CÁLCULO II

Cálculo en varias variables

1. Funciones de varias variables. Dominio y recorrido. Curvas de nivel

1. Dada la función

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{2x - y + 2}}$$

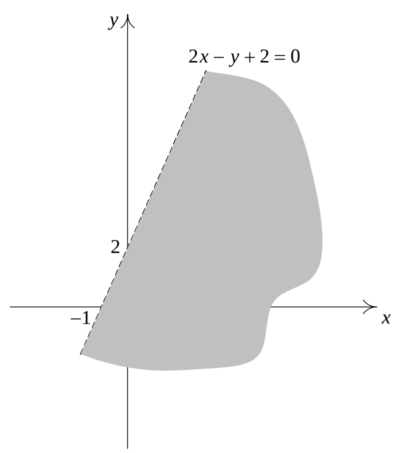
a) Determine el dominio de la función y dibuje un gráfico de éste.

b) Encuentre y grafique las curvas de nivel, para $f(x,y) = 1, 2, 0.$

Solución.

a)

$Dom\, f = \{(x,y) \,/\, 2x - y + 2 > 0 \}$



b)

$$\frac{x}{\sqrt{2x - y + 2}} = 1 \Leftrightarrow y = -x^2 + 2x + 2, \text{ con } x \neq 0 \text{ e } y \neq 2$$

$$\frac{x}{\sqrt{2x - y + 2}} = 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2, \text{ con } x \neq 0 \text{ e } y \neq 2$$

$$\frac{x}{\sqrt{2x-y+2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ con } 2x - y + 2 > 0 \Rightarrow y < 2$$

2. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Demuestre que $f(\frac{1}{x},\frac{1}{y}) = f(x,y)$ y dibuje la curva de nivel $f(x,y) = 1$,

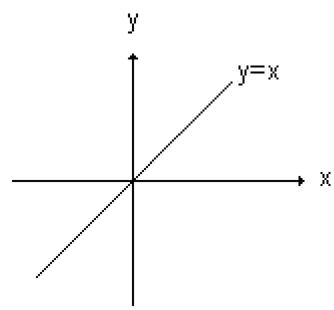
$\forall\,(x,y) \neq (0,0)$

b) Estudie la continuidad de $f(x,y)$ en el origen.

Solución:

a) $f(\frac{1}{x},\frac{1}{y}) = \dfrac{2\frac{1}{x}\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}} = \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = f(x,y)$

Curva de nivel para $f(x,y) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2xy \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$



b) $f(0,0) = 0,$ existe

Tomando la trayectoria $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2xmx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2m}{1+m^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

El límite depende de m, y para m $\neq 0 \Rightarrow \dfrac{2m}{1+m^2} \neq 0$ por lo tanto $f(x,y)$ es discontinua inevitable en $(0,0)$ pues no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2. Límites y Continuidad.

1. Demuestre que la siguiente función no es continua en $\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución.

Es suficiente tomar la trayectoria $y=mx,\ m\in\mathbb{R};$ entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x+mx}{\sqrt{x^2+m^2x^2}}=\lim_{x\to0}\pm\frac{1+m}{\sqrt{1+m^2}}=\pm\frac{1+m}{\sqrt{1+m^2}}$$

el límite depende del parámetro m, por tanto no existe cuando $(x,y)\to(0,0)$, entonces la función es discontinua inevitable en el origen.

3. Derivadas parciales. Interpretación geométrica.

1. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Calcule : $f_x(0,0),\ f_{xy}(0,0).$

Solución.

a) $f_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{3h^20}{h^4+0^2}-0}{h}=0,$

$\forall(x,y)\neq(0,0).$

$$f_x(x,y)=\frac{6xy(x^4+y^2)-3x^2y\,4x^3}{(x^4+y^2)^2}=\frac{6xy^3-6x^5y}{(x^4+y^2)^2}$$

Por tanto,

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{6\cdot0k^3-6\cdot0^5k}{(0^4+k^2)^2}-0}{k}=0$$

4. Derivadas parciales de orden superior.

1. Sea $w = f(u,v)$ una función diferenciable donde , $\begin{cases} u = e^{x+y} \\ v = e^{x-y} \end{cases}$

demuestre $$4\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u} = e^{-2x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

Solución:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial\, w}{\partial\, x}\frac{\partial\, x}{\partial\, u} + \frac{\partial\, w}{\partial\, y}\frac{\partial y}{\partial\, u}$$

donde

$$\left.\begin{array}{l} u = e^{x+y} \Leftrightarrow x + y = ln\, u \\ v = e^{x-y} \Leftrightarrow x - y = ln\, u \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}(ln\, u + ln\, v) \\ y = \dfrac{1}{2}(ln\, u - ln\, v) \end{array}$$

Así:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{1}{2u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{1}{2u} = \frac{1}{2u}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

luego:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u} = \frac{1}{2u}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial\, x}{\partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial\, v} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\frac{\partial\, x}{\partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\, v}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u} = \frac{1}{4uv}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}$$

finalmente de aquí

$$4\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u} = e^{-2x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

5. Incremento total y parcial. Diferencial total. Plano tangente. Diferenciabilidad. Aproximación.

1. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Demostrar que $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$

Solución.

Es suficiente probar que f es discontinua en $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{3x^2y}{x^4+y^2}))=\lim_{x\to 0}0=0$$

Tomando $y=x^2, x\to 0\Rightarrow y\to 0$, resulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{3x^4}{x^4+x^4}=\frac{3}{2},$$

Por tanto como $0\neq\frac{3}{2}$ el límite no existe y la función es discontinua inevitable, con lo que f no es diferenciable en $(0,0)$.

2. Sea f una función diferenciable, y consideremos la superficie $z=x\,f(\dfrac{y}{x})$.

Probar que el plano tangente en cualquier punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ de la superficie pasa por el origen.

Solución.

La ecuación del plano tangente en $P_0(x_0,y_0,z_0)$ es

$$z-z_0=\frac{\partial z}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(P_0)(y-y_0),\ \text{con}\ z_0=x_0f(\frac{y_0}{x_0})$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(\frac{y}{x})+xf\,'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}(P_0)=f(\frac{y_0}{x_0})-\frac{y_0}{x_0}f\,'(\frac{y_0}{x_0})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\,f'(\frac{y}{x})(\frac{1}{x})\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}(P_0)=f\,'(\frac{y_0}{x_0})$$

Así,

$$z-z_0=[f(\frac{y_0}{x_0})-\frac{y_0}{x_0}f\,'(\frac{y_0}{x_0})](x-x_0)+f\,'(\frac{y_0}{x_0})(y-y_0)$$

Ahora si el plano pasa por el origen, el punto $O(0,0,0)$ debe satisfacerlo, es decir

$$[f(\frac{y_0}{x_0})-\frac{y_0}{x_0}f\,'(\frac{y_0}{x_0})](0-x_0)+f\,'(\frac{y_0}{x_0})(0-y_0)=$$

$$=\ -x_0f(\frac{y_0}{x_0})+y_0\,f\,'(\frac{y_0}{x_0})-y_0\,f\,'(\frac{y_0}{x_0})=0-x_0f(\frac{y_0}{x_0})=0-z_0$$

3. Sea la superficie $z = f(x,y)$ definida implícitamente por

$$z^3 + z\,log(x^2+y^2) + y^2 = 8$$

Determine la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie en el punto $(1,0,2)$

Solución:

La ecuación del plano tangente en el punto $(1,0,2)$ es:

$$z-2 = \frac{\partial z}{\partial x}(1,0,2)\,(x-1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1,0,2)\,(y-0)$$

donde:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{z\,\frac{1}{x^2+y^2}2x}{3z^2+log(x^2+y^2)} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,0,2) = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{z\,\frac{1}{x^2+y^2}2y + 2y}{3z^2+log(x^2+y^2)} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1,0,2) = 0$$

Así:

$z-2 = -\frac{1}{3}(x-1)$ es la ecuación del plano pedido.

Ahora, la dirección de la recta normal es $(\frac{1}{3},0,1)$ y como pasa por el punto $(1,0,2)$ su ecuación resulta ser: $\frac{x-1}{\frac{1}{3}} = \frac{z-2}{1},\ y=0$

4. Demuestre que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$.

Demostración.

(Forma 1)

Aplicando la definición de diferenciabilidad en $(0,0)$ se tiene,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} - \{0 + \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x \,+\, \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y\,\}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

donde: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\frac{(\Delta x)^2 0^3}{2(\Delta x)^2+0^2} - 0}{\Delta x} = 0,$ analogamente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Asi resulta:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2|y\,|}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},$ este límite debe valer 0, luego por la definición

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)\left(0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta\right) \Rightarrow \left(\left|\frac{x^2y^2|y\,|}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} - 0\,\right| < \varepsilon\right)$$

Buscamos δ adecuado $\forall\varepsilon > 0$ dado, luego

$\dfrac{x^2y^2|y\,|}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon,$ y como $|\,y\,| < \sqrt{x^2+y^2} \,\wedge\, x^2 < (x^2+y^2)$ se tiene

$$\frac{x^2y^2|y\,|}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$x^2+y^2 < \varepsilon \Rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon}$

(Forma 2)

Probando la continuidad de $\dfrac{\partial f}{\partial x} \wedge \dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$

Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{2y^5}{(2x^2+y^2)^2} & \text{si } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Nota.

El cálculo de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ debe hacerse como en la forma 1

Por probar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^5}{(2x^2+y^2)^2} = 0,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,\left(0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta\right) \Rightarrow (\left| \frac{2y^5}{(2x^2+y^2)^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

En efecto: $\dfrac{2y^4|\,y\,|}{(2x^2+y^2)^2} < \dfrac{2(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}{(2x^2+y^2)^2} < \varepsilon,$

pues $\begin{cases} |\,y\,| < \sqrt{x^2+y^2} \\ y^2 < (x^2+y^2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} \; < \frac{\varepsilon}{2} \;\Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Analogamente para $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

5. Determine el valor de la constante A manera que la expresión

$$(\,Ax + x^2y)\, e^{xy}\, dx + x^3 e^{xy}\, dy$$

sea diferencial exacta. Enseguida, encuentre la función original $f(x,y)$

Solución.

Se debe exigir que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(Ax + x^2y)\, e^{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 e^{xy}\,)$$

$$x^2 e^{xy} + (Ax + x^2y)\, e^{xy} x = 3x^2 + x^3 e^{xy} + x^3 e^{xy} y$$

$$x^2 + Ax^2 + x^3 y = 3x^2 + x^3 y \;\Rightarrow A = 2$$

Así, $(2x + x^2y)\, e^{xy}\, dx + x^3 e^{xy}\, dy$ por tanto se debe tener:

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = (2x + x^2y)\, e^{xy}$ (1) y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3 e^{xy}$ (2) de donde integrando (2) con

respecto a y considerando x constante se obtiene $f(x,y) = x^2 e^{xy} + C(x)$

considerando x constante se obtiene $f(x,y) = x^2 e^{xy} + C(x) \;\Rightarrow$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\, e^{xy} + x^2 y\, e^{xy} + C^{'}(x) \;\Rightarrow C^{'}(x) = 0 \Rightarrow C(x) = K$ (constante) luego: $\quad f(x,y) = x^2 e^{xy} + K.$

6.- Demuestre que el volumen del tetraedro limitado por el plano tangente a la superficie $xyz = a^3$, a constante, en un punto cualquiera de ella y los planos coordenados es $\dfrac{9}{2}\,a^3$

Demostración.

Supóngase $x, y,\ z > 0$ y siendo $p,\ q$ y r los interceptos con los ejes $X,\ Y$ y Z respectivamente se tiene:

$$z = \frac{a^3}{xy};\ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{a^3}{y\,x^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{a^3}{x\,y^2}$$

Ecuación del plano tangente en $P_0(x_0, y_0, z_0)$

$z - z_0 = -\dfrac{a^3}{y_0\,x_0^2}(x - x_0) - \dfrac{a^3}{x_0\,y_0^2}(y - y_0)$, intersecando con los ejes se tiene:

$$x = p \wedge z = y = 0 \Rightarrow (p - x_0)\frac{a^3}{y_0\,x_0^2} = \frac{x_0 y_0 z_0 + a^3}{x_0 y_0} \Rightarrow p = 3x_0$$

$$y = q \ \wedge\ x = z = 0 \Rightarrow q = 3y_0$$

$z = r \ \wedge\ x = y = 0 \Rightarrow r = \dfrac{3a^3}{x_0 y_0}$, note que $x_0 y_0 z_0 = a^3$

Así: $\quad V = \dfrac{1}{6} 3x_0 3y_0 \dfrac{3a^3}{x_0 y_0} = \dfrac{9}{2} a^3$

7. Demostrar que la suma de los cuadrados de las coordenadas x, y, z de las intersecciones con los ejes coordenados, de cualquier plano tangente a la gráfica de:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a \in \mathbb{R}$$

es constante.

Solución.

Sea $F(x,y,z) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$, entonces

$$\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) = \left(\tfrac{2}{3} x_0^{-\frac{1}{3}},\ \tfrac{2}{3} y_0^{-\frac{1}{3}},\ \tfrac{2}{3} z_0^{-\frac{1}{3}}\right)$$

Como P_0 pertenece a la superficie, $x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} + z_0^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Así la ecuación del plano tangente es,

$$\left(\tfrac{2}{3}x_0^{-\frac{1}{3}}\,,\ \tfrac{2}{3}y_0^{-\frac{1}{3}}\,,\ \tfrac{2}{3}z_0^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0$$

Intersecando con el eje X, $y=z=0 \Rightarrow x = x_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}) = x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$,

Analogamente: $y = y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$, $z = z_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$

Con lo que

$$x^2+y^2+z^2 = x_0^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} + z_0^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}) = a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}} = a^2$$

6. Derivada de la función compuesta. Derivada direccional. Gradiente.

1. Sea $w=f(x,y)$ diferenciable, donde $x=\rho cos\,\theta$, $y=\rho sen\,\theta$

   a) Demostrar que $(\frac{\partial w}{\partial x})^2+(\frac{\partial w}{\partial y})^2 = (\frac{\partial w}{\partial \rho})^2+\frac{1}{\rho^2}(\frac{\partial w}{\partial \theta})^2$

   b) Calcule $\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\frac{\partial}{\partial \rho}(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \theta})$

Solución.

a) $\frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x}\,cos\,\theta+\frac{\partial w}{\partial y}\,sen\,\theta$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial w}{\partial x}\,\rho sen\,\theta+\frac{\partial w}{\partial y}\rho\,cos\,\theta$$

$$(\frac{\partial w}{\partial \rho})^2+\frac{1}{\rho^2}(\frac{\partial w}{\partial \theta})^2 = (cos^2\theta+sen^2\theta)(\frac{\partial w}{\partial x})^2+(sen^2\theta+cos^2\theta)(\frac{\partial w}{\partial y})^2$$

$$= (\frac{\partial w}{\partial x})^2+(\frac{\partial w}{\partial y})^2$$

b) $\frac{\partial w}{\partial \rho} = w_x\,cos\,\theta+w_y\,sen\,\theta$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} = \frac{\partial w_x}{\partial \rho}cos\,\theta+\frac{\partial w_y}{\partial \rho}sen\,\theta$$

$$= [\frac{\partial w_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial w_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}]cos\,\theta+[\frac{\partial w_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial w_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}]sen\,\theta$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,cos^2\theta+2\,sen\,\theta cos\,\theta\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,sen^2\theta \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\theta}) = \frac{\partial}{\partial\rho}(-w_x\, sen\,\theta + w_y\, cos\,\theta)$$

$$= -[\frac{\partial w_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho}]\, sen\,\theta + [\frac{\partial w_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho}] cos\,\theta$$

$$= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} cos\,\theta sen\,\theta + \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}(cos^2\theta - sen^2\theta) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} sen\theta cos\,\theta$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2} + \frac{\partial}{\partial\rho}(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\theta}) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(cos^2\theta - cos\,\theta sen\,\theta) + \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}(sen2\theta + cos2\theta)$$

$$+ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(sen^2\theta + sen\theta cos\,\theta)$$

2. a) Dada $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$, hallar un vector unitario $\widehat{u}$ ortogonal a $\vec{\nabla} f(1,2)$ y calcular $D_{\widehat{u}} f(1,2)$. Discutir el significado geométrico del resultado

b) Calcule la diferencial de $f(x,y) = y\, log\, \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$, $x>0,\ y>0$ en el punto $(1,1)$

Solución.

a) $\vec{\nabla} f(x,y) = (-2x, -2y) \Rightarrow \vec{\nabla} f(1,2) = (-2, -4)$, un vector ortogonal a $(-2, -4)$ es $(-2,1)$ y unitario resulta $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$

$$D_{\widehat{u}} f(1,2) = \vec{\nabla} f(1,2) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1) = (-2,-4)\cdot \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1) = 0$$

b) $df = y\, log\, \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$

$$df = y\frac{x^2+y^2}{x^3 y}\,\frac{3x^2 y(x^2+y^2) - x^3 y\, 2x}{(x^2+y^2)^2} dx +$$

$$[log\,\frac{x^3 y}{x^2+y^2} + y\,\frac{x^2+y^2}{x^3 y}\,\frac{x^3(x^2+y^2) - x^3 y\, 2y}{(x^2+y^2)^2}\, dy$$

$$df = \frac{y\,(x^2+3y^2)}{x^2+y^2}\, dx + [log\,\frac{x^3 y}{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}]\, dy$$

Evaluando, resulta

$$df = 2\, dx + log\,\tfrac{1}{2}\, dy$$

3. Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y) = log(x^2+y^2)$ en el punto $(1,2)$ y en la dirección de la tangente a la curva $y^2 = 4x$ en dicho punto.

Solución.

$D_{\widehat{u}}f = \vec{\nabla} f(1,2)\cdot \widehat{u}$, donde $\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\dfrac{2x}{x^2+y^2}, \dfrac{2y}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow$

$\vec{\nabla} f(1,2) = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$

Cálculo de $\widehat{u}$ (vector unitario)

Sea $y = t \Rightarrow r(t) = (\frac{t^2}{4}, t) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = (\frac{t}{2}, 1)$, por otra parte (1,2) $\Rightarrow t = 2$

luego $(\frac{dr}{dt})_{t=2}$ = (1,1) $\Rightarrow \widehat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ por tanto $D_{\widehat{u}}f = \frac{3}{5}\sqrt{2}$

4.- Sea $f(x,y) = x^2\varphi(\frac{x}{y}) + \psi(\frac{y}{x})$, demuestre que:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2\varphi(\frac{x}{y})$$

Demostración.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\varphi(\frac{x}{y}) + x^2\varphi^{'}(\frac{x}{y})\frac{1}{y} + \psi^{'}(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\varphi(\frac{x}{y}) + \frac{4x}{y}\varphi^{'}(\frac{x}{y}) + \frac{x^2}{y^2}\varphi^{''}(\frac{x}{y}) + \frac{2y}{x^3}\psi^{'}(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^4}\psi^{''}(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^3}{y^2}\varphi^{'}(\frac{x}{y}) + \frac{1}{x}\psi^{'}(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^3}{y^3}\varphi^{'}(\frac{x}{y}) + \frac{x^4}{y^4}\varphi^{''}(\frac{x}{y}) + \frac{1}{x^2}\psi^{''}(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{3x^2}{y^2}\varphi^{'}(\frac{x}{y}) - \frac{x^3}{y^3}\varphi^{''}(\frac{x}{y}) - \frac{1}{x^2}\psi^{'}(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x^3}\psi^{''}(\frac{y}{x})$$

de donde resulta: $\quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2\varphi(\frac{x}{y})$

5. Sea $w = f(u,v)$ una función diferenciable tal que $x = 2u - v$ e $y = 2u^2 - uv$

demuestre que en el punto $x = 1,\ y = -\dfrac{1}{2}$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial w}{\partial u} - 2\frac{\partial w}{\partial v}$$

Demostración.

$$y = u(2u - v) = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x} \ \wedge \ v = 2\frac{y}{x} - x$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{1}{x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x}[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\ \frac{\partial v}{\partial x}] - \frac{2}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} +$$

$$\frac{2}{x}[\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\ \frac{\partial v}{\partial x}]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x}[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\,(-\frac{y}{x^2}) + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\,(-\frac{y}{x^2} - 1)] - \frac{2}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{2}{x}[$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}\,(-\frac{y}{x^2}) + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\,(-\frac{y}{x^2} - 1)]$$

de donde evaluando en $x = 1$ e $y = -\dfrac{1}{2}$ resulta

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial w}{\partial u} - 2\frac{\partial w}{\partial v}$$

6. Un insecto se halla en un ambiente tóxico. El nivel de toxicidad, está dado por $T(x,y) = 2x^2 - 4y^2$. El insecto está en $(-1,2)$.

a) ¿En que dirección deberá moverse el insecto para que se aleje lo más rápido posible de la toxicidad?

b) En la curva de nivel apropiada, ubique y dibuje el vector gradiente $\vec{\nabla} T(-1,2)$

c) ¿Cuál es la razón de cambio de la toxicidad del ambiente en el punto $(-1,2)$ en la dirección $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$?

Solución.

a) Se pide $\vec{\nabla} T(-1,2)$; $\vec{\nabla} T(x,y) = \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}, \dfrac{\partial T}{\partial y}\right) = (4x, -8y) \Rightarrow$

$\vec{\nabla} T(-1,2) = (-4, -16)$. El insecto deberá moverse en la dirección del vector

$(-4,\,-16)$ para que se aleje lo más rápido posible de la toxicidad.

b) En $(-1,2)$ se tiene $T(-1,2) = 2(-1)^2 - 4(2)^2 = -14$ luego la curva de nivel es: $2x^2 - 4y^2 = -14 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{3.5} - \dfrac{x^2}{7} = 1$ (hipérbola)

$$(fig.)$$

c) La razón de cambio de la toxicidad del ambiente en el punto $(-1,2)$ en la dirección $\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$ es la $D_{\hat{u}}T(-1,2)$, siendo $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$

$$D_{\hat{u}}T(-1,2) = \vec{\nabla}T(-1,2)\cdot\hat{u} = (-4,\,-16)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2) = -\frac{28}{\sqrt{5}}$$

7. Si $z = xy + f(u,v);\ u = x^2 \wedge v = y^2$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial v} = 1$

a) Demuestre que $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$

b) Calcule $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$

Solución.

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = y + \dfrac{\partial f}{\partial u}2x + \dfrac{\partial f}{\partial v}0 = y + \dfrac{\partial f}{\partial u}2x$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = x + \frac{\partial f}{\partial u}0 + \frac{\partial f}{\partial v}2y = x + \frac{\partial f}{\partial v}2y$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y(y + \frac{\partial f}{\partial u}2x) - x(x + \frac{\partial f}{\partial v}2y) = y^2 - x^2 + 2xy(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v})$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2 + 2xy(0) = y^2 - x^2$$

b) Como $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial v} = 1 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = y + 2x \Rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \wedge \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 1,$ luego

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 2 - 1 = 1$$

8. Encuentre la derivada direccional en el punto $(1,0)$ de la superficie

$$f(x,y) = x(e^{-y} + x) + y^2$$

en la dirección de la recta AB donde $A(2,1)$ y $B(1,2)$.

Solución.

La dirección es $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-1,1) \Rightarrow \widehat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$

Ahora $\vec{\nabla} f(x,y) = (e^{-y} + 2x, -xe^{-y} + 2y) \Rightarrow \vec{\nabla} f(1,0) = (3, -1)$

Luego $\vec{\nabla} f(1,0) \cdot \widehat{u} = (3, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) = \frac{-4}{\sqrt{2}}$

9. Sea $F(x,y)$ una función tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = xe^{-y} \quad \wedge \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2}x^2 e^{-y}$$

Se define $W(u,v) = F(uv, log\, v),\ v > 0.$ Demostrar que:

(a) $$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

(b) $$\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} - \frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial u} = 0$$

Demostración.

a) De inmediato,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = -xe^{-y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

b) Considerando a), existe $F(x,y)$ tal que : $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy,$ así

Integrando $\frac{\partial F}{\partial x} = xe^{-y}$ con respecto a x resulta,

$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 e^{-y} + C(y) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2}x^2 e^{-y} + C'(y),$ pero

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2}x^2 e^{-y},$ entonces $C'(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow C(y) = log\, y + k$

luego,

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 e^{-y} + log\, y + k$$

Ahora,

$$\begin{aligned} W(u,v) = F(uv, log\, v) &= \frac{1}{2}u^2 v^2 e^{-log\, v} + log(log\, v) \\ &= \frac{1}{2}u^2 v + log(log\, v) \end{aligned}$$

entonces,

$$\frac{\partial W}{\partial v} = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{v\,log\,v} \Rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = u$$

$$\frac{\partial W}{\partial u} = uv$$

finalmente,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} - \frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial u} = u - \frac{1}{v}uv = 0$$

7. Derivación implícita. Jacobianos. Dependencia funcional. Funciones homogeneas.

1. a) Sea $z = f(x, y)$, dada por las ecuaciones

$$x = u + v, \qquad y = u^2 + v^2, \; z = u^3 + v^3, \quad (u \neq v)$$

encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

b) Dadas las funciones $u = 2sen^2 xy + 1$, $v = 6 - 4cos^2 xy$, ¿existe dependen cia funcional entre u y v?, Si existe encontrarla.

Solución.

a) **(Forma 1)**

Consideremos las variables u, v y z en términos de x e y, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{J(\frac{F,G,H}{u,v,x})}{J(\frac{F,G,H}{u,v,z})} \text{ con } \begin{cases} F = u + v - x \\ G = u^2 + v^2 - y \\ H = u^3 + v^3 - z \end{cases}$$

pero,

$$J(\frac{F,G,H}{u,v,x}) = \begin{vmatrix} F_u & F_v & F_x \\ G_u & G_v & G_x \\ H_u & H_v & H_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2u & 2v & 0 \\ 3u^2 & 3v^2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 3u^2 & 3v^2 \end{vmatrix}$$

$$= 6uv(u - v)$$

$$J(\frac{F,G,H}{u,v,z}) = \begin{vmatrix} F_u & F_v & F_z \\ G_u & G_v & G_z \\ H_u & H_v & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2u & 2v & 0 \\ 3u^2 & 3v^2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix}$$

$= 2(u - v)$

luego $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{6uv(u-v)}{2(u-v)} = -3uv$

(Forma 2)

Expresando z en términos de x e y

$$z = u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2) = (y - uv)$$

pero $\quad x^2 = u^2 + 2uv + v^2 \Rightarrow uv = \frac{1}{2}(x^2 - (u^2+v^2)) = \frac{1}{2}(x^2 - y)$

así: $\quad z = x(y - \frac{1}{2}(x^2 - y)) = \frac{3}{2}xy - \frac{1}{2}x^3$

luego $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{3}{2}(y - x^2) = \dfrac{3}{2}(u^2 + v^2 - (u+v)^2) = -3uv$

b) Calculamos

$$J(\frac{u,v}{x,y}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4y\, senxy\, cosxy & 4x\, senxy\, cosxy \\ 8y\, cosxy\, senxy & 8x\, cosxy\, senxy \end{vmatrix} = 0$$

luego existe dependencia funcional entre u y v, como

$$u = 2\, sen^2 xy + 1 = 2(1 - cos^2 xy) + 1 = 3 - 2\, cos^2 xy = \frac{1}{2}v$$

2. Dado que $x^2 + y^2 + z^2 = f(ax + by + cz)$, demuestre que

$$(cy - bz)\,\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\,\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$$

Solución.

Sea $F = x^2 + y^2 + z^2 - f(u) = 0$ con $u = ax + by + cz$

sabemos que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{2x - f'(u)a}{2z - f'(u)c}$,

también $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{2y - f'(u)b}{2z - f'(u)c}$, luego

$(cy - bz)\,\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\,\frac{\partial z}{\partial y} =$

$$-(cy - bz)\frac{2x - f'(u)a}{2z - f'(u)c} - (az - cx)\frac{2y - f'(u)b}{2z - f'(u)c}$$

de donde simplificando se obtiene

$$= \frac{2z(bx-ay) - f'(u)(bx-ay)}{2z - f'(u)c} = bx - ay$$

3. Sea $f(x,y)$ una función homogenea de grado $n,\ n \in \mathbb{N},$ demuestre que

$$x\,\frac{\partial(f_x, f)}{\partial(x,y)} \;=\; y\,\frac{\partial(f, f_y)}{\partial(x,y)}$$

Demostración.

$f(x,y)$ una función homogenea de grado $n \;\Rightarrow\; x\,f_x + y\,f_y \;=\; n\,f,$ derivando sucesívamente con respecto a x y a y se tiene:

$f_x + x\,f_{xx} + y\,f_{yx} \;=\; n\,f_x \qquad (1)$

$x\,f_{xy} + f_y + y\,f_{yy} \;=\; nf_y \qquad (2)$

multiplicando (1) por f_y y (2) por f_x e igualando

$f_xf_y + x\,f_{xx}\,f_y + y\,f_{yx} \;=\; x\,f_{xy}\,f_x + f_y\,f_x + y\,f_{yy}\,f_x$ de donde asociando

$x\,f_{xx}\,f_y \;-x\,f_{xy}\,f_x \;=\; y\,f_{yy}\,f_x - y\,f_{yx}\,f_y$

$x\,(f_{xx}\,f_y \;-\; f_{xy}\,f_x) \;=\; y\,(f_{yy}\,f_x -\; f_{yx}\,f_y) \;\Rightarrow\; x\,\dfrac{\partial(f_x, f)}{\partial(x,y)} \;=\; y\,\dfrac{\partial(f, f_y)}{\partial(x,y)}$

8. Máximos y Mínimos.

1. Determine todos los: máximos, mínimos y puntos silla, en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la función

$$z = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$$

Solución.

$z_x = \,-6xy - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \;\vee\; y = \,-1$

$z_y = 3y^2 - 3x^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow y^2 - x^2 - 2y = 0$

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0 \;\vee\; y = 2,$ luego $P_1(0,0),\ P_2(0,2)$

Si $y = \,-1 \Rightarrow x = \,\pm\sqrt{3},$ de aquí se tienen $P_3(\sqrt{3},\,-1)$ y $P_4(\,-\sqrt{3},\,-1)$

$H_2 z = \begin{bmatrix} -6y-6 & -6x \\ -6x & 6y-6 \end{bmatrix},$ por tanto

En $P_1(0,0),\ |H_1| = \,-6$ y $|H_2| = 36,$ entonces $z(0,0) = 1,$ es un máximo.

En $P_2(0,2), P_3(\sqrt{3},\,-1)$ y $P_4(-\sqrt{3},\,-1)$ son puntos sillares pues para cada punto $|H_2| < 0.$

2. Hállese tres números positivos x, y, z tales que su suma sea 30 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

Solución.

Se trata de minimizar $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeto a la condición

$$x + y + z = 30$$

Forma 1

Min. $g(x,y) = x^2 + y^2 + (30 - x - y)^2,$ de donde

$$g_x = 2x - 2(30 - x - y) = 0$$

$$g_y = 2y - 2(30 - x - y) = 0$$

así se obtiene: $x = y = 10$ y por tanto $z = 10$

$H_2 g = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y como $|H_1| = 4$ y $|H_2| = 12,$ entonces en el punto

$P_0(10,10,10)$ la función f tiene un mínimo que es $300.$

Forma 2

Mediante Lagrange, es decir

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(\, x + y + z - 30)$$

$$L_x = 2x + \lambda = 0$$
$$L_y = 2y + \lambda = 0$$
$$L_z = 2z + \lambda = 0$$
$$L_\lambda = x + y + z - 30 = 0$$

restando entre si dos a dos las tres primeras ecuaciones resulta $x = y = z$

Así de la cuarta ecuación se obtiene $x = y = z = 10$ y $\lambda = -20$

9. Multiplicadores de Lagrange

1. Determine los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x$$

en el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 5\}$

Solución.

1) Primero hallemos los puntos estacionarios dentro del círculo, para lo que

$$f_x = 4x - 4 = 0$$

$$f_y = 6y = 0$$

de donde se obtiene el punto $P_0(1,0)$.

Analizando el hessiano de f en dicho punto, se tiene

$$H_2 f(1,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$|H_1| = 4 > 0$ y $|H_2| = 24 > 0$, entonces f tiene en P_0 un mínimo cuyo valor es -2.

2) Segundo analizamos los puntos sobre la frontera de D, para lo que formamos la función de Lagrange,

$$L(x,y,\lambda) = 2x^2 + 3y^2 - 4x + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

de donde,

$$L_x = 4x - 4 + 2\lambda x = 0$$
$$L_y = 6y + 2\lambda y = 0$$
$$L_\lambda = x^2 + y^2 - 5 = 0$$

resolviendo el sistema obtenemos:

para $\lambda = \frac{2}{5}(\sqrt{5} - 5)$, los puntos $P_1(\sqrt{5}, 0)$ y $P_2(-\sqrt{5}, 0)$

para $\lambda = -3$, los puntos $P_3(-2, 1)$ y $P_4(-2, -1)$

como D es un compacto el máximo absoluto se obtiene para los puntos P_3 o P_4 y cuyo valor es 19 y el mínimo absoluto el el punto estacionario P_0 con un valor de -2.

2. Determine los máximos y mínimos de la expresión $x^2 + y^2$ sujetos a la condición $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$. Interprete geométricamente los resultados.

Solución.

Sea la función de Lagrange:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(3x^2 + 4xy + 6y^2 - 140)$$

$L_x = 2x + 6\lambda x + 4\lambda y = (1+3\lambda)x + 2\lambda y = 0 \qquad (1)$

$L_y = 2y + 4\lambda x + 12\lambda y = 2\lambda x + (1+6\lambda)y = 0 \qquad (2)$

$L_\lambda = 3x^2 + 4xy + 6y^2 - 140 = 0 \qquad (3)$

De (1) : $y = -\dfrac{1+3\lambda}{2\lambda}x$, en $(2) \Rightarrow 2\lambda x - \dfrac{1}{2\lambda}(1+6\lambda)(1+3\lambda)x = 0 \Rightarrow$ $[4\lambda^2 - (1+4\lambda)(1+6\lambda)]x = 0$, x debe ser distinto de cero pues si no $y = 0$ y la ecuación (3) no se cumpliría, por tanto

$$4\lambda^2 - (1+6\lambda)(1+3\lambda) = 0 \text{ de donde } \lambda_1 = -\frac{1}{7} \text{ y } \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

Si $\lambda_1 = -\dfrac{1}{7} \Rightarrow y = 2x$, en (3) resulta $35x^2 = 140 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \mp 4$

entonces se tienen dos puntos críticos que son: $P_1(2, -4)$ y $P_2(-2, 4)$

Así, $f(\pm 2, \mp 4) = (\pm 2)^2 + (\pm 4)^2 = 20.$

Si $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x$, en (3) resulta $x = \pm\sqrt{56} \Rightarrow y = \mp \dfrac{1}{2}\sqrt{56}$

tambien se tiene dos puntos críticos que son: $P_{3,4}(\pm\sqrt{56}, \mp \frac{1}{2}\sqrt{56})$

Así, $f(\pm\sqrt{56}, \mp\dfrac{1}{2}\sqrt{56}) = 70$

Luego, como la región $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$ es un compacto, entonces los extremos de la función $x^2 + y^2$ son: 20 es mínimo de la función y 70 su máximo.

Interpretación geométrica:

La región $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$ es una Elipse centrada en el origen $(0,0)$, cuyos semiejes forman ciertos ángulos con los ejes coordenados, al minimizar $x^2 + y^2$ estamos encontrando la longitud de los semiejes menores, pues la distancia desde el origen a ellos está dada por $\sqrt{x^2 + y^2}$ es decir dicha longitud es $\sqrt{20}$.

Analogamente los otros puntos son los vértices de la elipse y la distancia $\sqrt{70}$ es la longitud desde el origen $(0,0)$ a estos puntos.

3. Un pequeño industrial produce dos tipos de herramientas, cuyos costos son \$ 100 \$ 200 la unidad, si los precios de venta son x_1 y x_2 por unidad y las cantidades vendidas z_1 y z_2 (en unidades) son respectivamente.

$z_1 = 250(x_2 - 2x_1) + 32000$

$z_2 = 250(x_1 - x_2)$

Determine los precios que hacen máxima la ganancia del productor, siendo

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ z_1 \geq 0$ y $z_2 \geq 0$

Solución.

La función ganancia es $G(x_1, x_2) = (x_1 - 100)\, z_1 + (x_2 - 200)\, z_2$

o bien

$$G(x_1, x_2) = (x_1 - 100)[250(x_2 - 2x_1) + 3200] + (x_2 - 200)250(x_1 - x_2)$$

Así:

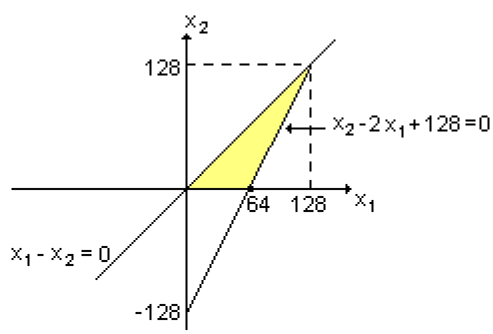
$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 250(x_2 - 2x_1) + 32000 + (x_1 - 100)(-500) + (x_2 - 200)250 = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 250(x_1 - 100) + 250(x_1 - x_2) + (x_2 - 200)250(-1) = 0$$

De donde se obtiene $x_1 = 114$ y $x_2 = 164$ punto crítico que no se considera pues

$z_2 = 250(114 - 164) < 0$ contradice una de las hipótesis

Analizamos los extremos de $G(x_1, x_2)$ en las fronteras de su dominio.



El dominio lo forman: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ z_1 \geq 0$ y $z_2 \geq 0$ ver fig.

Vértices del dominio $(0,0)$, $(64,0)$ y $(128,128)$

I) $x_2 = 0,\ 0 \leq x_1 \leq 64$

$$G = (x_1 - 100)[250(-2x_1) + 32000] - 200 \cdot 250\, x_1$$

$$G' = 250(-2x_1) + 32000 + (x_1 - 100)(-500) - 200 \cdot 250$$

$$G' = 0 \Rightarrow x_1 = 32,\ x_2 = 0$$

$G''(32) < 0 \Rightarrow$ máx. en $(32, 0)$, pero $G(32,0) < 0$ crítico que no se considera pues resulta una ganancia negativa

II) $x_2 = 2x_1 - 128,\ 64 \leq x_1 \leq 128$

$$G = (2x_1 - 328)250(-x_1 + 128)$$

$G' = 2 \cdot 250(-x_1 + 128) + (2x_1 - 328)250(-1) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 146 \notin [64, 128]$

Note que en $[64, 128]$, G es creciente con $G(64, 0) < 0$ y $G(128, 128) = 0$

III) $x_1 = x_2,\ 0 \leq x_1 \leq 128$

$$G = (x_1 - 100)[250(-x_1) + 32000]$$

$G' = [250(-x_1) + 32000] + (x_1 - 100)(-250) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = x_2 = 114$, $G'' = -500 < 0 \Rightarrow$ máx.

por tanto $G(114, 114) = 49000$ resulta ser la ganancia máxima.

4. Se necesita transportar 40 m^3 de áridos. Previamente, debe fabricarse un contenedor con forma de caja, sin tapa, el material de los lados opuestos cuesta \$10000, por m^2, y el material para la base y los otros dos lados cuesta \$5000 por m^2. Cada viaje del contenedor lleno cuesta \$4000. Determine las dimensiones del contenedor para minimizar el costo total.

Solución.

Si el contenedor tiene dimensiones x, y, z en metros, su volumen es $x\,y\,z$ m^3, luego hay que hacer $\dfrac{40}{x\,y\,z}$, el costo de los viajes es $\dfrac{160000}{x\,y\,z}$, el contenedor costará $xy\,5000 + 2xz\,5000 + 2yz\,10000$

Costo total : $C = f(x,y,z) = \dfrac{160000}{x\,y\,z} + xy\,5000 + 2xz\,5000 + 2yz\,10000$

$$= \ 1000\left(\frac{160}{x\,y\,z} + 5\,xy + 10\,xz + 20\,yz\right)$$

$$C_x = \ -\frac{160}{x^2yz} + 5\,y + 10\,z \ = \ 0 \ \ \Rightarrow \ \frac{160}{x^2yz} = 5\,y + 10\,z \qquad (1)$$

$$C_y = \ -\frac{160}{xy^2z} + 5\,x + 20\,z \ = \ 0 \ \Rightarrow \frac{160}{xy^2z} = 5\,x + 20\,z \qquad (2)$$

$$C_z = \ -\frac{160}{xy\,z^2} + 10\,x \ + 20\,y \ = \ 0 \ \Rightarrow \ \frac{160}{xy\,z^2} = \ 10\,x \ + 20\,y \qquad (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{y+2z}{x+4z} \ \Rightarrow y \ = \ \frac{x}{2}; \ \ \frac{(1)}{(3)} \ \Rightarrow \ \frac{z}{x} = \frac{y+2z}{2x+4y} = \frac{\frac{x}{2}+2z}{4x} \ \Rightarrow z = \frac{x}{4}$$

de donde $\quad -\dfrac{160}{x^2\,\frac{x^2}{8}} + \dfrac{5}{2}\,x + \dfrac{10}{4}\,x \ = 0 \ \Rightarrow x = \sqrt[5]{256} = 3.0314\,;\ y = 1.1557$ y $z = 0.7578$

5. Maximice

$$f(x,y) = ln(\,x+1) + y$$

sujeto a las condiciones $\qquad 2x + y \leq 3,\ \ x \geq 0,\ y \geq 0$

Solución.

Note que el gradiente de $f(x,y)$ no se anula en punto alguno $\Rightarrow$ no hay críticos en el interior de $D = \{(x,y)\,/\ 2x+y \leq 3,\ \ x \geq 0,\ y \geq 0\,\}$ por tanto se estudia en las fronteras de D.

I)

$x = 0,\ 0 \leq y \leq 3 \ \Rightarrow \ f(0,y) = y\,,\ f\,' \geq 0 \ \Rightarrow f$ crece desde 0 hasta 3

II)

$y = 0,\ \ 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \ \Rightarrow f(x,0) = log\,(x+1) \ \Rightarrow f\,'(x,0) = \frac{1}{x+1}$ y como

$f\,'(x,0) > 0,\ \forall x \in [\,0, \frac{3}{2}\,] \Rightarrow f$ siempre creciente en $[\,0, \frac{3}{2}\,]$, desde 0 hasta $log\frac{5}{2}$

III)

$$y = 3 - 2x,\ \ 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \ \Rightarrow f = log(x+1) + 3 - 2x \ \Rightarrow f\,' = \frac{1}{x+1} - 2 \ \Rightarrow$$

$x = -\frac{1}{2}$ crítico que no se toma en cuenta pues $\notin [0, \frac{3}{2}]$ y como $f' < 0 \Rightarrow f$ decrece desde 3 para $(0,3)$ hasta $log\frac{5}{2}$ para $(\frac{3}{2}, 0)$.

Por tanto el máximo se encuentra en el punto $(0,3)$ y cuyo valor es 3.

6. Encuentre los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = 8x^2 - 24xy + y^2$$

sujetos a la condición $x^2 + y^2 = 1$

Solución.

Sea $L(x,y,\lambda) = 8x^2 - 24xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$L_x = 16x - 24y + 2\lambda x = 0$$
$$L_y = -24x + 2y + 2\lambda y = 0$$
$$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Resolviendo este sistema, si bien de las dos primeras resultan $x = y = 0$ pero no satisfacen la tercera ecuación, entonces x e y distintos de cero conducen a las soluciónes:

$$(\lambda = 8,\ x = \pm\frac{3}{5},\ y = \pm\frac{4}{5}) \wedge (\lambda = -17,\ x = \pm\frac{4}{5},\ y = \mp\frac{3}{5})$$

Como el dominio es un compacto, para $x = \pm\frac{3}{5},\ y = \pm\frac{4}{5}$ la función tiene un mínimo, cuyo valor es -8, a su vez para $x = \pm\frac{4}{5},\ y = \mp\frac{3}{5}$ la función tiene un máximo, cuyo valor es 17.

7. Sea

$$f(x,y) = x^4 - y^2 - x^2 + 5y - 2$$

en el dominio $D = \{(x,y)/y = 3 \wedge y = x^2\}$.(incluye su frontera)

Determine:

a) Los máximos y mínimos relativos de f en el interior de D y en que puntos se alcanzan.

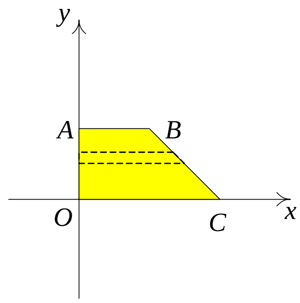
b) Los máximos y mínimos absolutos en el dominio D y los puntos en que se producen.

Solución.

10. Integración doble y triple

1. Calcule la constante k de modo que la $\displaystyle\iint_D kxy\,dA = 1,$ donde D es el trapezoide de vértices $O(0,0),\ A(0,1),\ B(1,1)$ y $C(2,0).$

Solución.



Notemos que la ecuación de la recta BC está dada por $x = 2 - y,$ entonces

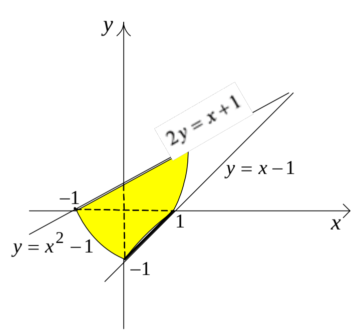
$D : 0 \le y \le 1 \ \wedge\ 0 \le x \le 2 - y,$ luego

$$\iint_D kxy\,dA = \int_0^1 \int_0^{2-y} kxy\,dx\,dy = 1 \Leftrightarrow k\,\frac{11}{24} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{24}{11}$$

2. Exprese $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA$ en ambas direcciones de integración, sabiendo que D es la región plana entre las curvas: $2y = 1 + x,\ x - y = 1\ \wedge\ y = x^2 - 1$ y luego calcule la integral en el sentido que estime conveniente, siendo $f(x,y) = 2x.$

Solución.

Graficando la región $D,$ se tiene:



En la dirección, $dA = dy\,dx$ y siendo $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ donde

$$D_1: -1 \leq x \leq 0 \ \wedge \ (x^2-1) \leq y \leq \frac{1}{2}(x+1)$$

$$D_2: 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ (x-1) \leq y \leq \frac{1}{2}(x+1),$$

$$D_3: 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \ \wedge \ (x^2-1) \leq y \leq \frac{1}{2}(x+1), \text{ se tiene:}$$

$$\int\int_D f(x,y)\ dA = \int_{-1}^{0}\int_{x^2-1}^{\frac{1}{2}(x+1)} f(x,y)\,dy\,dx + \int_0^1\int_{x-1}^{\frac{1}{2}(x+1)} f(x,y)\,dy\,dx +$$

$$+ \int_1^{\frac{3}{2}}\int_{x^2-1}^{\frac{1}{2}(x+1)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

En la dirección, $dA = dx\,dy$ y siendo $D = D_1 \cup D_2$ donde

$$D_1: -1 \leq y \leq 0 \ \wedge \ -\sqrt{y+1} \leq x \leq \sqrt{y+1},$$

$$D_2: 0 \leq y \leq \tfrac{5}{4} \ \wedge \ 2y-1 \leq x \leq \sqrt{y+1}, \text{ entonces se tiene}$$

$$\int\int_D f(x,y)\ dA = \int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^{\frac{5}{4}}\int_{2y-1}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Ahora, calculando en la dirección $dA = dx\,dy$, se tiene:

$$\int\int_D 2x\ dA = \int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} 2x\,dx\,dy + \int_0^{\frac{5}{4}}\int_{2y-1}^{\sqrt{y+1}} 2x\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{0} x^2\Big|_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}}\ dy + \int_0^{\frac{5}{4}} x^2\Big|_{2y-1}^{\sqrt{y+1}}\ dy$$

$$= 0 + \int_0^{\frac{5}{4}} [y+1-(2y-1)^2]\,dy = \int_0^{\frac{5}{4}} (5y-4y^2)dy \ = \frac{125}{96}$$

3. Dada

$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 sen(\frac{x}{y})\ dy\,dx$$

a) Exprese la integral, con el orden de integración cambiado

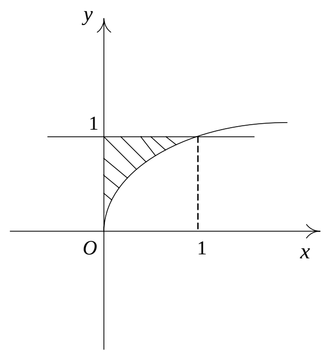
b) Calcule la integral

Solución.

a) Note que la región de integración está dada por

$$D: 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ \sqrt{x} \leq y \leq 1$$

dibujando esta región, resulta



Cambiando el orden de integración, se tiene que $D:\ 0 \leq y \leq 1\ \wedge\ 0 \leq x \leq y^2$ entonces:

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} sen(\frac{x}{y})\ dx\, dy$$

b) El cálculo de la integral debe hacerse necesariamente en el orden $dA = dx\, dy$, por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{y^2} sen(\frac{x}{y})\ dx\, dy &= -\int_0^1 y\, cos(\frac{x}{y})\ \Big|_0^{y^2} dy \\
&= -\int_0^1 (y\, cos\, y - y) dy \\
&= -(\int_0^1 y\, cos\, y\, dy - \int_0^1 y\, dy) \\
&= -(y\, sen\, y\Big|_0^1 - \int_0^1 sen\, y\, dy - \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1) \\
&= \frac{3}{2} - sen(1) - cos(1)
\end{aligned}$$

4. Calcular el volumen de una carpa de base rectangular de 50 por 60 metros, si la superficie del toldo está dada por $z = 16 - \frac{1}{120}(x^2 + y^2)$. (considere la simetría)

Solución.

5. Calcule

$$\int\int_R y\, sen(\, xy)\ dy\, dx$$

Siendo R la región comprendida entre las gráficas: $xy = 1, xy = \pi,\ y = 1,\ y = 4$

Sugerencia hacer $\quad x = \dfrac{u}{v};\ y = v.$

Solución.

Notemos que $xy = u,$ entonces: $R' : 1 \leq u \leq \pi\ \wedge\ 1 \leq v \leq 4,$ donde

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y = v$$

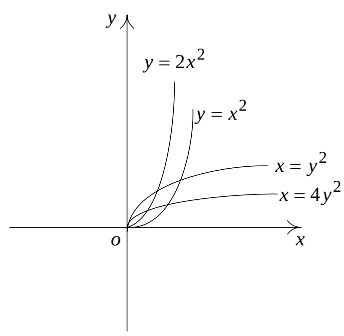
Así,

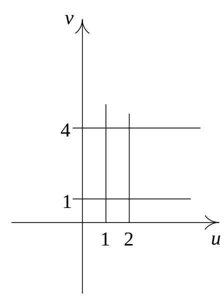
$$\int\int_R y\, sen(\, xy)\ dy\, dx = \int_1^{\pi}\int_1^4 v\, sen(u)\, v\, du\, dv$$

$$= \ -cos(u)\Big|_1^{\pi} \cdot \frac{v^3}{3}\Big|_1^4 = 21[1 + cos(1)]$$

6. Calcule el área de la región $R,$ acotada por: $y = x^2,\ y = 2x^2,\ x = y^2,\ x = 4y^2$ usando el cambio de variables $u = \dfrac{y}{x^2},\ v = \dfrac{x}{y^2}.$

Solución.





7. Calcule $\displaystyle\int\int\int_R \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$ siendo R la región limitada por el plano $z = 3$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$