ALGEBRA LINEAL

Problemas propuestos.

1. En $\mathbb{R}^{n+1}$ sobre $\mathbb{R}$, dados los subespacios

$$W_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ \begin{array}{l} x_1 + a\,x_{n+1} = 0 \\ x_2 + a\,x_{n+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n + a\,x_{n+1} = 0 \end{array} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ a\,x_1 + a\,x_2 + \cdot \cdot \cdot + a\,x_n + x_{n+1} = 0 \right\}$$

a) Determine la dimensión de W_1 exibiendo una base para ello e indicando el valor del parámetro real a.

b) Determine a de modo que W_1 y W_2 estén en suma directa.

2. Sean $S_1 = \{u_1, u_2, \cdot \cdot \cdot, u_n\}$ y $S_2 = \{v_1, v_2, \cdot \cdot \cdot, v_n\}$ bases de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, tales que:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_1 + v_2$$

$$u_3 = v_1 + v_2 + v_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = v_1 + v_2 + \cdot \cdot \cdot + v_n$$

a) Determine Q matriz de cambio de base de $S_2 \rightarrow S_1$.

b) Se dice que una base es ortonormal si

$$(v_i; v_j) = \begin{cases} 1 \ si \ i \neq j \\ 0 \ si \ i = j \end{cases}$$

Muestre que si S_1 es ortonormal entonces S_2 tambien lo es.

3. Un sistema lineal de 4×5 tiene la solución dada por

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Exprese esta solución en una matriz ampliada.
b) Determine la solución para $X_B = \{x_1, x_2, x_3\}$
c) Estudie si existe $X_B = \{*, *, *\}$ tal que la solución para estas variables básicas sea imposible (justifique su respuesta).

4. Sea $A_{n\times p}$ y suponga $A^t A$ es no singular si $AX = Y$ determine X aprovechando para ello la inversa de $A^t A$.

Determine X para : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ y $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 10 & -6 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

a) Determine la descomposición de Cholesky.
b) Pruebe que A es positiva definida.
c) Si $f(x,y,z) = X^t A X$, con $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ demuestre que :

$$f(x,y,z) = 2(x - 2y + z)^2 + 2(y - z)^2 + z^2$$

(ocupe Cholesky)

6. Analice los valores extremos (máx.o mín) o puntos silla de la función

$$f(x,y,z) = x\,y^2 z^3 (7 - x - y - z), \quad \forall\, x, y, z > 0$$

Justifique su respuesta con los pivotes de la matriz U.

8. Se dice que dos matrices simétricas A y B son congruentes si son matrices asociadas a una misma forma cuadrática, es decir, $\exists P$ no singular, tal que $B = P^t A P$.

   Sea la forma cuadrática $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 2xy - 6yz$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.Calcule la expresión matricial y polinómica de F respecto de la base de $\mathbb{R}^3$, $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (-1, 0, 0)\}$. Aproveche lo anterior para mostrar dos matrices congruentes.

9. Identificar la cónica, en caso que sea real trazar su gráfico e indicar sus elementos principales en el sistema original.

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}\,x - 6\sqrt{2}\,y + 2 = 0$$

10. Considere la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 6 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

   a) Determine la descomposición $B = LU$

   b) Demuestre que B es positiva definida

   c) Determine la descomposición de Cholesky y de aquí escriba la forma cuadrática $F(X) = X^t B X$ como suma de cuadrados.

11. En $M_{5\times 1}$ sobre $\mathbb{R}$ dado el subespacio W, por

$$W = \{\, Y \in M_{5\times 1} \,/\, Y = AX \text{ es compatible } \}$$

en que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   a) Determine los valores de k y p adecuados de modo que $[1 \quad 2 \quad 0 \quad k \quad p] \in Ker\, A^t$.

   b) Determine una base para $Im\, A$, note que $W = Im\, A$.

12. Sean A y B dos matrices de $n \times n$ con elementos reales definidos por: $a_{ii} = 1$, $\forall \; i = 1, 2, \ldots, n$ y $a_{i+1,i} = -1$, $\forall \; i = 1, 2, \ldots, n-1$. y el resto de los $a_{ij} = 0$. Para la matriz B, $b_{ij} = i$, $\forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n$.

   Calcular: $r(A)$, $r(B)$ y $r(BA)$.

13. Sea V un espacio vectorial con un producto interior $(\alpha;\beta)$

a) Para cada par de vectores α, β de V, se define el producto $\alpha \circ \beta$ por:
$\alpha \circ \beta = 2\,(\alpha;\beta)$. ¿Está bien definido este nuevo producto interior?

b) Sea k un número real arbitrario, si se define el producto $\alpha * \beta$ por:
$\alpha * \beta = 2\,(\alpha;\beta)$. Determinar para qué valores de k esta definición determina un producto interno.

14. Sea $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una T.L. definida por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

con respecto a: $S_1 = \{(1,1,1),(0,1,-1),(0,0,1)\}$

Determine la matriz de $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, también una T.L. con respecto a:

$S_2 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\} \to S_3 = \{$canónicas de $\mathbb{R}^4\}$; tal que

$$(T_2 \circ T_1)(x,y,z) = (2x, x-y, x+y-z, 0)$$

15. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^5$, se considera el subespacio W que forman los (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) que verifican a:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad - x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \qquad &= 6 \end{aligned}$$

Determine una base ortonormal para W y otra para $W^{\perp}$. Hallar también los vectores en W y en $W^{\perp}$ más cercanos al vector $(1,0,0,0,0)$.

16. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$; sean $x_1, x_2, \ldots, x_p$ vectores columna de $n \times 1$.

a) Demuestre que si los vectores $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_p$ son linealmente independientes, entonces también lo son los $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

b) Se puede afirmar que si los $x_1, x_2, \ldots, x_p$ son $L.I.$ también lo son $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_p$, en caso que su respuesta sea negativa que se necesita para que así lo sean.

17. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

Determine k de modo que $Ker\, A \oplus W$.

18. Sea $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \}$ un conjunto ortonormal de vectores en un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, con $dim\, V = n$

 a) Demuestre que S es una base para V y que para todo vector $\alpha \in V$, se tiene

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} (\alpha; \alpha_i)\alpha_i$$

 b) Demuestre que $\| \alpha_i + \alpha_j \| = \sqrt{2},\ \forall\, i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n$

19. a) Encuentre tres vectores ortonormales β_1, β_2 y β_3 tal que β_1, β_2 sea una base del espacio columna de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

 b) ¿Cuál de los 4 subespacios asociados a A, contiene a β_3?

20. Sea$n$ $\vec{\mu}$ y $\vec{\nu}$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ y sea P el plano a través de $\vec{\mu}, \vec{\nu}$ y $\vec{0}$. La ecuación paramétrica del plano es $\vec{r} = k\,\vec{\mu} + t\,\vec{\nu}$, $k, t \in \mathbb{R}$. Demuestre que una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transforma P sobre un plano que pasa por $\vec{0}$ o sobre una recta que pasa por $\vec{0}$ o sólo sobre el origen en $\mathbb{R}^3$.¿Que se les tiene que pedir a $T(\vec{\mu})$ y $T(\vec{\nu})$ para que la imagen del plano P sea un plano?.

21. Sea $A \in M_{n \times n}$ una matriz ortogonal y sea $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. Probar que $\{A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n\}$ es también una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

22. Dados dos vectores fijos, no nulos, α, β pertenecientes a $\mathbb{R}^3$, se define el operador $(\alpha; \beta)$ por:

$$(\alpha; \beta)\gamma = \alpha(\beta; \gamma),\ \ \gamma \in \mathbb{R}^3$$

 a) Demuestre que $(\alpha; \beta)$ es lineal.

 b) Determine el nucleo.

 c) Encuentre la matriz de $(\alpha; \beta)$ relativa a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$.

23. 1. La matriz asociada a una T.L. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con respecto a las bases $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

 y $\{\beta_1, \beta_2\}$ es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Encuentre la matriz de T con respecto a las bases: $\{\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'\} \rightarrow \{\beta_1', \beta_2'\}$

donde $\alpha_1' = \alpha_1 + \alpha_2;\ \alpha_2' = \alpha_1 + \alpha_3;\ \alpha_3' = \alpha_3 + \alpha_2$

$2\,\beta_1' = \beta_1 + \beta_2;\ \ 2\,\beta_2' = \beta_1 - \beta_2$

24. Sea $T : P_2 \rightarrow P_2$ una T.L. definida por

$$T(1 + t + t^2) = 2 + t - 2t^2$$
$$T(2 + t - t^2) = 0$$
$$T(t + 2t^2) = -1 + 2t^2$$

a) Justificando indique si T es invertible

b) Determinar la matriz representativa de T con respecto a la base

$$S = \{1 + t + t^2, 2 + t - t^2, t + 2t^2\}$$

y calcule la imagen por T, del vector $3 + 10t + 20t^2$ ocupando esta matriz.

25. Encuentre los valores y vectores propios de T^{-4}, si $T : M_{22} \rightarrow M_{22}$ es una T.L. definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a + c \\ b - 2c & d \end{bmatrix}$$

26. a) Sea A una matriz de $n \times n$ y sea $B = P^{-1}AP$. Demuestre que si α es un vector propio de A asociado con el valor propio k de A, entonces $P^{-1}\alpha$ es un vector propio de B asociado con el valor propio k de A.

b) Sea A una matriz de $n \times n$ idempotente, entonces la matriz solo admite como valores propios a: 1 y 0.

27. En un espacio vectorial cualquiera se da una base S, mediante

$$S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$$

averiguar si también es una base para el espacio, cada uno de los siguientes conjuntos de vectores:

$$S_1 = \{u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_4, u_4 + u_5, u_5 + u_6\}$$

$$S_2 = \{u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3, u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5\}$$

28. Encuentre una base para el subespacio W de $\mathbb{R}^4$, dado por

$$W = \{(x, y, z, t)\ /\ AX = Y \text{ , tenga solución } \}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 10 & 14 & 18 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

29. Dado el sistema

$$\begin{aligned} ax_1 + ax_2 + ax_3 + \quad & ax_4 = a^2 \\ x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + \quad & bx_4 = 3b \\ -2x_1 + \quad x_2 - \ 2x_3 + (3a-2b)&x_4 = 0 \end{aligned}$$

a) Mediante el rango justificar los distintos casos de solución del sistema, según sean los valores de las constantes a y b.

b) Resolver matricialmente(no por ampliada) indicando los valores de a y b adecuados tal que $X_B = \{x_2, x_4\}$

c) ¿Es posible resolverlo en el caso que $X_B = \{x_1, x_3\}$? (justifique)

30. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ con } a \neq 0, b \neq 0 \text{ y } c \neq 0$$

a) Probar que es A es invertible.

b) Exprese A como un producto de matrices elementales.

31. Sea $$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & k^2 - 5k - 2 \\ 3 & k & 3 \end{bmatrix}$$

a) Para que valores de k el rango de A_k es: 1, 2 o 3.

b) Apoyándose en a) resuelva cuando sea posible el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad & + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 8x_2 + (k^2 - 5k - 2)&x_3 = k - 2 \\ 3x_1 + kx_2 \qquad\qquad & + 3x_3 = \tfrac{1}{2}k \end{aligned}$$

c) Para que valor de k, el sistema dado en b) no tiene solución.

32. Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$ demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & cos\,\alpha & cos\,\beta \\ cos\,\alpha & 1 & cos\,\gamma \\ cos\,\beta & cos\,\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

33. Sea $A = [\, a_{ij} \,]$ de $n \times n$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 + a_i & \text{si} \quad i = j \end{cases}$ demuestre que

$$|\, A \,| = a_1 \cdot a_2 \cdot \ \cdot \ \cdot a_n \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{a_j} \,, \text{ donde } a_0 = 1$$

34. Determine los valores de a y b de modo que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - \ x_2 + 2x_3 \ - \ bx_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \ - \ x_3 + 3bx_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - ax_3 - 2bx_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2ax_2 + 3x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

tenga infinitas soluciones, indicando en cada caso de solución el número de parámetros.

35. Ocupando la inversa de una matriz cuadrada, resuelva el sistema dado.(Como sugerencia considere x_3 y x_5 como parámetros)

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + x_2 - 10\,x_3 \qquad + 20\,x_5 &= 10 \\ 4\,x_1 - x_2 + 20\,x_3 \ - x_4 + 10\,x_5 &= 20 \\ 2x_2 - \ 5\,x_3 - x_4 + \ 20\,x_5 &= 30 \end{aligned}$$

36. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, en caso afirmativo demuestre y en caso contrario dé un contra ejemplo.

a) El conjunto de las matrices singulares es un subespacio del espacio vectorial de las matrices de $n \times n$.

b) Si u es C L. de los vectores u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ y cada u_i es C L. de los vectores v_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, entonces u es C L. de los $v_{j.}$

c) El conjunto formado por la intersección de un plano y una recta cualquiera en $\mathbb{R}^3$, es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

37. En $M_{2\times 2}$ sobre $\mathbb{R}$, dado el conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ k & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

a) ¿Para que valor de k, S es linealmente independiente?

b) Muestre que el vector $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ siempre és combinación lineal de los vectores de S.

c) ¿Es cierto que el sistema: $\begin{aligned} 2\,x - y + z \qquad &= 0 \\ 2\,y + z - t &= 0 \end{aligned}$

es equivalente al subespacio $\langle\, S \,\rangle$?

38. Sea $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una T.L. definida por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

con respecto a: $S_1 = \{(1,1,1),(0,1,-1),(0,0,1)\}$

Determine la matriz de $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, también una T.L. con respecto a:

$S_2 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\} \to S_3 = \{$canónicas de $\mathbb{R}^4\}$; tal que

$$(T_2 \circ T_1)(x,y,z) = (2x, x-y, x+y-z, 0)$$

39. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

a) Determine la dimensión de: $Im\, A$ y de $Ker\, A^t$

b) Encuentre una base ortogonal para $Ker\, A$

40. Sea $T : P_3 \to P_2$ una función por

$$T(p(x)) = p'(x), \ \forall\, p(x) \in P_3$$

a) Demuestre que T es una $T.L.$

b) Determine la matriz representativa de T, con respecto a las bases:
$S_1 = \{ 1 + x + x^2 + x^3, 1 + x + x^2, 1 + x, 1 \}$ de P_3 y
$S_2 = \{ 1, 1 + 2x, 1 + 2x + 3x^2 \}$ de P_2 respectívamente.

c) Ocupando matrices representativas, hallar $p(x)$ si $p'(x) = 6 - 2x + x^2$

41. Sea $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una T.L. definida por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

con respecto a: $S_1 = \{(1,1,1),(0,1,-1),(0,0,1)\}$

Determine la matriz de $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, también una T.L. con respecto a: $S_2 \to S_3$

donde: $S_2 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $S_3 = \{$ Canónicas de $\mathbb{R}^4 \}$

y tal que:

$$(T_2 \circ T_1)(x,y,z) = (2x, x-y, x+y-z, 0)$$

42. Dada

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & b \\ a & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Determine los valores de a y b de modo que el vector $(1,1,1)$ sea un vector propio de A y luego encuentre los otros valores y vectores propios

b) Para los valores de a y b encontrados en a) diga si A es diagonalizable, fundamente su respuesta.

43. Sea $T : P_2 \to P_2$ una T.L. definida por

$T(1+t+t^2) = 2+t-2t^2$

$T(2+t-t^2) = 0$

$T(t+2t^2) = -1+2t^2$

a) Justificando indique si T es invertible

b) Determinar la matriz representativa de T con respecto a la base

$$S = \{1+t+t^2, 2+t-t^2, t+2t^2\}$$

y calcule la imagen por T, del vector $3+10t+20t^2$ ocupando esta matriz.

44. Sea $T : M_{22} \to M_{22}$ una T.L. definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$$

Encuentre los valores y vectores propios de T^{-4}

45. a) Sea A una matriz de $n \times n$ y sea $B = P^{-1}AP$. Demuestre que si α es un vector propio de A asociado con el valor propio k de A, entonces $P^{-1}\alpha$ es un vector propio de B asociado con el valor propio k de A.

b) Sea A una matriz de $n \times n$ idempotente, entonces la matriz solo admite como valores propios a: 1 y 0.