de los vértices, y la longitud del eje mayor que es $2a$.

Intersección con el eje Y, $y=\pm b$ de donde $B_1(0,-b)$ y $B_2(0,b)$ son las coordenadas de los extremos del eje menor, cuya longitud es $2b$.

Simetrías

Al sustituir x por $-x$, la ecuación (2) no varía lo que indica que la curva tiene simetría con respecto al eje Y, analogamente si se sustituye y por $-y$, es decir la curva es simétrica con el eje X, lo mismo sucede cuando se sustituyen a la vez x por $-x$ e y por $-y$, la ecuación (2) no varía, luego tiene simetría con el origen de coordenadas, de aquí que el origen recibe el nombre de centro de simetría.

Dominio

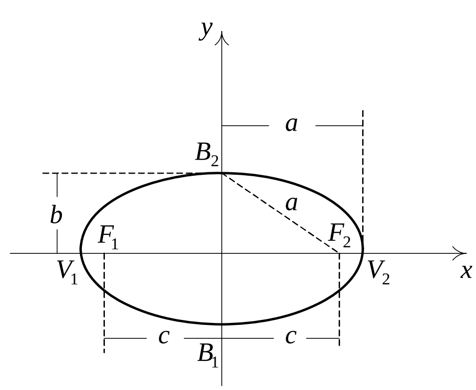
Despejando y en términos de x, se tiene $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, lo que nos conduce a: $-a\leq x\leq a$.

Recorrido

Despejando x en términos de y, se tiene $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$, lo que nos conduce a: $-b\leq y\leq b$.

Concavidad

Nótese también que : si $-a\leq x\leq a \Leftrightarrow \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}>\frac{b}{a}(a-x)$, lo que nos indica que la curva es cóncava hacia abajo $\forall y>0$.



Elementos de una elipse:

1. Sean F_1 y F_2 los focos de la elipse, la recta que pasa por los focos se suele llamar eje focal, en donde $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, $c>0$.

2. El eje focal corta a la curva en dos puntos V_1 y V_2 llamados vértices, cuyas coordenadas son : $V_1(-a,0)$ y $V_2(a,0)$

3. El segmento del eje focal comprendido entre los vértices, V_1V_2, se llama eje mayor cuya longitud es $2a$. El valor de a se llama semieje mayor.

4. El punto medio C del segmento que une los focos, se llama centro de simetría de la curva.

5. La recta que pasa por C y es perpendicular al eje focal se llama eje normal.

6. El segmento del eje normal comprendido entre los puntos, B_1B_2, se llama eje menor cuya longitud es $2b$. El valor de b se llama semieje menor.

7. Cualquier recta que pasa por el centro de simetría C, se llama diámetro de la elipse.

8. El segmento que pasa por un foco y corta a la elipse en los puntos A_1 y A_2 se llama cuerda focal.

9. Todo segmento comprendido entre un foco y un punto de la elipse se llama radio focal.

10. Una cuerda que pasa por un foco y es perpendicular al eje focal se llama lado recto, y su longitud es igual a $\dfrac{2b^2}{a}$

11. Por convenio, tomaremos siempre $a>b$, si es el caso $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, los vértices de la elipse yacen sobre el eje X, y si fuese $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$, los vértices se encuentran sobre el eje Y.

12. Se define por excentricidad de la elipse, al cuociente entre la distancia desde un foco al centro de simetría y la longitud del semieje mayor, es decir

$$e=\frac{c}{a},\ \text{note que siempre } e<1$$

Observe que si $e\to 0$ la elipse tiende a una circunferencia y si $e\to 1$ la elipse tiende a un trazo.

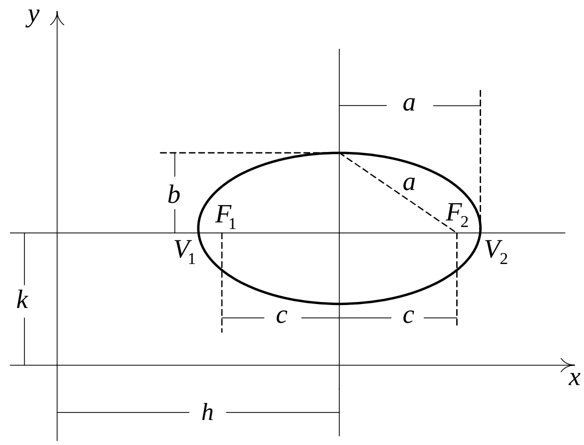
12.2 Otra forma de la ecuación de una elipse

Sea el punto (h, k) el centro de simetría de una elipse, por tanto las ecuaciones de traslación paralela de los ejes coordenados son: $x = x' + h$ e $y = y' + k$, y la ecuación de la elipse con respecto a los nuevos ejes $X'Y'$ cuyo origen es el punto (h, k), es:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \text{ de donde } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Obsérvese que los vértices son: $V_1(h - a, k)$ y $V_2(h + a, k)$

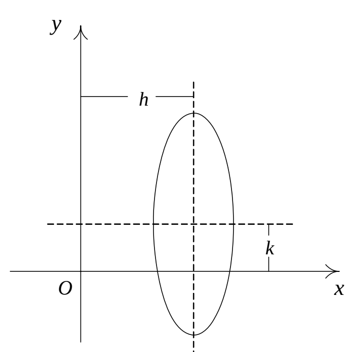
y los focos: $F_1(h - c, k)$ y $F_2(h + c, k)$



Analogamente para el caso de

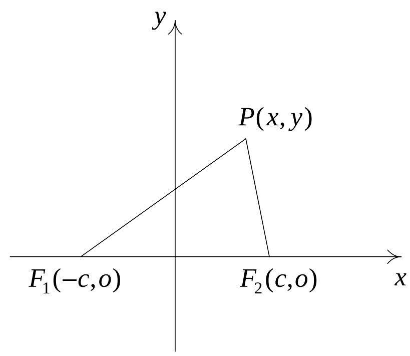
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

cuyo gráfico es



12.3 Definición.

Se llama **hipérbola**, al lugar geométrico de los puntos de un plano cuya **diferencia** de distancias a dos puntos fijos del mismo plano es constante. Los puntos fijos se acostumbran a llamar **focos.**



Ecuación:

Considerando los focos sobre el eje X y la distancia constante la denotaremos por $2a$, $a > 0$, sea $P(x,y)$ un punto cualquiera que pertenece a dicho lugar geométrico y sean $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, $c > 0$, las coordenadas de los focos, entonces de la definición se tiene

$$| PF_1 - PF_2 | = 2a$$

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

de donde se obtiene la ecuación

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \qquad (1)$$

Nótese que en el triángulo F_1PF_2 se tiene que

$$|PF_1 - PF_2| > F_1F_2 \Rightarrow c > a$$

Ahora, de (1) resulta : $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2 - a^2)a^2$

sea $b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow c > a$ y $c > b$ en tal caso $b^2x^2 - a^2y^2 = b^2a^2$ y de aquí

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

Discusión de la ecuación (2) y gráfico

Intersecciones con los ejes coordenados

Intersección con el eje X, $x = \pm a$ de donde $V_1(-a,0)$ y $V_2(a,0)$ son las coordenadas de los vértices.

Intersección con el eje Y, no tiene.

Simetrías

Al sustituir x por $-x$, la ecuación (2) no varía lo que indica que la curva tiene simetría con respecto al eje Y, analogamente si se sustituye y por $-y$, es decir la curva es simétrica con el eje X, lo mismo sucede cuando se sustituyen a la vez x por $-x$ e y por $-y$, la ecuación (2) no varía, luego tiene simetría con el origen de coordenadas, de aquí que el origen recibe el nombre de centro de simetría.

Dominio

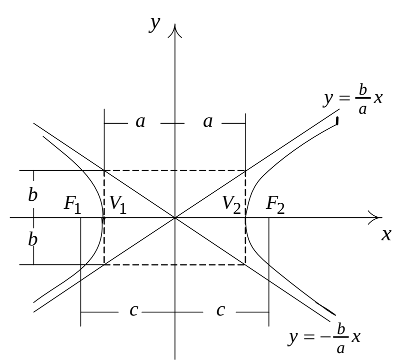
Despejando y en términos de x, se tiene $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, lo que nos conduce a: $x \leq -a \;\vee\; x \geq a$

Recorrido

Despejando x en términos de y, se tiene $x = \pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$, lo que nos conduce a: $-\infty \leq y \leq \infty$.

Concavidad

Nótese también que : si $x \leq -a \;\vee\; x \geq a \;\Leftrightarrow\; \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} > \dfrac{b}{a}(x - a)$, lo que nos indica que la curva es cóncava hacia abajo $\forall y > 0$.



<u>Elementos de una hipérbola:</u>

1. Sean F_1 y F_2 los focos de la hipérbola, la recta que pasa por los focos se suele llamar eje real o trasverso, en donde $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, $c > 0$.

2. El eje real corta a la curva en dos puntos V_1 y V_2 llamados vértices, cuyas coordenadas son : $V_1(-a, 0)$ y $V_2(a, 0)$

3. El valor de a se llama semieje real. El valor de b se conoce por semieje conjugado o imaginario.

4. El punto medio C del segmento que une los focos, se llama centro de simetría de la curva.

5. La recta que pasa por C y es perpendicular al eje real se llama eje imaginario.

6. Cualquier recta que pasa por el centro de simetría C, se llama diámetro de la hipérbola.

7. El segmento que pasa por un foco y corta a la hipérbola en los puntos A_1 y A_2 se llama cuerda focal.

8. Todo segmento comprendido entre un foco y un punto de la hipérbola se llama radio focal.

9. Una cuerda que pasa por un foco y es perpendicular al eje focal se llama lado recto, y su longitud es igual a $\frac{2b^2}{a}$

10. Si es el caso $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, los vértices de la hipérbola yacen sobre el eje X, y si fuese $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, los vértices se encuentran sobre el eje Y.

11. Se define por excentricidad de la hipérbola, al cuociente entre la distancia desde un foco al centro de simetría y la longitud del semieje mayor, es decir

$$e = \frac{c}{a}, \text{ note que siempre } e > 1$$

12. Las rectas $y = \pm \frac{b}{a}x$, se llaman asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, en tanto que $y = \pm \frac{a}{b}x$, son las asíntotas de la hipérbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

12.2 Otra forma de la ecuación de una hipérbola

Sea el punto (h, k) el centro de simetría de una hipérbola, por tanto las ecuaciones de traslación paralela de los ejes coordenados son:

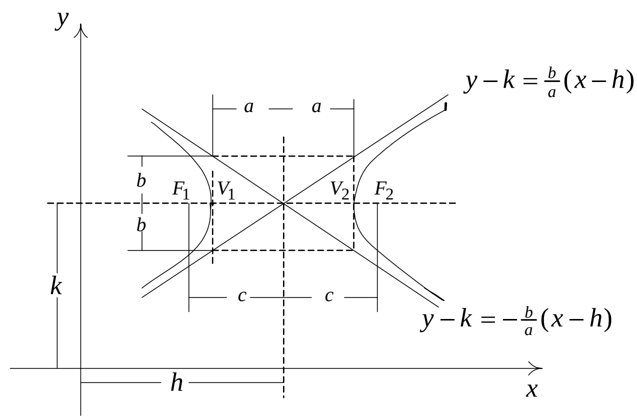
$$x = x' + h \text{ e } y = y' + k,$$

y la ecuación de la hipérbola con respecto a los nuevos ejes $X'Y'$ cuyo origen es el punto (h,k), es:

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1 \text{ de donde } \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Obsérvese que los vértices son: $V_1(h-a,k)$ y $V_2(h+a,k)$

y los focos: $F_1(h-c,k)$ y $F_2(h+c,k)$



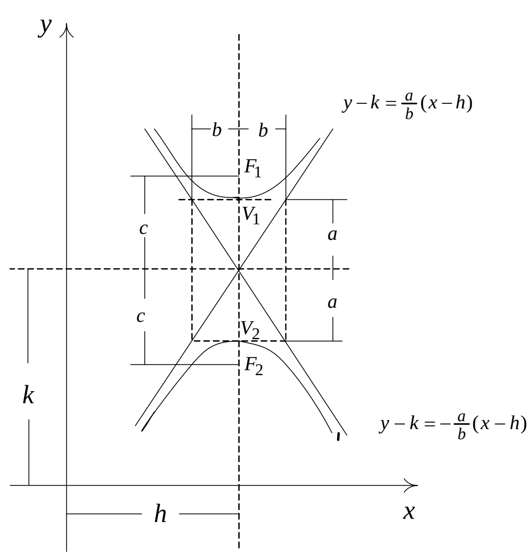
Note que las ecuaciones de sus asíntotas son en este caso

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$$

Analogamente para el caso de

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

cuyo gráfico es



12.3 Tangencia.

La ecuación de la tangente a la elipse o hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$ de ella es

$$\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

En efecto, $P_0(x_0, y_0)$ pertenece a estas curvas entonces $\dfrac{x_0^2}{a^2} \pm \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$

sea $$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad (2)$$

la ecuación de la tangente en cuestión, entonces efectuando la intersección de esta tangente con las curvas resulta

$$b^2 x \pm a^2[y_0 + m(x - x_0)]^2 = a^2 b^2$$

imponiendo la condición de tangencia $\Delta = 0$, resulta $m = \mp \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}$, por tanto de

(2) se tiene $y - y_0 = \mp \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}(x - x_0)$ de aquí ocupando (1) se obtiene

$$\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

por supuesto que el signo $"+"$ para la elipse y el $"-"$ para la hipérbola

Para los casos de

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} \pm \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

las ecuaciones de las tangentes en $P_0(x_0, y_0)$ son, respectívamente

$$\frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2} \pm \frac{(y_0-k)(y-k)}{b^2} = 1$$

la demostración se deja propuesta.

12.4 Ecuación general

Una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

Representa el lugar geométrico de una elipse real, si y solo si

$AC > 0$ con $A \neq C$ y $F < \dfrac{D^2}{4A} + \dfrac{E^2}{4C}$,

note que si $A = C$ y $4AF < D^2 + E^2$, el lugar, es el de una circunferencia

$AC > 0$ con $A \neq C$ y $F = \dfrac{D^2}{4A} + \dfrac{E^2}{4C}$, entonces el lugar se resume a un punto

$AC > 0$ con $A \neq C$ y $F > \dfrac{D^2}{4A} + \dfrac{E^2}{4C}$, entonces se dice que no hay un lugar geométrico real

Para el caso de una hipérbola,

$AC < 0$ y $F \neq \dfrac{D^2}{4A} + \dfrac{E^2}{4C}$, entonces el lugar geométrico es el de una hipérbola real

$AC < 0$ y $F = \dfrac{D^2}{4A} + \dfrac{E^2}{4C}$, entonces el lugar geométrico es el de 2 rectas que se cortan.

La demostración de estas afirmaciones, se deja al estudiante.

12.5 Ejercicios Resueltos

1. Determine: vértices, focos y las ecuaciónes de las asíntotas de la hipérbola

$$2x^2 - y^2 - 8x + 2y + 3 = 0$$

Solución.

Completando cuadrados se obtiene $\dfrac{(x-2)^2}{2} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$ de aquí se deducen: $a = \sqrt{2}$, $b = 2$ y $c = \sqrt{6}$ con lo que

$V_1(2-\sqrt{2}, 1)$, $V_2(2+\sqrt{2}, 1)$, $F_1(2-\sqrt{6}, 1)$ y $F_2(2+\sqrt{6}, 1)$

y las ecuaciónes de sus asíntotas $y - 1 = \pm\sqrt{2}(x-2)$

2. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3\right)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

Solución.

La ecuación pedida es de la forma $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$, donde $a=2b$ entonces

$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1$ como el punto $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2},3\right)$ pertenece a la elipse se debe tener

$\dfrac{\frac{7}{4}}{b^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1 \Rightarrow b^2=4$, con lo que $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$

3. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-1,3)$ y $(3,3)$ y su excentricidad es $\dfrac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes transverso, conjugado y de cada lado recto.

Solución.

Nótese que su centro de simetría es el punto $(1,3)$ entonces su ecuación es de la forma

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y-3)^2}{b^2}=1, \text{ donde } a^2=4$$

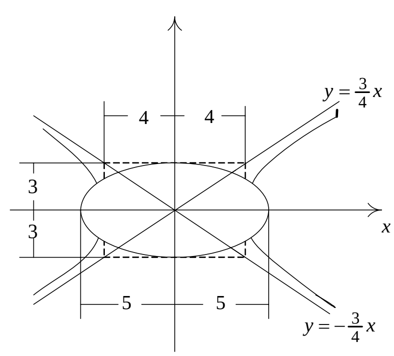
como $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow b^2=5$, entonces $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{5}=1$

Ahora como $c=3\Rightarrow F_1(-2,3)$ y $F_2(4,3)$

Longitud del eje trasverso $2a=4$, longitud del eje conjugado $2b=2\sqrt{5}$ y la longitud de cada lado recto $\dfrac{2b^2}{a}=5$

4. Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene por focos y vértices los vértices y focos de la elipse $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$, y luego encuentre las ecuaciones de sus asíntotas.

Solución.



Para la elipse

$$a^2=25 \text{ y } b^2=9 \Rightarrow c^2=16$$

Para la hipérbola

$$a^2 = 16 \text{ y } c^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 16$$

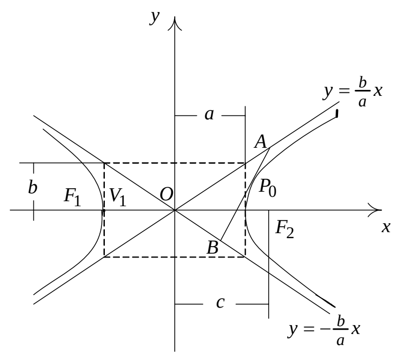
Por tanto la ecución pedida es $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Las ecuaciones de sus asíntotas son $y = \pm \dfrac{3}{4}x$

5. Demostrar que el triángulo formado por una tangente cualquiera a una hipérbola y sus asíntotas tiene un área constante

Demostración.

Sin perder generalidad se puede tomar la hipérbola de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Sea $P_0(u, v)$ que pertenece a la hipérbola, entonces $\dfrac{u^2}{a^2} - \dfrac{v^2}{b^2} = 1$ $\quad (1)$

La ecuación de la tangente en P_0 está dada por $b^2ux - a^2vy = a^2b^2$ $\quad (2)$

Las ecuaciones de las asíntotas son: $y = \pm \dfrac{b}{a}x$ $\quad (3)$

Resolviendo el sistema formado por (2) y (3), obtenemos las coordenadas de A y B, es decir :

$$A(\frac{a^2b}{ub - va}, \frac{ab^2}{ub - va}) \text{ y } B(\frac{a^2b}{ub + va}, -\frac{ab^2}{ub + va})$$

Ahora, el área del triángulo OAB está dado por

$$Area = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{a^2b}{ub + va} & -\dfrac{ab^2}{ub + va} & 1 \\ \dfrac{a^2b}{ub - va} & \dfrac{ab^2}{ub - va} & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^3b^3}{u^2b^2 - v^2a^2}$$

pero de (1) : $u^2b^2 - v^2a^2 = a^2b^2$ con lo que finalmente $Area = ab$

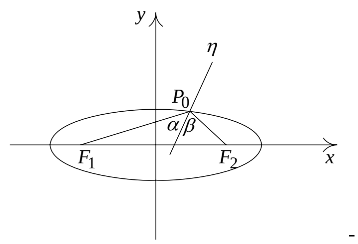
6. Demuestre que la normal a una elipse en uno cualquiera de sus puntos, es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.

Solución.

No se pierde generalidad al tomar la elipse cuya ecuación es

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (1)$$

Sea η la normal a la elipse en un punto $P_0(u,v)$ de la curva.



Sean α el ángulo formado por F_1P_0 y η, y β el ángulo entre F_2P_0 y η, vamos a demostrar que $\alpha = \beta$.

Sabemos que la ecuación de la tangente en P_0, está dada por $b^2ux + a^2vy = a^2b^2$ en que su pendiente es $m_t = -\dfrac{b^2u}{a^2v}$ por tanto $m_\eta = \dfrac{a^2v}{b^2u}$

Por otra parte las pendientes de los radios vectores F_1P_0 y F_2P_0 son respectivamente : $\dfrac{v}{u+c}$ y $\dfrac{v}{u-c}$, entonces

$$tg\,\alpha = \frac{\dfrac{v}{u+c} - \dfrac{a^2v}{b^2u}}{1 + \dfrac{v}{u+c}\dfrac{a^2v}{b^2u}} = \frac{b^2uv - a^2uv + a^2cv}{b^2u^2 - b^2cu + a^2v^2}$$

imponiendo la relación $c^2 = a^2 - b^2$ y la condición $b^2u^2 + a^2v^2 = a^2b^2$

y simplificando resulta $tg\,\alpha = \dfrac{cv}{b^2} \qquad (1)$

Analogamente se obtiene también que $tg\,\beta = \dfrac{cv}{b^2} \qquad (2)$

Por tanto por (1) y (2) se tiene $\alpha = \beta$.

7. Demostrar que las tangentes a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en $P_0(u,v_1)$ y $Q_0(u,v_2)$ $u \neq 0$ respectivamente, se cortan en un mismo punto sobre el eje X.

Demostración.

Las tangentes respectivas en los puntos indicados son.

$$b^2ux + a^2v_1y = a^2b^2 \quad \text{y} \quad ux + v_2y = a^2$$

intersecando cada una con el eje X, se obtiene el punto $(\frac{a^2}{u}, 0)$ en ambos casos.

8. Demostrar que las tangentes a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en una dirección m son:

$$y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 + b^2}$$

Demostración.

Sea el haz de rectas tangentes dadas por: $y = mx + n$, intersecando con la elipse dada se tiene

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2mna^2x + a^2(n^2 - b^2) = 0$$

Ahora, imponiendo la condición de tangencia $\triangle = 0$ resulta

$$4m^2n^2a^4 - 4\,(b^2 + a^2m^2)a^2(n^2 - b^2) = 0$$

de donde resolviendo para n, se obtiene $n = \pm\sqrt{m^2a^2 + b^2}$ luego la tangente es

$y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 + b^2}$.

9. Determine el lugar geométrico de los puntos desde donde se puedan trazar tangentes perpendiculares entre si a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Solución.

Sean $y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 + b^2}$ las tangentes a la elipse dada en cierta dirección m, con $m \neq 0$ y sus perpendiculares serán de la forma $y = -\frac{x}{m} \pm \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2}$

Eliminando el parámetro m entre ambas familias, obtenemos los puntos de intersección, que es el lugar geométrico en cuestión

De la primera se obtiene $\qquad y - mx = \pm\sqrt{m^2a^2 + b^2}$

De la segunda se obtiene $\qquad x + my = \pm\sqrt{m^2b^2 + a^2}$

De donde elevando al cuadrado cada una y sumando miembro a miembro se tiene

$$(1 + m^2)y^2 + (1 + m^2)x^2 = a^2(1 + m^2) + b^2(1 + m^2)$$

y de aquí resulta la circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{a^2 + b^2}$ es decir

$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, que es la ecuación del lugar geométrico pedido.

10. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de las proyecciones de los focos de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sobre las tangentes a la misma en una dirección m, con $m \neq 0$ dada.

Solución.

Sabemos que la familia de tangentes a la elipse dada en cierta dirección m, están dadas por

$$y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 + b^2} \Leftrightarrow y^2 - 2mxy + m^2x^2 = a^2m^2 + b^2 \qquad , \qquad (1)$$

Las perpendiculares a estas tangentes porlos focos, están dadas por

$$y = -\frac{1}{m}(x \pm c) \Leftrightarrow my + x = \mp c \Leftrightarrow m^2y^2 + 2mxy + x^2 = c^2 = a^2 - b^2$$

Eliminando el parámetro m entre esta última ecuación y (1) se obtiene la ecuación del lugar geométrico pedido, que resulta ser : $x^2 + y^2 = a^2$.

11. El punto medio de la cuerda de una elipse es $(5, 2)$. Hallar la ecuación de la cuerda, si la elipse tiene por ecuación $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$.

Solución.

Sea $y - 2 = m(x - 5)$ la ecuación de la cuerda en cuestión, intersecando con la ecuación de la elipse dada, obtenemos:

$$(1 + 4m^2)x^2 + (8m - 40m^2 - 6)x + 100m^2 - 40m - 3 = 0$$

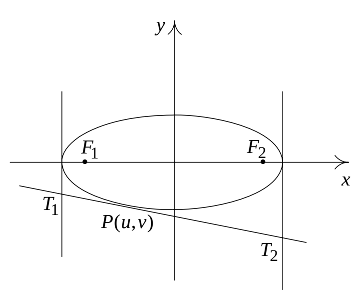
sabemos que si x_1 y x_2 son las raíces de ésta última ecuación, se cumple que

$$x_1 + x_2 = -\frac{8m - 40m^2 - 6}{1 + 4m^2}, \text{ por otra parte también } x_1 + x_2 = 10$$

entonces, $6 + 40m^2 - 8m = 10(1 + 4m^2)$ de aquí se obtiene $m = -\dfrac{1}{2}$ por tanto la ecuación de la cuerda resulta ser $y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 5)$.

12. Sea l la tangente en $P(u, v)$ a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Sean T_1 y T_2 las intersecciones de l con las tangentes trazadas desde los vértices de la elipse. Demostrar que la circunferencia que tiene por diámetro el trazo T_1T_2 pasa por los focos

Demostración.



Primero, determinamos las coordenadas de T_1 y T_2, intersecando la ecuación de la tangente en P, que está dada por $b^2ux + a^2vy = a^2b^2$ con $x = \pm a$, de donde resultan: $T_1\left(a, \dfrac{b^2}{v}\left(1 - \dfrac{u}{a}\right)\right)$ y $T_2\left(-a, \dfrac{b^2}{v}\left(1 + \dfrac{u}{a}\right)\right)$

Por otra parte la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos T_1 y T_2 diametralmente opuestos, esta dada por

$$(x-a)(x+a) + [y - \frac{b^2}{v}\left(1 - \frac{u}{a}\right)][y - \frac{b^2}{v}\left(1 + \frac{u}{a}\right)] = 0$$

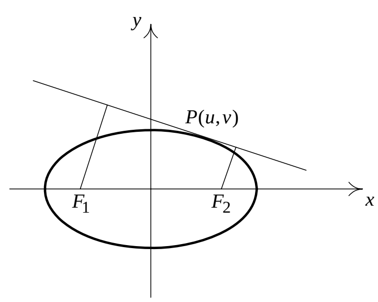
Esta circunferencia cuando corta al eje x se debe tener $y = 0$, así resulta

$x^2 - a^2 + \dfrac{b^4}{v^2}\left(1 - \dfrac{u^2}{a^2}\right) = 0$, pero como $P(u,v)$ satisface la ecuación de la elipse, entonces $b^2u^2 + a^2v^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{u^2}{a^2} = \dfrac{v^2}{b^2}$ así se tiene

$x^2 - a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = a^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow x = \pm c$, luego la circunferencia pasa por los focos.

13. Demuestre que el producto de las distancias desde los focos de una elipse, a una tangente cualquiera de ella, es constante.

Demostración.



Sabemos que la ecuación de la tangente en el punto $P(u,v)$ de la elipse, está dada por $b^2ux + a^2vy = a^2b^2$, por tanto las distancias d_1 y d_2 desde los focos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ son:

$$d_1 = \frac{|-cub^2 - a^2b^2|}{\sqrt{u^2b^4 + v^2a^4}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{|cub^2 - a^2b^2|}{\sqrt{u^2b^4 + v^2a^4}}$$

Así,

$$d_1d_2 = \frac{|c^2u^2b^4 - a^4b^4|}{u^2b^4 + v^2a^4}, \text{ pero } \quad b^2u^2 + a^2v^2 = a^2b^2 \;\text{ y }\; c^2 = a^2 - b^2$$

Entonces,

$$d_1 d_2 = b^2 \frac{|c^2u^2 - a^4|}{u^2b^2 + \frac{v^2}{b^2}a^4} = b^2 \frac{|c^2u^2 - a^4|}{u^2b^2 + (1 - \frac{u^2}{a^2})a^4} = b^2 \frac{|c^2u^2 - a^4|}{u^2b^2 + a^4 - u^2a^2}$$
$$= b^2 \frac{|c^2u^2 - a^4|}{u^2(b^2 - a^2) + a^4} = b^2 \frac{a^4 - c^2u^2}{-c^2u^2 + a^4} = b^2$$

14. Determinar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $(3, -1)$ a la elipse cuya ecuación es: $2x^2 + 3y^2 + x - y - 5 = 0$.

Solución.

Las ecuaciónes de la tangentes mencionadas son de la forma

$y + 1 = m(x - 3)$, intersecando con la elipse se obtiene:

$$(2 + 3m^2)x^2 + (-18m^2 - 7m + 1)x + 27m^2 + 21m - 1 = 0$$

Imponiendo la condición de tangencia $\triangle = 0 \Rightarrow$

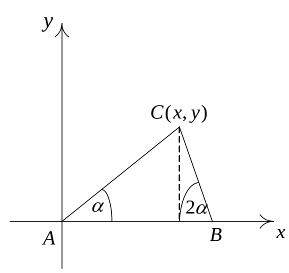
$$(-18m^2 - 7m + 1)^2 - 4(2 + 3m^2)(27m^2 + 21m - 1) = 0$$

resolviendo para m se obtiene: $m_1 = -1 \ \vee \ m_2 = \dfrac{9}{191}$ con lo que resultan

$x + y - 2 = 0$ y $9x - 191y - 218 = 0$

15. Los extremos de la base de un triánguloson los puntos $A(0,0)$ y $B(3,0)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del vértice C si se mueve de modo que el ángulo de la base CBA es siempre igual al doble del ángulo CAB

Solución.



De la figura se tiene que: $tg\,\alpha = \dfrac{y}{x} \ \wedge \ tg\,2\alpha = \dfrac{y}{3 - x}$, $\alpha \neq 0$ parámetro

Eliminando el parámetro α se obtendrá la ecuación del lugar geométrico del vértice C.

Sabemos que :

$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{y}{3 - x} = \frac{2\dfrac{y}{x}}{1 - \dfrac{y^2}{x^2}} \Leftrightarrow (x - 1)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

Se trata de una hipérbola centrada en el punto $(1,0)$

16. Probar que la normal en (u, v) a la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ es $vx + uy = 2uv$.

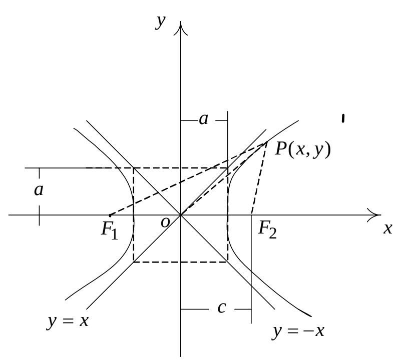
Prueba.

La tangente en (u, v) está dada por la ecuación $ux - vy = a^2$ por tanto su pendiente es $m_t = \frac{u}{v}$ entonces la pendiente de la normal en dicho punto resulta $m_\eta = -\frac{v}{u}$.

Por tanto la ecuación de la normal en dicho punto es $y - v = -\frac{v}{u}(x - u)$ de aquí se tiene $vx + uy = 2uv$.

17. Demostrar que en una hipérbola equilátera la distancia de un punto de ella , al centro de simetría es media proporcional geométrica entre sus distancias focales.

Demostración.



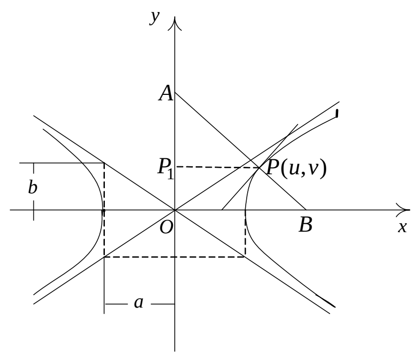
La ecuación de la hipérbola es $x^2 - y^2 = a^2$ y se cumple que $c^2 = 2a^2$

De la figura : $OP^2 = x^2 + y^2$,

$$\begin{aligned} PF_1 \cdot PF_2 &= \{[(x+c)^2 + y^2][(x-c)^2 + y^2]\}^{\frac{1}{2}} \\ &= [(x^2+y^2)^2 + c^4 - 2c^2(x^2 - y^2)]^{\frac{1}{2}} \\ &= x^2 + y^2 = OP^2, \text{ pues } c^4 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0 \end{aligned}$$

18. Demostrar que la parte de la normal de una hipérbola comprendida entre los ejes coordenados queda dividida por la curva en la razón $\frac{a^2}{b^2}$

Demostración.



Vamos a demostrar que

$$\frac{PA}{PB} = \frac{P_1A}{P_1O} = \frac{a^2}{b^2}$$

Determinemos las coordenadas de A, para lo cual obtenemos la ecuación de la normal en el punto de tangencia $P(u,v)$, que es

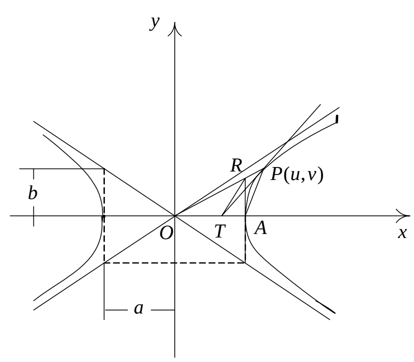
$va^2x + ub^2y = uv(a^2+b^2)$ intersecando con el eje y, resulta

$A\left(0, \dfrac{a^2+b^2}{b^2}v\right)$, por otra parte note que $P_1(0,v)$ entonces se tiene

$P_1A = \dfrac{a^2+b^2}{b^2}v - v = \dfrac{a^2v}{b^2}$, $P_1O = v$, luego $\dfrac{P_1A}{P_1O} = \dfrac{a^2}{b^2}$

19. La tangente en un punto P de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ corta al eje transversal en T, y la recta OP corta en R a la tangente en A, demostrar que RT es paralela a PA.

Solución.



Sabemos que la tangente en $P(u,v)$ a la hipérbola está dada por,

$b^2ux - a^2vy = a^2b^2$, intersecando con el eje x se tiene $T\left(\dfrac{a^2}{u}, 0\right)$, ahora intersecando $x = a$ con la recta OP cuya ecuación es $y = \dfrac{v}{u}x$, resulta $R\left(a, \dfrac{v}{u}a\right)$, entonces $m_{RT} = \dfrac{\dfrac{v}{u}a}{a - \dfrac{a^2}{u}} = \dfrac{v}{u-a} = m_{AT}$, por tanto $RT||PA$.

20. Sea una cuerda cuyo punto medio es $(4,1)$ de la hipérbola $x^2 - 3y^2 = 6$, Hallar su ecuación.

Solución.

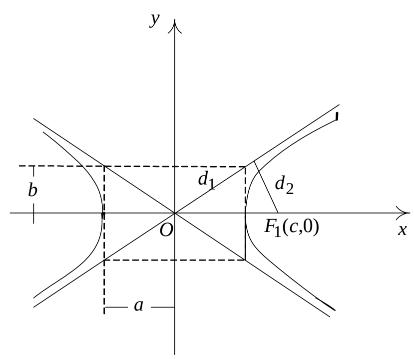
Sea la ecuación de la cuerda $y - 1 = m(x-4)$ intersecando con la hipérbola se tiene:

$$(1-3m^2)x^2 + (24m^2 - 6m)x - 48m^2 + 24m - 9 = 0$$

de aquí se sabe que $x_1 + x_2 = -\dfrac{24m^2 - 6m}{1-3m^2}$ de donde $\dfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = 4$, luego $4 = -\dfrac{12m^2 - 3m}{1-3m^2} \Leftrightarrow m = \dfrac{4}{3}$, por tanto $y - 1 = \dfrac{4}{3}(x-4)$ es la ecuación en cuestión.

21. Desde el foco de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ se traza una perpendicular a una de sus asíntotas. Demostrar que su pie tiene las distancias a y b al centro de simetría y al foco de la hipérbola respectivamente.

Demostración.



La ecuación de la asíntota que se muestra en la figura es $bx - ay = 0$, por tanto

$$d_2 = \frac{|b \cdot c - a \cdot 0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{bc}{c} = b$$

La recta por el foco y perpendicular a la asíntota es $y = -\dfrac{a}{b}(x - c)$ de aquí obtenemos $ax + by - ac = 0$, con lo que

$$d_1 = \frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 - ac|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ac}{c} = a$$

22. Desde el foco de una hipérbola, como centro se describe una circunferencia con radio igual al semieje conjugado. Demostrar que ésta circunferencia es tangente a las asíntotas en los puntos que cortan a la directriz.

    Demostración.

    La ecuación de la circunferencia mencionada es $(x-c)^2 + y^2 = b^2$ y las ecuaciones de las asíntotas son: $y = \pm \frac{b}{a}x$, efectuando la intersección con la circunferencia se tiene $(x-c)^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 = b^2$ y resolviendo $x = \frac{a^2}{c} \Rightarrow$ $y = \pm \frac{ab}{c}$, solo dos interseccciones una por cada asíntota y además es tangente en los puntos de intersección con la directriz pues recordemos que su ecuación es $x = \frac{a^2}{c}$.

23. Bajo que ángulos se cortan la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 9a^2$.

    Solución.

    Efectuando la intersección de ambas curvas obtenemos 4 puntos, que son:

    $$P_1\left(\sqrt{5}a, 2a\right),\ P_2\left(\sqrt{5}a, -2a\right),\ P_3\left(-\sqrt{5}a, 2a\right) \text{ y } P_4\left(-\sqrt{5}a, -2a\right)$$

    basta considerar P_1, determinamos las tangentes a ambas curvas en este punto, es decir

    $$t_1 : \sqrt{5}ax - 2ay = a^2 \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$
    $$t_2 : \sqrt{5}ax + 2ay = 9a^2 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

    Luego el ángulo en cuestión estará dado por

    $$tg\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = 4\sqrt{5} \Rightarrow \theta = 83,62°$$

24. Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ a sus asíntotas es constante.

    Solución.

    Sea $P_0(x_0, y_0)$ un punto cualquiera de la hipérbola, entonces:

    $d_1 d_2 = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_0^2 - y_0^2|}{2} = \frac{1}{2}a^2$, pues P_0 pertenece a la hipérbola.

25. Determine la ecuación de la hipérbola sabiendo que sus asíntotas son las rectas $x+y-1=0$, $y-x-3=0$, cuyo eje real es paralelo al eje Y y que pasa por el punto $(0,4)$.

Solución.

El centro de simetría de la hipérbola en cuestión, está en la intersección de sus asíntotas, dado por la solución de

$$x+y-1=0$$
$$y-x-3=0$$

que resulta ser $(-1,2)$ así la ecuación pedida es

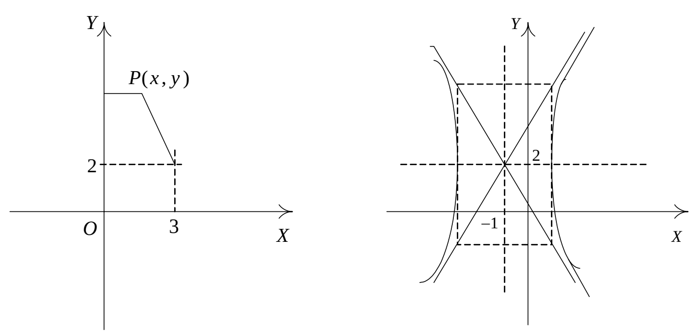
$$\frac{(y-2)^2}{a^2}-\frac{(x+1)^2}{b^2}=1$$

pero como $y=x+3 \Rightarrow \dfrac{a}{b}=1 \Leftrightarrow a=b$, y como la hipérbola pasa por el punto $(0,4) \Rightarrow \dfrac{(4-2)^2}{b^2}-\dfrac{(0+1)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2=3.$ Así resulta la ecuación dada por

$$\frac{(y-2)^2}{3}-\frac{(x+1)^2}{3}=1$$

26. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al eje Y es siempre igual a la mitad de su distancia al punto $(3,2)$. Grafique la curva.

Solución.



$P(x,y)$ debe cumplir

$$|x|=\tfrac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{12}=1$$

Se trata de una hipérbola de centro de simetría $C(-1,2)$

12.6 Ejercicios Propuestos

1. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $\left(1, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ y tiene una excentricidad de $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

   Respuesta.

   $4x^2 + 20y^2 = 139$

2. Los puntos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$ son los focos de una elipse y la longitud de cualquiera de sus lados rectos es 9. Hallar la ecuación dela elipse.

   Respuesta.

   $27x^2 + 36y^2 = 1053$

3. Si $P(u, v)$ es un punto cualquiera de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Demostrar que los radios vectores son: $r_1 = a + eu$ y $r_2 = a - eu$.

4. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ en la razón $1 : 4$.

   Respuesta.

   $x^2 + 25y^2 = 16.$

5. Una elipse está centrada en el origen y su eje mayor coincide con el eje x. Hallar su ecuación sabiendo que pasa por los puntos $\left(\sqrt{6}, -1\right)$ y $\left(2, \sqrt{2}\right)$.

   Respuesta.

   $x^2 + 2y^2 = 8.$

6. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos $(0, 0)$ y $(6, 0)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto que se mueve de modo que el producto de las tangentes de los ángulos de las bases es siempre igual a 4.

   Respuesta.

   $4x^2 + y^2 - 24x = 0.$

7. Los extremos de un diámetro de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ son P_1 y P_2. Si F es uno de los focos de la elipse. Demostrar que la suma de los radios vectores FP_1 y FP_2 es igual a la longitud del eje mayor.

8. Si k es un número positivo. Demostrar que la ecuación $3x^2 + 4y^2 = k$ representa a una familia de elipses, cuya excentricidad es $\dfrac{1}{2}$.

9. El centro de una elipse es el punto $(2, -4)$, el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos $(-2, -4)$ y $(-1, -4)$ respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la de cada lado recto.

   Respuesta.

   $$7(x-2)^2 + 16(y+4)^2 = 112,\ e = 0.75,\ 2b = 2\sqrt{7},\ \frac{7}{2}$$

10. Dada la elipse $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$, determine:

    La ecuación canónica, su centro de simetría, vértices, focos, longitudes de sus ejes mayor y menor, longitud de su lado recto y excentricidad.

    Respuesta.

    $$(x-3)^2 + 4(y+2)^2 = 4;\ (3, -2);\ (5, -2),\ (1, -2);\ \left(3+\sqrt{3}, -2\right),$$
    $$\left(3-\sqrt{3}, -2\right);\ 4 \text{ y } 2;\ 1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

11. Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje x. Hallar la ecuación del lugar gemétrico de los puntos medios de estas perpendiculares.

    Respuesta.

    $$x^2 + 4y^2 + 4x + 16y + 4 = 0$$

12. Demostrar que las tangentes a una elipse trazadas desde los extremos de un diámetro cualquiera son paralelas entre si.

13. Desde el punto $(2, 7)$, se trazan paralelas a la elipse $2x^2 + y^2 + 2x - 3y - 2 = 0$. Hallar las coordenadas de los puntos de contacto.

    Respuesta.

    $$(1, 1);\ \left(-\frac{13}{9}, \frac{29}{9}\right)$$

14. Hallar las ecuaciones de las tangentes a a elipse $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ y que son perpendiculares a la recta $x + y - 5 = 0$.

    Respuesta.

    $$x - y - 1 = 0;\ 3x - 3y + 13 = 0$$

15. Hallar la ecuación de la tangente trazada desde el punto (u, v) a la elipse

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, Note que (u, v) no pertenece a la elipse.

Respuesta.

$b^2ux + a^2vy = a^2b^2$

16. Demostrar que las tangentes a una elipse en dos puntos diametralmente opuestos, son paralelas.

17. Para que valores del parámetro t, los puntos de la forma $(1+t, 2t)$ se encuentran en el interior de la elipse.

    Respuesta.

    $-1 \leq t \leq \dfrac{4}{5}$

18. Dadas: la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, la circunferencia $x^2 + y^2 = b^2$ y la recta $y - p = 0$, ésta ultima interseca al eje y en el punto N, a la circunferencia en Q y a la elipse en P. Demostrar que se verifica $\dfrac{NP}{NQ} = \dfrac{a}{b}$.

19. Si Q y Q' son puntos de las circunferencias inscrita y exinscrita a una elipse, de modo que un punto P de la elipse tiene la ordenada de Q y la abscisa de Q'. Demostrar que la recta QQ' pasa por el origen de coordenadas.

20. El punto medio de una cuerda de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ es (u, v) Encontrar la ecuación de la cuerda.

    Respuesta.

    $y - v = -\dfrac{b^2u}{a^2v}(x - u)$

21. Demostrar que el módulo de la pendiente, de las tangentes trazadas desde el punto donde un lado recto corta a la elipse es igual a su excentricidad.

22. El lado recto de una elipse corta a ella en R, se traza una cuerda por el foco $F_1(c, 0)$ y por el punto $(0, b)$ que corta en P a dicha elipse. Demostrar que

    $$\frac{F_1P}{F_1B} = \frac{F_1R}{F_2R}$$

    siendo F_2 el otro foco.

23. Demostrar que en toda elipse, la suma de los cuadrados de dos semidiámetros conjugados es igual a la suma de los cuadrados de los dos semiejes.

24. Un segmento AB de longitud 6 unidades se desliza de forma que sus extremos se apoyan sobre los ejes cartesianos rectangulares. Entre los puntos A y B se elige un punto tal que $PA = -2PB$. Determine el lugar geométrico descrito por P.

Respuesta.

$16x^2 + 4y^2 = 64$

25. Desde un punto cualquiera de una elipse se trazan las rectas que la unen a los vértices A y A'. Estas rectas cortan al eje BB' en los puntos M y N. Probar que $OM \cdot ON = b^2$.

26. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(7, 6)$, tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje x.

Respuesta.

$4x^2 - 5y^2 = 16.$

27. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$ si sus focos son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. hallar su ecuación y su excentricidad.

Respuesta.

$5x^2 - 4y^2 = 20;\ \ 1.5$

28. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-2, 2)$ y $(-2, -4)$ y la longitud de su lado recto es 2. Hallar su ecuación, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

Respuesta.

$3(y+1)^2 - 9(x+2)^2 = 27;\ (-2, -1+\sqrt{3});\ \ (-2, -1\sqrt{3});\ \ \frac{2}{3}\sqrt{3}$

29. Dada la hipérbola $25x^2 - 36y^2 = 900$ Determine: los focos, sus asíntotas y el área del triángulo determinado por las asíntotas y la tangente en el vértice $V(6, 0)$.

Respuesta.

$F_1(\sqrt{61}, 0),\ F_2(-\sqrt{61}, 0);\ 6y = \pm 5x;\ 30.$

30. Dada la hipérbola $x^2 - 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$, determine:

    Su ecuación canónica, su centro de simetría, vértices, focos, asíntotas , longitud de su lado recto y excentricidad.

Respuesta.

$4(y+2)^2 - (x-3)^2 = 16;\ (3, -2);\ (3, 0),\ (1, -2);\ \left(3, -2+\sqrt{5}\right),$
$\left(3, -2-\sqrt{5}\right);\ 2y + 4 = \pm(x-3);\ 4;\ \frac{\sqrt{5}}{2}$

31. Si k es un número positivo. Demostrar que la ecuación $3x^2 - 3y^2 = k$ representa a una familia de hipérbolas, cuya excentricidad es $\sqrt{2}$.

32. Hallar los puntos de intersección de la recta $2x - 9y + 12 = 0$ con las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 11$.

Respuesta.

$(3, 2);\ (-1.5, 1)$

33. Demostrar que si las asíntotas de una hipérbola son perpendiculares entre si, la hipérbola es equilátera.

34. Hallar la ecuación de una hipérbola equilátera que pasa por el punto $(-1, -5)$ y tiene por asíntotas a los ejes coordenados.

Respuesta.

$xy = 5$

35. Demostrar que la distancia de cualquier punto de una hipérbola equilátera a su centro es media proporcional geométrica entre las longitudes de los radios vectores del punto.

36. La excentridad de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ es e_1. Si la excentricidad de su hipérbola conjugada es e_2. Demostrar que $e_1 : e_2 = b : a$.

37. Si α es el ángulo agudo de inclinación de una asíntota de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Demostrar que su excentricidad es igual a sec .

38. Demostrar que si una recta es paralela a una asíntota de una hipérbola, corta a la curva solamente en un punto.

39. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos $(0, 0)$ y $(4, 0)$. Hallar e identificar el lugar geométrico del vértice opuesto si uno de los ángulos de la base es siempre igual al doble del otro.

Respuesta.

$3x^2 - y^2 - 16x + 16 = 0;\ \ 3x^2 - y^2 - 8x = 0.$

40. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$ que son paralelas a la recta $4x - 4y + 11 = 0$.

Respuesta.

$x - y + 1 = 0;\ \ x - y - 1 = 0$

41. Hallar el ángulo formado por las tangentes trazadas desde el punto $(3, 6)$ ala hipérbola $x^2 - y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$.

Respuesta.

23° 23'.

42. Demostrar que la elipse $2x^2 + y^2 = 10$ y la hipérbola $4y^2 - x^2 = 4$ son ortogonales entre sí, en sus puntos de intersección.

43. Demostrar que la pendiente de la tangente a una hipérbola en cualquier extremo de sus lados rectos, es numericamente igual a su excentricidad.

44. Demostrar que el punto de contacto de cualquier tangente a una hipérbola es el punto medio del segmento de tangente comprendido entre las asíntotas.

45. En cualquier punto P, excepto uno de sus vértices de una hipérbola equilátera, se traza una normal que corta al eje focal en el punto Q. Si O es el centro de simetría de la hipérbola, demostrar que $|OP| = |PQ|$.

46. Demostrar que en una hipérbola equilátera dos diámetros ortogonales tienen longitudes iguales.

47. Por un punto P de una hipérbola se traza una recta l, paralela al eje transversal y ésta recta corta a las asíntotas en los puntos Q y R, demuestre que se cumple que $PQ \cdot PR = a^2$ y cuano l es paralela al eje conjugado se verifica $PQ \cdot PR = b^2$.

48. Sean dos hipérbolas equiláteras y concéntricas de modo que los ejes de una de ellas sean las asíntotas de la otra. Demostrar que las hipérbolas se cortan ortogonalmente.

49. Estudiar para que valores de a, b, c la ecuación $xy + ax + by + c = 0$ representa a una hipérbola con asíntotas paralelas a los ejes coordenados.

50. Determinar el área de un rectángulo formado por las perpendiculares bajadas desde los focos de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ a una tangente cualquiera de ella.

51. Una tangente a una hipérbola se prolonga hasta sus puntos de intersección con sus asíntotas. Encuentre la magnitud $OP_1 \cdot OP_2$ siendo P_1 y P_2 los puntos de intersección y O el centro de la hipérbola.

52. Si las asíntotas de una hipérbola forman un ángulo de 2ω, demuestre que

$$tg\,\omega = \sqrt{e^2 - 1}$$

donde e es su excentricidad.

53. Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene por focos y vértices los vértices y focos de la elipse $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$ respectívamente.

Encuentre las asíntotas de la misma. Grafique ambas cónicas.

54. Determine la ecuación de la elipse que tiene por vértices los puntos de intersección de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 - 36x + 32y - 64 = 0$ con el eje Y, y que pasa por el punto $(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3)$.

55. Determine las coordenadas de los puntos, en los cuales la tangente a la elipse: $x^2 + 4\,y^2 = 4$ sea paralela a la recta $y = x$.

Respuesta.

$x_0 = \mp \dfrac{4}{\sqrt{5}},\ y_0 = \pm \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

56. Por el punto $P(2,7)$ se trazan tangentes a la elipse $2x^2 + y^2 + 2x - 3y = 2$ Hallar las coordenadas de los puntos de contacto.

Respuesta.

$(1,1),\ \left(-\dfrac{13}{9}, \dfrac{29}{9}\right)$

57. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ que son perpendiculares a la recta $x + y - 5 = 0$

Respuesta.

$x - y - 1;\ 3x - 3y + 13 = 0$

58. Dados los focos $F_1(2,3)$ y $F(-2,1)$ y la longitud del eje mayor que es 8, obtener la ecuación y los elementos de la elipse.

Respuesta.

$12x^2 - 4xy + 15y^2 + 8x - 60y - 116 = 0$

59. Una circunferencia móvil es tangente a las circunferencias:

$C_1 : x^2 + y^2 - 4x = 0;\qquad C_2 : x^2 + y^2 - 16x - 36 = 0$

Identifique el lugar geométrico que describe el centro de la circunferencia móvil.

Respuesta.

$3x^2 + 4y^2 - 30x - 33 = 0$

60. Encuentre la ecuación de la tangente a la hipérbola

$$x^2 - 2y^2 + 2x + 8y - 3 = 0$$

en el punto $(1,4)$. Determine también las ecuaciones de sus asíntotas.

Respuesta.

$x - 2y + 7 = 0;\ 2y - 4 = \pm\sqrt{2}(x+1).$