# CÁLCULO I

## 1. Funciones

1. Sea $f(x) = a\,x + b$ una función en $\mathbb{R}$, $a$ y $b$ constantes. Determine $a$ y $b$ en los siguientes casos:

   i) $(1,\,-2) \in f \quad \wedge \quad f(0) = 4$

   ii) $f(1) = g(1) \;\wedge\; f(-1) = \dfrac{4}{3}$ donde $g(x) = \dfrac{2}{x+2}$

   **Solución.**

   i) $(1,\,-2) \in f \Rightarrow f(1) = -2 \Leftrightarrow a + b = -2$ por otra parte $f(0) = 4 \Leftrightarrow b = 4$ con lo que resulta $a = -6$. Asi $f(x) = -6\,x + 4$

   ii) $f(1) = g(1) \Rightarrow a + b = \dfrac{2}{3} \;\wedge\; f(-1) = \dfrac{4}{3} \Rightarrow -a + b = \dfrac{4}{3}$ de donde resolviendo este sistema de ecuaciones resultan: $a = -\dfrac{1}{3} \;\wedge\; b = 1 \Rightarrow$ $f(x) = -\frac{1}{3}\,x + 1$

2. Determine el dominio y recorrido de las siguientes funciones definidas sobre los reales

   a) $f(x) = 3\,x^2 - 1$

   b) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

   c) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

   d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}-2}$

   e) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$

   f) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$

   g) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{4-x^2}$

   **Solución.**

   a) Dom $f = \mathbb{R}$, para el recorrido $y = 3\,x^2 - 1 \Rightarrow 3\,x^2 = y + 1$ como $3\,x^2 \geq 0 \Rightarrow y + 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq -1 \Rightarrow$ Rec $f = [-1,\,+\infty]$

b) Dom $f=\mathbb{R}$, para el recorrido $x^2-4x+1=y \Rightarrow (x-2)^2=y+3 \Rightarrow$
$y \geq -3 \Rightarrow$ Rec $f=[-3,+\infty]$

c) Dom $f=\mathbb{R}-\{2\}$, para el recorrido $y=\dfrac{x}{x-2} \Rightarrow x=\dfrac{2y}{y-1} \Rightarrow$
Rec $f=\mathbb{R}-\{1\}$

d) Dom $f \Rightarrow \sqrt{x-2}-2 \neq 0 \ \wedge \ x-2 \geq 0 \ \Rightarrow$ Dom$f=[2,6)\cup(6,+\infty)$,
para el recorrido se tiene $\sqrt{x-2}=\dfrac{1}{y}+2 \Rightarrow \dfrac{1}{y}+2 \geq 0$, para todo $x$ del dominio, lo que nos da Rec $f=(-\infty,-\frac{1}{2}]\cup(0,+\infty)$.

e) Dom $f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$, para el recorrido se tiene $|x|=\dfrac{y+1}{y}$ que debe ser mayor o igual que cero, por la condición del módulo $\Rightarrow$
Rec $f=(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

f) Dom $f=\mathbb{R}-\{0\}$, ahora como $x^2=\dfrac{4}{1-y} \geq 0 \Rightarrow y<1 \Rightarrow$
Rec $f=(-\infty,1)$

g) Dom $f=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$, para todo $x$ del dominio se tiene $x=\dfrac{-2y}{y+1} \Rightarrow$
$y \neq -1$ pero note que si $x=2 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$ que tampoco debe estar en el recorrido pues $x \neq 2$, por tanto: Rec $f=\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2},-1\}$

3. Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x>9 \\ x^2-|x| & \text{si} \quad -9 \leq x \leq 9 \\ x+2 & \text{si} \quad x<-9 \end{cases}$$

a) Calcule: $f(0)$, $f(-9)$, $f(-12)$, $f(10)$ y $f(f(3))$
b) Hallar el Rec $f$.

**Solución.**

a) $f(0)=0^2-|0|=0$, $\qquad f(-9)=(-9)^2-|-9|=72$,

$f(-12) = -12 + 2 = -10, \qquad f(10) = 2 \cdot 10 + 5 = 25$
$f(f(3)) = f(3^2 - |3|) = f(6) = 6^2 - |6| = 30$

b) i) $\forall\, x > 9 \Rightarrow y = 2x + 5 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}(y-5)$ como $x > 9 \Rightarrow \dfrac{1}{2}(y-5) > 9$

$\Rightarrow y > 23,\ (1)$

ii) $\forall\, x : -9 \leq x \leq 9 \Rightarrow y = x^2 - |x| \Leftrightarrow (|x| - \dfrac{1}{2})^2 = y + \dfrac{1}{4} \Rightarrow$

$y \geq -\frac{1}{4}$ $(*)$, y ahora considerando $0 \leq x \leq 9 \Rightarrow$

$(|x| - \dfrac{1}{2})^2 = y + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} + \sqrt{y + \dfrac{1}{4}}$

note que el signo $(-)$ no se puede considerar, luego se debe tener

$0 \leq \dfrac{1}{2} + \sqrt{y + \dfrac{1}{4}} \leq 9 \Rightarrow \sqrt{y + \dfrac{1}{4}} \leq \dfrac{17}{2} \Rightarrow y \leq 72 \quad (**)$

Análogamente

$\forall\, x : -9 \leq x < 0 \Rightarrow (|x| - \dfrac{1}{2})^2 = y + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow (-x - \dfrac{1}{2})^2 = y + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow$

$-x - \dfrac{1}{2} = \pm\sqrt{y + \dfrac{1}{4}} \Rightarrow -x = \dfrac{1}{2} + \sqrt{y + \dfrac{1}{4}}$

note que esta última implicación es por ser $x$ negativo, luego se debe tener

$-9 \leq -\dfrac{1}{2} - \sqrt{y + \dfrac{1}{4}} < 0 \Rightarrow \sqrt{y + \dfrac{1}{4}} \leq \dfrac{17}{2}$ lo mismo que en $(**)$,

por tanto de $(*)$ y $(**)$ resulta: $-\dfrac{1}{4} \leq y \leq 72,\ (2)$

$\forall\, x : x < -9 \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow x = y - 2 \Rightarrow y - 2 < -9 \Rightarrow y < -7,\ (3)$

Por tanto el recorrido de $f$ es la unión de los conjuntos dados en: $(1)$, $(2)$ y $(3)$

es decir; Rec $f = (-\infty, -7) \cup [-\dfrac{1}{4}, +\infty)$.

4. Dadas en $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \tfrac{1}{x^2 - 3} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

i) Hallar el dominio y recorrido de $f$ y $g$.

ii) Hallar el dominio de $f \circ g$ y tambien de $g \circ f$

**Solución.**

i) Dom $f=\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{3}\}$, para el recorrido se tiene $x^2=\dfrac{1}{y}+3$ como

$x^2\geq 0 \ \Rightarrow \dfrac{1}{y}+3\geq 0 \Rightarrow$ Rec $f=(-\infty,-\dfrac{1}{3}]\cup(0,+\infty)$.

Dom$g \Rightarrow x^2-1\geq 0 \Rightarrow$ Dom $g=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Ahora como $x^2-1\geq 0 \ \forall x\in$ Dom $g \Rightarrow y\geq 0 \Rightarrow$ Rec $g=[0,+\infty)$

ii) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x^2-1})$ ahora si $x$ es tal que $(x\leq -1 \vee x\geq 1)$

$=\dfrac{1}{x^2-4} \Rightarrow x\neq \pm 2$ por tanto

Dom $f\circ g=$

$(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\dfrac{1}{x^2-3})$ de aquí $x\neq \pm\sqrt{3}$ entonces

$=\dfrac{1}{|x^2-3|}\sqrt{4-x^2}$ el dominio obliga a $-2\leq x\leq 2$

por tanto,

Dom $g\circ f=[-2,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2]$

5. Determine $f$ y la constante $a$ de modo que

$$f(x-a)f(x+a)=x^2-2x-1.5\,a$$

donde $f$ es una función polinómica de grado 1.

**Solución.**

Sea $f(x)=b\,x+c$ la función buscada, $b$ y $c$ constantes reales por determinar, $f(x-a)f(x+a)=[b(x-a)+c][b(x+a)+c]=x^2-2x-1.5\,a$ de donde se obtiene $b\,x^2+2\,bc\,x+c^2-b^2\,a^2=x^2-2x-1.5\,a \ \Rightarrow b=1,\ 2\,bc=-2$ y $c^2-b^2\,a^2=-1.5\,a$, luego $b=1,\ c=-1$ y $a=2 \ \vee \ a=-\frac{1}{2}$ por tanto $f(x)=x-1$

6. Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas en $\mathbb{R}$, por:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x\geq 1 \\ 2-x & \text{si} \quad x<1 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x>0 \\ 1-2x & \text{si} \quad x\leq 0 \end{cases}$$

i) Hallar una fórmula para $(f\circ g)(x)$

ii) Grafique: $f$, $g$ y $f \circ g$.

**Solución.**

i)

$$f(g(x)) = \begin{cases} f(1) & \text{si} \quad x > 0 \quad \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \geq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < 1 \end{cases} \\ \\ f(1-2x) & \text{si} \quad x \leq 0 \quad \begin{cases} -2x & \text{si} \quad 1-2x \geq 1 \\ 1+2x & \text{si} \quad 1-2x < 1 \end{cases} \end{cases}$$

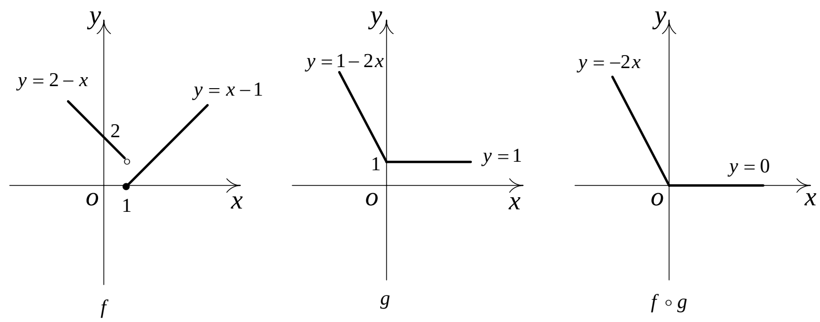
Note que: $(x > 0 \ \wedge \ 1 \geq 1) \Rightarrow \ x > 0$; $(x > 0 \ \wedge \ 1 < 1) \Rightarrow \emptyset$;

$(x \leq 0 \ \wedge \ 1-2x \geq 1) \Rightarrow x \leq 0$; $(x \leq 0 \ \wedge \ 1-2x < 1) \Rightarrow \emptyset$

por tanto

$$f(g(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x > 0 \\ -2x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ii)




7. Sea $f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ una función dada por

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$$

Demuestre que existe $f^{-1}$ y encuentre una fórmula para ella.

**Solución.**

Por demostrar que $f$ es uno a uno y sobre

i) **Uno a uno:**

$\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-2\},\ f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{2x_1 - 1}{x_1 + 2} = \dfrac{2x_2 - 1}{x_2 + 2} \Leftrightarrow$

$2\,x_1x_2 + 4x_1 - x_2 - 2 = 2\,x_1x_2 + 4x_2 - x_1 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ lo que prueba que $f$ es uno a uno.

ii) **Sobre:**

$$\forall\, y \in \mathbb{R} - \{2\},\, \exists\, x = \frac{1+2y}{2-y} \;/\; f(x) = \frac{2(\frac{1+2y}{2-y}) - 1}{\frac{1+2y}{2-y} + 2} = \frac{5y}{5} = y\,,$$

lo que prueba que $f$ es sobre.

Por tanto existe $f^{-1}$ y la fórmula que la define es

$$f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{2-x},\;\; f^{-1} : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{-2\}.$$

8. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; \wedge \;\; g : [-1, +\infty)$ dos funciones dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x \le 2 \\ 4-2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x-1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Demuestre que $f$ es invertible y halle una fórmula para $(f^{-1} \circ g)(x)$

**Solución.**

**Uno a uno:**

Debemos considerar necesariamente 3 casos:

i) $x_1, x_2 \in (-\infty, 2],\; f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2 - x_1 = 2 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

ii) $x_1, x_2 \in (2, +\infty],\; f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 4 - 2x_1 = 4 - 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

iii) $x_1 \in (-\infty, 2] \;\wedge\; x_2 \in (2, +\infty],$ como $x_1 \neq x_2$ vamos a demostrar que $f(x_1) \neq f(x_2);$ supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1$ y $x_2$ indicados esto implica que $2 - x_1 = 4 - 2x_2 \Rightarrow x_1 = 2x_2 - 2$ pero $x_1 \le 2 \Rightarrow 2x_2 - 2 \le 2$ $\Rightarrow x_2 < 2$ lo que contradice la hipótesis, luego lo supuesto es erroneo por tanto $f(x_1) \neq f(x_2)\; \forall\, x_1 \neq x_2$

**Sobre:**

$$\forall\, x \le 2 \Rightarrow y = 2 - x \Rightarrow x = 2 - y \Rightarrow 2 - y \le 2 \Rightarrow y \ge 0, \qquad (1)$$

$$\forall\, x > 2 \Rightarrow y = 4 - 2x \;\Rightarrow x = \tfrac{1}{2}(4 - y) \Rightarrow \tfrac{1}{2}(4 - y) > 2 \Rightarrow y < 0, \qquad (2)$$

luego por $(1)$ y $(2)$ se tiene que Rec $f = \mathbb{R},$ lo que prueba que $f$ es sobre.

Intercambiando $x$ por $y$ en $(1)$ y $(2),$ se tiene:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2 - \frac{x}{2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Fórmula para $(f^{-1} \circ g)(x)$

$$(f^{-1} \circ g)(x) = \begin{cases} f^{-1}(-1) \quad \text{si} \quad x \leq 0 & \begin{cases} 2 - (-1) & \text{si} \quad -1 \geq 0 \\ 2 - \frac{(-1)}{2} & \text{si} \quad -1 < 0 \end{cases} \\ f^{-1}(x-1) \quad \text{si} \quad x > 0 & \begin{cases} 2 - (x-1) & \text{si} \quad x - 1 \geq 0 \\ 2 - \frac{x-1}{2} & \text{si} \quad x - 1 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ahora como:

$$(x \leq 0 \ \wedge \ -1 \geq 0) \Rightarrow \emptyset; \ \ (x \leq 0 \ \wedge \ -1 < 0) \Rightarrow x \leq 0;$$

$$(x > 0 \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \Rightarrow x \geq 1; \ \ (x > 0 \ \wedge \ x - 1 < 0) \Rightarrow 0 < x < 1)$$

luego

$$(f^{-1} \circ g)(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \frac{5-x}{2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 3 - x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

9. Dadas en $\mathbb{R}$ : $f(x) = x^2, \ g(x) = \dfrac{1}{x}$ y $h(x) = sen\, x$

a) Calcule: $(f+g)(-2), \ (fg)\left(\frac{\pi}{3}\right), \ \left(\frac{h}{g}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right), \ (f \circ h)\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y $(g \circ h)\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) Hallar el dominio de: $f + g, \ g \circ h, \ h \circ g, \ g \circ g$ y $\dfrac{g}{fh}$

**Solución.**

a) $(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = (-2)^2 + \dfrac{1}{-2} = \dfrac{7}{2}$

$$(fg)\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \frac{3}{\pi} = \frac{\pi}{3}$$

$$\left(\frac{h}{g}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{sen\frac{\pi}{2}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{2}$$

$$(f \circ h)\left(\frac{\pi}{6}\right) = f(h(\frac{\pi}{6})) = f(sen\frac{\pi}{6}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

$$(g \circ h)\left(\frac{\pi}{3}\right) = g(h(\frac{\pi}{3})) = g(sen\frac{\pi}{3}) = g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

b) Como Dom$(f+g) = \text{Dom} f \cap \text{Dom}\ g$; Dom $f = \mathbb{R}$, Dom $g = \mathbb{R} - \{0\}$

entonces

Dom $(f+g) = \mathbb{R} - \{0\}$

Dom$(g \circ h) = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, x \in \text{Dom} h \ \wedge\ h(x) \in \text{Dom}\ g \,\}$,

como $(g \circ h)(x) = g(sen\, x) = \dfrac{1}{sen\, x} \Rightarrow$

Dom $(g \circ h) = \{\, x \in \mathbb{R} \,: x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \,\}$, de igual forma como

$(h \circ g)(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$ Dom $(h \circ g) = \{\, x \in \mathbb{R} \,: x \neq 0 \,\}$

$(\,g \circ g)(x) = g(\frac{1}{x}) = x$, aparentemente $\forall\, x \in \mathbb{R}$, pero de la definición

$x \in$ Dom $g \Rightarrow$ Dom $(\,g \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$.

10. Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}, \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Demuestre que: $f \circ g = g \circ f$

**Solución.**

Recordemos que: $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -\,x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

i) $\forall\, x < 0,\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = \dfrac{x + (-\,x)}{2} = 0$

$\forall\, x \geq 0,\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \dfrac{x^2 + |x^2|}{2} = x^2,$ por otra parte

ii) $\forall\, x < 0,\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0^2 = 0$

$\forall\, x \geq 0,\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = x^2$

Por i) y ii) se concluye que: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

11. Dados $a$, $b$, $c$ y $d$ constantes reales, donde

$$f(x) = ax + b \quad \text{y} \quad g(x) = cx + d.$$

Encuentre la condición necesaria y suficiente para tales constantes de modo que $f \circ g = g \circ f$

**Solución.**

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow f(cx+d) = g(ax+b) \Leftrightarrow$

$a(cx+d)+b = c(ax+b)+d \Leftrightarrow acx+ad+b = cax+cb+d$

$\Leftrightarrow ad+b = cb+d,$ que es la condición pedida.

12. Se define $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x - 4 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

a) Pruebe que $f$ es biyectiva

b) Determine una fórmula para $f^{-1}$ y luego grafique $f$ y $f^{-1}$en el mismo sistema.

**Solución.**

a) Debemos probar que $f$ es: uno a uno y sobre $\Rightarrow f$ es biyectiva,

**Uno a uno:**

i) $\forall\, x_1, x_2 \geq 2,\ f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 - 3x_1 = x_2^2 - 3x_2 \ \Leftrightarrow$
$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 3) = 0,$ ahora notemos que $x_1 + x_2 - 3 \geq 1$ pues $x_1, x_2 \geq 2$ entonces $x_1 = x_2$

ii) $\forall\, x_1, x_2 < 2,\ f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 - 4 = x_2 - 4 \ \Leftrightarrow x_1 = x_2$

iii) $\forall\, x_1 \geq 2 \ \wedge \ x_2 < 2$ como $x_1 \neq x_2$ probaremos que $f(x_1) \neq f(x_2)$
suponiendo para ello que $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 - 3x_1 = x_2 - 4$
$\Leftrightarrow x_2 = (x_1 - \dfrac{3}{2})^2 + \dfrac{7}{4}$ pero $x_2 < 2 \Rightarrow (x_1 - \dfrac{3}{2})^2 + \dfrac{7}{4} < 2 \ \Rightarrow$
$(x_1 - \dfrac{3}{2})^2 < \dfrac{1}{4} \Rightarrow x_1 < 2$ lo que contradice la hipótesis, luego
$f(x_1) \neq f(x_2),\ \forall\, x_1 \neq x_2$.
Por i), ii) y iii) se concluye que $f$ es uno a uno.

**Sobre:**

i) $\forall\, x \geq 2 \Rightarrow y = x^2 - 3x \Leftrightarrow (x - \dfrac{3}{2})^2 - \dfrac{9}{4} = y \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \pm \sqrt{y + \dfrac{9}{4}}$ como

$$x \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{2} + \sqrt{y + \frac{9}{4}} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{y + \frac{9}{4}} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow y \geq -2, \qquad (1)$$

ii) $\forall\, x < 2 \Rightarrow y = x - 4 \Leftrightarrow x = y + 4$ pero $x < 2 \Rightarrow y + 4 < 2 \Rightarrow$
$y < -2, \qquad (2)$

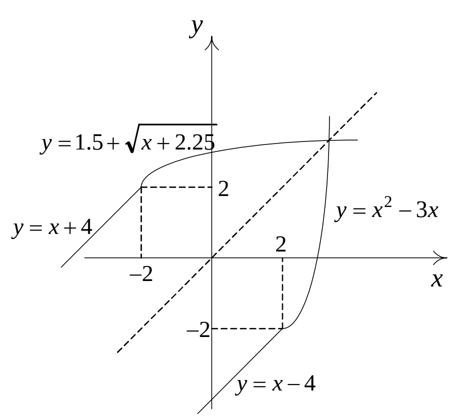
Por $(1)$ y $(2)$ concluímos que el Rec $f = \mathbb{R},$ lo que prueba que $f$ es sobre.

b) De (1) permutando $x$ por $y$ se tiene $y = \dfrac{3}{2} + \sqrt{x + \dfrac{9}{4}}\,,\ \forall\, x \geq -2$

de (2) se tiene $y = x + 4, \forall\, x < -2,$ en resumen

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} + \sqrt{x + \dfrac{9}{4}} & \text{si} \quad x \geq -2 \\ x + 4 & \text{si} \quad x < -2 \end{cases}$$

Gráficos de $f$ y $f^{-1}$




13. El perímetro de un rectángulo de lados $x$ e $y$ es dado, determine la función que calcula el área del rectángulo en términos del lado $x$.

**Solución.**

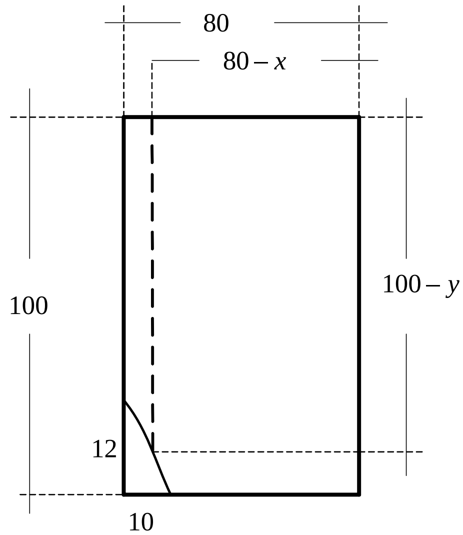
Sea $P$ el perímetro del rectángulo de lados $x$ e $y$ y $A$ su área, entonces

$P = 2x + 2y$ $(1)$, por otra parte $A = x\,y$ $(2)$, de $(1)$

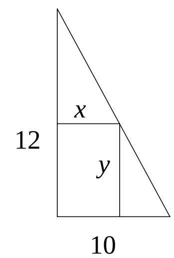
$y = \frac{P}{2} - x \Rightarrow A = x(\frac{P}{2} - x)$, note que $0 < x < \frac{P}{2}$

14. Un espejo rectangular de lados $80\,\text{cm.} \times 100\,\text{cm.}$ se rompe en una esquina como

se indica en la $fig.$ $(1)$. Determine el área de la sección achurada en términos de una sola variable ( $x$ o $y$)




$fig.(1)$




$fig.(2)$

**Solución.**

Notemos que la función que determina el área esta dada por

$$A = (80 - x)(100 - y)$$

Por otra parte de la $fig.(2)$ se tiene

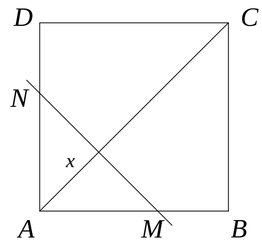
$$\frac{x}{10} = \frac{12 - y}{12} \Leftrightarrow y = 12 - \frac{6}{5}x, \text{ por tanto}$$

$$\text{A}(x) = (80 - x)\left(100 - 12 + \frac{6}{5}x\right) = (80 - x)(88 + \frac{6}{5}x)$$

con $0 \leq x \leq 10$.

15. En el cuadrado $ABCD$ de lado $AB = 2$ se traza una recta $MN$ perpendicular a la diagonal $AC$. Sea $x$ la distancia desde el vértice $A$ a la recta $MN$, expresar en función de $x$ el área $S$ del triángulo $AMN$ que se saca del cuadrado por medio de la recta $MN$. Hallar esta área para $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y para $x = 2$.

**Solución.**




Obsérvese que $AC = 2\sqrt{2} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$ si $x \leq \sqrt{2} \Rightarrow S(x) = x^2,$
si $\sqrt{2} < x \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow S(x) = 4 - (2\sqrt{2} - x)^2 \Rightarrow$
$S(x) = -x^2 + 4\sqrt{2}\,x - 4,$ por tanto

$$S(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ -x^2 + 4\sqrt{2}\,x - 4 & \text{si} \quad \sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Como : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{2} \Rightarrow S\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 = \dfrac{1}{2}$

de igual forma, como: $\sqrt{2} \leq 2 \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow$
$S(2) = -2^2 + 4\sqrt{2} \cdot 2 - 4 = 8(\sqrt{2} - 1)$

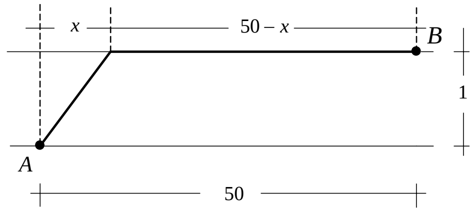
16. Se quiere unir dos puntos $A$ y $B$ mediante un cable de fibra óptica, los que se encuentran separados por un río de orillas paralelas, $A$ en una orilla y $B$ en la otra distantes $50$ km. entre si, el río es de $1$ km. de ancho. Si se sabe que el costo por km. de cable por el agua es, el doble más caro que por tierra. Determine la función de costo.

**Solución.**

Sean \$ $p$ el costo de km. de cable por tierra, entonces \$ $2p$ el costo de km. de cable por el agua y sea $C(x)$ la función de costo a determinar.

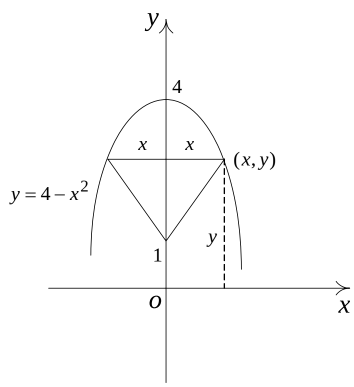
Por tanto se tiene:

$$C(x) = 2p\sqrt{1 + x^2} + p(50 - x), \text{ con } 0 \leq x \leq 50$$




17. Un triángulo isósceles tiene uno de sus vértices en el punto $(0,1)$ y los otros dos vértices en la parábola $y = 4 - x^2$, determine la función que calcula el área del triángulo en términos de la variable $x$.

**Solución.**




De la figura se tiene:

$$A(x) = 2\,x(y-1) = 2\,x(4 - x^2 - 1), \text{si } 0 \le x < \sqrt{3}$$
$$= 2\,x\,(3 - x^2)$$
$$A(x) = 2\,x(1-y) = 2\,x(x^2 - 3), \text{ si } \sqrt{3} \le x < 2,$$

en resumen:

$$A(x) = 2\,x\,|3 - x^2|, \;\forall\, x : 0 \le x \le 2$$

## 2. Sucesiones y límites

1. Calcular los límites siguientes

a) $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{n^3}{2n^2 - n} - \dfrac{n^2}{2n+1}]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5+n^4}$

**Solución.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} [\dfrac{n^3}{2n^2-n} - \dfrac{n^2}{2n+1}] = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}$

b) Nótese que

$$2n^4 \le n^5+n^4 \le 2n^5 \Leftrightarrow \sqrt[n]{2}\,(\sqrt[n]{n})^4 \le \sqrt[n]{n^5+n^4} \le \sqrt[n]{2}\,(\sqrt[n]{n})^5$$

y como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\,(\sqrt[n]{n})^4 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\,(\sqrt[n]{n})^5 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5+n^4} = 1$

2. Sean $\alpha, \beta, \gamma$ reales y la relación $\alpha + 2\beta - 4\gamma = 4$. Determine $\alpha, \beta$ y $\gamma$ tales que se cumpla

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{2n+5}{2n-3})^{\alpha n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n^2+1}{n^2-n})^{\beta n+\gamma}$$

**Solución.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{2n+5}{2n-3})^{\alpha n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{8}{2n-3})^{\alpha n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{\frac{2n-3}{8}}\Big)^{\frac{2n-3}{8}\cdot\frac{8}{2n-3}\cdot\alpha n} = e^{4\alpha}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \big(\frac{n^2+1}{n^2-n}\big)^{\beta n+\gamma} = \lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + \frac{n+1}{n^2-n}\big)^{\beta n+\gamma}$

$$= \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{\frac{n^2-n}{n+1}})^{\frac{n^2-n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n^2-n}(\beta n+\gamma)} = e^{\beta}$$

Se debe tener $e^{4\alpha} = e^{\beta} \Leftrightarrow \beta = 4\alpha \Rightarrow \alpha + 2\cdot 4\alpha - 4\gamma = 4,$ de donde:

$$\alpha = \frac{4}{9}(1+\gamma); \quad \beta = \frac{16}{9}(1+\gamma); \quad \gamma \text{ parámetro.}$$

3. Sea la sucesión $a_n$ definida por:

$$a_1 = 3, \ldots, a_n = \sqrt{2+a_{n-1}} \text{ con } a_n \ge 2$$

Demuestre que $a_n$ es convergente y luego calcule su límite.

**Demostración.**

$a_1 = 3 > 0;$ supongamos $a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} > 0,$ por tanto hemos demostrado por inducción que todos los términos de la sucesión son positivos.

Observando que $a_1 = 3 > \sqrt{5} = a_2$ vamos a demostrar también por inducción que $a_{n+1} < a_n$ aceptando esto último como hipótesis inductiva, entonces se tiene $2 + a_{n+1} < 2 + a_n \Leftrightarrow \sqrt{2 + a_{n+1}} < \sqrt{2 + a_n} \Leftrightarrow a_{n+2} < a_{n+1}$, lo que prueba que la sucesión es decreciente en forma estricta, entonces podemos afirmar de inmediato que la sucesión es acotada es decir: $0 < a_n < 3$

Entonces sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ con $l > 0$, ahora de $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} \Rightarrow$ $l = \sqrt{2 + l} \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0 \Rightarrow l \in \{-1, 2, \infty\}$, pero como $l > 0 \Rightarrow l = 2$

4. Demostrar que la sucesion $a_n$ tiene límite y precisar dicho límite

$$a_1 = \frac{a_0}{a + a_0},\ a_2 = \frac{a_1}{a + a_1},\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot, a_n = \frac{a_{n-1}}{a + a_{n-1}};\ a_0 > 0,\ \underline{a > 1}$$

**Solución.**

Como $a_0 > 0,\ a > 1 \Rightarrow a_1 > 0.$

Supongamos $a_{n-1} > 0$, por demostrar que $a_n > 0$ lo que es inmediato, por tanto se trata de una sucesión de términos positivos.

Vamos a demostrar que es monótona decreciente, lo que es inmediato pues

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{a + a_{n-1}} < a_{n-1},\ \text{por ser}\ a + a_{n-1} > 1,\ a > 1\ \wedge\ a_{n-1} > 0$$

Se demostró que $a_n > 0$ y $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a + a_{n-1}} = 1 - \dfrac{a}{a + a_{n-1}} < 1$, luego

$0 < a_n < 1 \Rightarrow a_n$ es acotada, por tanto como es decreciente y acotada

límite. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = l$ con $l \geq 0$, de $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a + a_{n-1}} \Rightarrow$

$a_n(a + a_{n-1}) = a_{n-1} \Rightarrow l(a + l) = l \Leftrightarrow l(a + l - 1) = 0$ de aquí se deduce

que: $l = 0\ \vee\ l = 1 - a$ pero $a > 1 \Rightarrow l < 0$ lo que no puede ser pues

$a_n > 0\ \forall n$, entonces $l = 0$.

5. Si $a_1, b_1$ son números positivos cualquiera y $a_1 < b_1$, se define $a_2 = \sqrt{a_1 b_1}$, $b_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1),\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot, a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}},\ b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$

Demostrar que:

a) La sucesión $a_n$ es convergente.

b) La sucesión $b_n$ es convergente.

c) Las dos sucesiones tienden al mismo límite.

**Solución.**

a) Se sabe $\sqrt{a_1 b_1} < \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \Leftrightarrow a_2 < b_2$

y como $0 < a_1 < b_1 \Rightarrow a_1^2 < a_1 b_1 \Leftrightarrow a_1 < \sqrt{a_1 b_1} \Rightarrow a_1 < a_2$

también $a_1 < b_1 \Leftrightarrow a_1 + b_1 < 2b_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_1 + b_1) < b_1 \Rightarrow b_2 < b_1$

Así: $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ por inducción supongamos se cumple que

$$a_1 < \cdot \cdot \cdot < a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} < \cdot \cdot \cdot < b_1 \ (H.I.)$$

razonando igualmente para $0 < a_n < b_n \Rightarrow \begin{cases} a_n < \sqrt{a_n b_n} \\ \frac{1}{2}(a_n + b_n) < b_n \end{cases}$

luego $\quad a_n < \sqrt{a_n b_n} < \frac{1}{2}(a_n + b_n) < b_n$

es decir: $\quad a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$

esto prueba que $a_n$ es creciente y que $b_n$ es decreciente

y también $a_1 < a_n < b_1$ y que $a_1 < b_n < b_1$ luego ambas son acotadas, por tanto son convergentes.

Sean: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$

Vamos a probar previamente que $b_n - a_n \leq \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$, por inducción

Para $n = 1$ es evidente, por demostrar $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{b_1 - a_1}{2^n}$

En efecto $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + a_n) - \sqrt{a_n b_n} = \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2}{2} \qquad (*)$

Por otra parte $a_n < b_n \Rightarrow 2a_n < 2\sqrt{a_n b_n} \Rightarrow a_n - 2\sqrt{a_n b_n} < -a_n \Rightarrow$

$$b_n + a_n - 2\sqrt{a_n b_n} < b_n - a_n \Leftrightarrow (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2 < b_n - a_n$$

finalmente en $(*)$

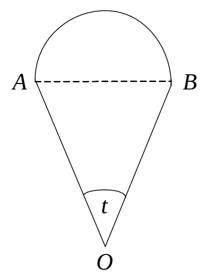
$b_{n+1} - a_{n+1} < \dfrac{1}{2}(b_n - a_n) < \dfrac{1}{2}\dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$, esto último por (H.I.), de donde queda $\quad b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{b_1 - a_1}{2^n}$ como se pretendía.

Ahora: $b_n - a_n \leq \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0 \Leftrightarrow$

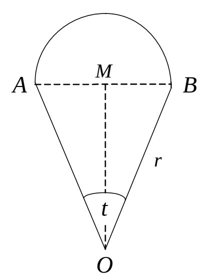
$$0 \leq l_1 - l_2 \leq 0 \Rightarrow l_1 = l_2$$

## 3. Límites de funciones

1. Considere la región formada por un triángulo isósceles coronado por un semicírculo, como se muestra en la figura.
   Sea $D$ el área del triángulo $AOB$ y $E$ el área total de la región.
   Determine una relación para $\dfrac{D}{E}$ en términos de $t$ (el ángulo de la figura) y luego calcule $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{D}{E}$




**Solución.**




Sea $OB = r$, $M$ punto medio de $AB$, entonces

$OM = r\,cos\,\dfrac{t}{2}$, $MB = r\,sen\,\dfrac{t}{2}$, así: $D = \dfrac{1}{2} \cdot 2\,r\,sen\,\dfrac{t}{2} \cdot r\,cos\,\dfrac{t}{2}$, y

$E = \dfrac{1}{2}\pi(r\,sen\,\dfrac{t}{2})^2 + r^2 sen\,\dfrac{t}{2}\,cos\,\dfrac{t}{2}$

luego:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{D}{E} = \lim_{t\to 0^+} \frac{r^2 sen\,\frac{t}{2}\,cos\,\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}\pi(r\,sen\,\frac{t}{2})^2 + r^2 sen\,\frac{t}{2}\,cos\,\frac{t}{2}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{cos\,\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}\pi\,sen\,\frac{t}{2} + cos\,\frac{t}{2}} = \frac{1}{0+1} = 1$$

2. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{e^{2x^2+x-1}-e^{x^2+x+1}}{x^2-2} = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{e^x(e^{2x^2-1}-e^{x^2+1})}{x^2-2}$

Sea $t = x^2-2 \Rightarrow (x\to\sqrt{2} \Rightarrow t\to 0)$, así resulta

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{\sqrt{t+2}}(e^{2t+3}-e^{t+3})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\sqrt{t+2}}e^3(e^{2t}-e^t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} e^{\sqrt{t+2}}e^3[\frac{e^{2t}-1}{2t}\cdot 2 - \frac{e^t-1}{t}] = e^{\sqrt{2}+3}[2-1]$$

$$= e^{\sqrt{2}+3}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Arcsen\,x - Arctg\,x}{x^3}$

Previo $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{Arcsen\,u}{u} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{v}{sen\,v} = 1$ $\quad (*)$; se hizo $v = Arcsen\,u$

Ahora sea $Arcsen\,x - Arctg\,x = t \Leftrightarrow \alpha - \beta = t$; tomando seno resulta

$sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta = sen\,t$; pero $sen\,\alpha = x$ y $tg\,\beta = x$ de donde:

$$x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2} = sen\,t \Leftrightarrow$$

$t = Arcsen\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(1-\sqrt{1-x^2})$, entonces el límite queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{Arcsen\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(1-\sqrt{1-x^2})}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{Arcsen\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(1-\sqrt{1-x^2})}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(1-\sqrt{1-x^2})} \cdot \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(1-\sqrt{1-x^2})}{x^3} \cdot \frac{(1+\sqrt{1-x^2})}{(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{Arcsen\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(1-\sqrt{1-x^2})}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(1-\sqrt{1-x^2})} \cdot \frac{1^2-(1-x^2)}{\sqrt{1+x^2}\,x^2} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})}$$

la primera expresión tiende a $1$ por $(*)$, y la segunda a $\frac{1}{2}$, por tanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{Arcsen\,x - Arctg\,x}{x^3} = \frac{1}{2}$$

## 4. Continuidad

## 5. Derivadas

1. Hallar todos los valores del parámetro $a$ para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} a^2x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 - 2a|a| & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

sea derivable en todo su dominio.

**Solución.**

Para todo $x \neq 2,\ f'(x) = \begin{cases} a^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

por tanto es derivable.

Para $x = 2$, la función primero debe ser continua es decir

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-} a^2x = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 3x + 2 - 2a|a|)$$

$a^2 2 = 2^2 - 3\cdot 2 + 2 - 2a|a| \Leftrightarrow a^2 = -a|a|$ entonces es continua para $a \leq 0$

Para la derivabilidad en $x = 2$ se debe tener

$f_+(2) = f_-(2) \Leftrightarrow 2\cdot 2 - 3 = a^2 \Leftrightarrow a^2 = 1$ como $a \leq 0$ entonces $a = -1$

2. Calcule la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (\frac{xcos(x)}{x^3+4})^{\frac{1}{5}}$ b) $f(x) = ln(e^{x^2}\sqrt[3]{x^2+x})$

**Solución.**

a)

$$f(x) = (\frac{xcos(x)}{x^3+4})^{\frac{1}{5}} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(\frac{xcos(x)}{x^3+4})^{-\frac{4}{5}} \frac{[cosx - x\,sen\,x](x^3+4) - xcos(x)3x^2}{(x^3+4)^2}$$

b)

$$f(x) = ln(e^{x^2}\sqrt[3]{x^2+x}) = lne^{x^2} + ln\sqrt[3]{x^2+x} = x^2 + \tfrac{1}{3}ln(x^2+x)$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+x}(2x+1)$$

3. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x+A}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determine $f'(x)$, para los $x < 0$

b) Analice para que valores de $A$, $f$ es derivable en $x = 0$

**Solución.**

a) Para los $x < 0$ se tiene $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2+1)1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$$

b) $f(x)$ previamente debe ser continua en $x = 0$, entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = A \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+A}{(x+1)^2} = A \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x-2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

luego debe ser $A = -\dfrac{1}{2}$.

Ahora para que $f$ sea derivable en $x = 0$, es necesario que $f'_-(0) = f'_+(0)$

Para : $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$, y para $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-x+2}{(x+1)^3}$

$$f'_-(0) = \frac{0^2 - 4\cdot 0 - 1}{(0-2)^2} = -\frac{1}{4}, \quad f'_+(0) = \frac{-0+2}{(0+1)^3} = 2$$

Por tanto $f$ no es derivable en $x = 0$.

4. Calcule $y''$ en $x = 1$ si $x = tg(\frac{\pi}{4}\sqrt{y})$

**Solución.**

$$x = tg(\frac{\pi}{4}\sqrt{y}) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}\sqrt{y} = tg^{-1}x \Leftrightarrow y = \frac{16}{\pi^2}(tg^{-1}x)^2$$

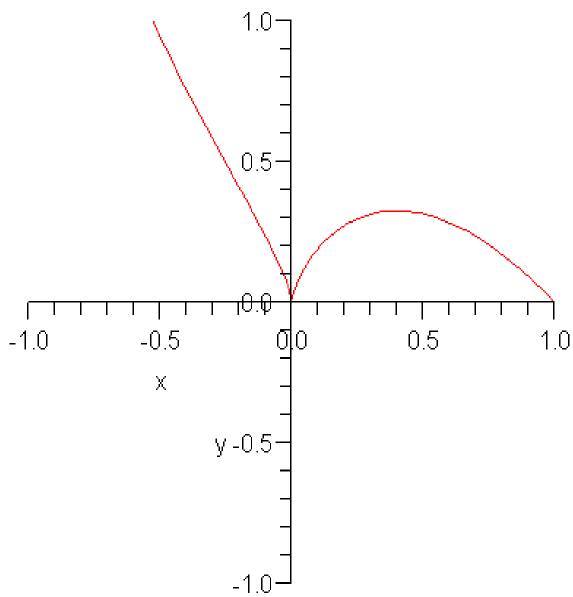
Así, $\quad y' = \frac{16}{\pi^2} 2\,(tg^{-1}x)\frac{1}{1+x^2} = \frac{32}{\pi^2}\frac{(tg^{-1}x)}{1+x^2}$

$$y'' = \frac{32}{\pi^2}\frac{\frac{1}{1+x^2}(1+x^2) - (tg^{-1}x)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{32}{\pi^2}\frac{1-(tg^{-1}x)2x}{(1+x^2)^2}$$

$$y''(1) = \frac{32}{\pi^2}\frac{1-\frac{\pi}{4}2}{4} = \frac{8}{\pi^2}\,(1-\frac{\pi}{2})$$

5. Grafique la función $y = f(x) = x^{2/3}(1-x)$, con $-1 \leq x \leq 1$
Use la calculadora para indicar donde la derivada de la función, $f'$, es positiva y donde es negativa en $[-1, 1]$.

**Solución.**




$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(1-x) + x^{2/3}(-1) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \text{ por lo tanto}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{2}{5}$; $\;f$ es creciente

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (-1 < x < 0 \;\vee\; \frac{2}{5} < x < 1$; $\;f$ es decreciente.

6. a) Encuentre la derivada n-ésima de la función

$$y = \frac{4}{4x^2 - 1}$$

b) Demuestre que, para $x > 0$,

$$\frac{x}{1+x^2} < tg^{-1}x < x$$

**Solución.**

a) Previo $y = \dfrac{4}{4x^2-1} = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{2}{2x+1} = 2(2x-1)^{-1} + 2(2x+1)^{-1}$

$$y' = 2(-1)(2x-1)^{-2}2 + 2(-1)(2x+1)^{-2}2$$

$$y'' = 2 \cdot 1 \cdot 2(2x-1)^{-3}2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2(2x+1)^{-3}2^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = (-1)^n 2n!(2x-1)^{-(n+1)}2^n + (-1)^n 2n!(2x+1)^{-(n+1)}2^n$$

o bien

$$y^{(n)} = (-1)^n n!(2x-1)^{-(n+1)}2^{n+1} + (-1)^n n!(2x+1)^{-(n+1)}2^{n+1}$$

b) Aplicando el teorema del valor medio en $[0,x]$, $x > 0$ para $f(x) = tg^{-1}x$ función continua en $[0,x]$ y derivable en $(0,x)$, se tiene

$$f'(\epsilon) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{tg^{-1}x}{x}, \text{ con } \ 0 < \epsilon < x$$

por otra parte, como : $0 < \epsilon < x \Leftrightarrow 1 < 1 + \epsilon^2 < 1 + x^2$ de donde

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+\epsilon^2} < 1 \text{ y } f'(\epsilon) = \frac{1}{1+\epsilon^2}$$

entonces $\dfrac{1}{1+x^2} < f'(\epsilon) < 1$

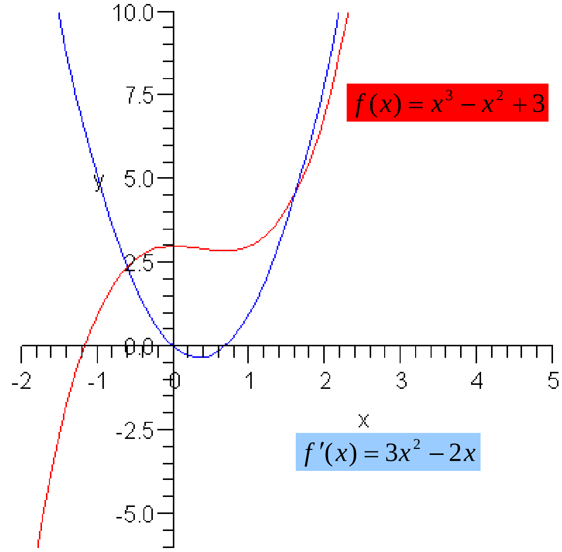
finalmente $\dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{tg^{-1}x}{x} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+x^2} < tg^{-1}x < x$

7. Utilice calculadora gráfica, para dibujar las gráficas de $f(x) = x^3 - x^2 + 3$ y su derivada $f'(x)$ en $[-2, 5]$, utilizando los mismos ejes.

a) En este intervalo, ¿en donde es $f'(x) < 0$.

b) En este intervalo, ¿en donde $f(x)$ es decreciente

c) Haga una conjetura y compruébela para $f(x)$.




a) $f'(x) < 0,\ \forall\, x \,/\, 0 < x < \dfrac{2}{3}$ .

b) $f(x)$ es decreciente, $\forall\, x \,/\, 0 < x < \dfrac{2}{3}$

c) De los gráficos notemos que, si $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ es decreciente.

Comprobando esta conjetura se tiene:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 0,$$

de donde resolviendo en $[-2, 5]$, se obtienen

$$x = 0 \ \vee \ x = \frac{2}{3}$$

Signos de $f'$ :

| | $-2$ | | $0$ | | $0,66..$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+$ | $\bullet$ | $-$ | $\bullet$ | $+$ |

lo que confirma la cojetura a partir de los gráficos.

8. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+1}{x+2} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \dfrac{2x+A}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

a) Determine $f'(x)$, para los $x < 0$

b) Analice para que valores de $A$, $f$ es derivable en $x = 0$

**Solución.**

a) Para los $x < 0$ se tiene $f(x) = \dfrac{2x + A}{(x-1)^2} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)^2 - (2x+A)2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2(x+1+A)}{(x-1)^3}$$

b) $f(x)$ previamente debe ser continua en $x = 0$, se debe tener

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^2+1}{x+2} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x+A}{(x-1)^2} = A \end{cases}$$

luego debe ser $A = \dfrac{1}{2}$.

Ahora para que $f$ sea derivable en $x = 0$, es necesario que $f'_-(0) = f'_+(0)$

Para $x < 0$, $f'(x) = -\dfrac{2(x+1+\frac{1}{2})}{(x-1)^3}$,

Para $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{4x(x+2) - (2x^2+1)}{(x+2)^2}$

$$f'_-(0) = -\frac{2(0+1+\frac{1}{2})}{(0-1)^3} = 3$$

$$f'_+(0) = \frac{4\cdot 0(0+2) - (2\cdot 0^2+1)}{(0+2)^2} = -\frac{1}{4}$$

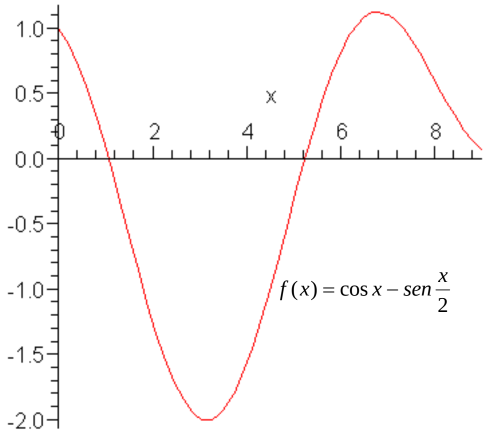
Por tanto $f$ no es derivable en $x = 0$.

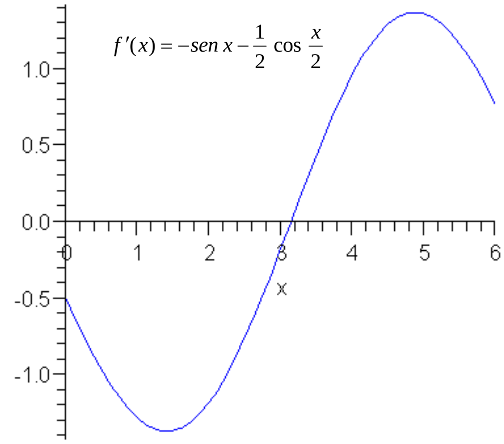
9. Utilice calculadora gráfica, para dibujar las gráficas de $f(x) = cos\, x - sen\, \dfrac{x}{2}$ y su derivada $f'(x)$ en $[0,9]$, utilizando los mismos ejes.

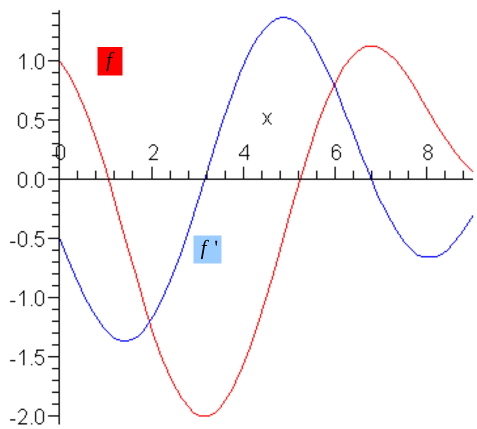
a) En este intervalo, ¿en donde es $f'(x) > 0$.

b) En este intervalo, ¿en donde $f(x)$ es creciente

c) Haga una conjetura y compruébela para $f(x)$.




a) $f\,'(x) > 0, \ \forall\, x \,/\, \pi < x < 9.$

b) $f(x)$ es creciente, $\forall\, x \,/\, \pi < x < 2\pi - 2\,sen^{-1}(\frac{1}{4})$

c) De los gráficos notamos que, si $f\,'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ es creciente.

Comprobando esta conjetura se tiene:

$$f\,'(x) = \ -\,sen\,x - cos\,\frac{x}{2} \ = 0,$$

de donde resolviendo con máquina se obtienen en $[\,0, 9\,]$, los puntos

$$x = \pi \ \vee \ x = 2\pi - 2\,sen^{-1}(\tfrac{1}{4}) \approx 5.7782..$$

Signos de $f'$ :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-$ | $\bullet$ | $+$ | $\bullet$ | $-$ | |
| $0$ | | $\pi$ | | $5.7782$ | | |

lo que confirma la cojetura a partir de los gráficos.

10. a) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2-2x-x^3 & \text{si} \quad x>0 \\ x^2+3x+2 & \text{si} \quad x\le 0 \end{cases}$$

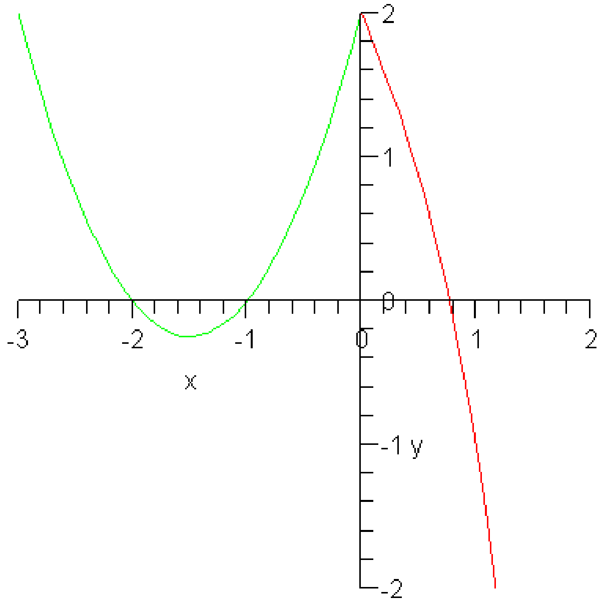
Demuestre que la ecuación $f(x)=0$ tiene una sola raíz en el intervalo $]-1,1[$.

b) Sea $y=arcsen(x)+(arcsen(x))^2$. Determine $\lambda$ (constante) de manera que

$$(1-x^2)\,y''-x\,y'=\lambda$$

**Solución.**

a)




De inmediato $(\,f(1)=\,-1$ y $f(0)=2\;\Rightarrow f(1)f(0)=\,-2<0,$ y como $f$ es continua en $[0,1]$ en el interior de este intervalo existe una raíz.

Por otra parte la función es creciente y continua en $[-1,0]$, y como $f(x)$ es siempre positiva en $]-1,0[$ no hay raíces.

Por lo cuál en $]-1,1[$ , $f(x)$ tiene exactamente una raíz.

b)

$$y=arcsen(x)+(arcsen(x))^2$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+2\,arcsen(x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+2\,arcsen(x)\,)$$

$$y'' = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1+2\,arcsen(x)\,) + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ así}$$

$$y'' = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x\,arcsen(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{1-x^2}, \text{ luego}$$

$$(1-x^2)\,y'' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x\,arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}} + 2$$

$$-\,x\,y' \;=\; -\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x\,arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

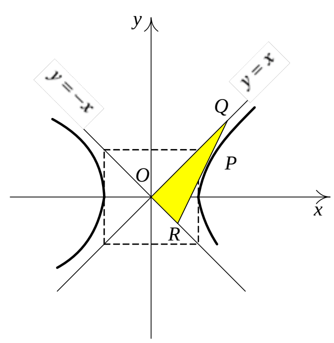
finalmente, sumando miembro a miembro estas dos ecuaciones se tiene:

$$(1-x^2)\,y'' - x\,y' = 2 \text{ por tanto } \lambda = 2$$

## 6. Aplicaciones de la derivada

1. Dada la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ se traza una tangente en un punto $P$ cualquiera de ella, que interseca en $Q$ y $R$ a sus asíntotas. Demuestre que el área del triángulo $OQR$ es igual a $a^2$.

**Solución.**




Sea $P(u,v)$ entonces $u^2 - v^2 = a^2$, por pertenecer $P$ a la hipérbola.

Ecuación de la tangente en $P$ : $y - v = m_t(x-u)$ $\qquad (1)$

Pendiente de la tg. $m_t = y'(u,v)$, derivando $2x - 2y\,y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{x}{y}$

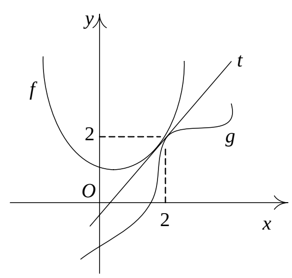
luego $m_t = \dfrac{u}{v}$, así resulta de $(1)$ : $\quad y - v = \dfrac{u}{v}(x-u)$ de donde intersecando con $y = x$ obtenemos las coordenadas de $Q$ que son: $x = y = \dfrac{a^2}{u-v}$ y también con $y = -x,$ las coordenadas de $R$ que son: $x = y = -\dfrac{a^2}{u+v},$ finalmente como el triángulo es rectángulo su área es

$$A = \tfrac{1}{2}\, OQ \cdot OR, \text{ donde } OQ = \sqrt{2}\,\frac{a^2}{|u-v|} \text{ y } OR = \sqrt{2}\,\frac{a^2}{|u+v|}$$

luego remplazando resulta $A = \dfrac{a^4}{|u^2 - v^2|} = \dfrac{a^4}{a^2} = a^2$

2. Para que valores de $a, b$ y $c$ los gráficos de $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 + cx$ tienen una tangente común en $(2,2)$.

**Solución.**




Se debe tener:

$$f(2) = 2 \Leftrightarrow \quad 4 + 2a + b = 2 \qquad (1)$$
$$g(2) = 2 \Leftrightarrow \quad 8 + 2c = 2 \qquad (3)$$
$$f'(2) = g'(2) \Leftrightarrow 2 \cdot 2 + a = 3 \cdot 2^2 + c \qquad (4)$$

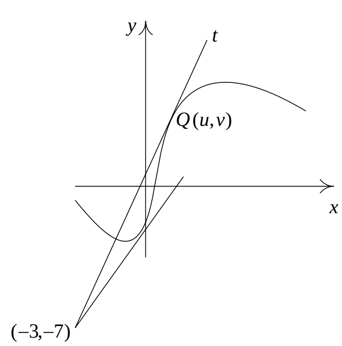
de donde resolviendo se obtiene: $a = 5,\ b = -12$ y $c = -3$

3. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6 = 0$$

trazadas desde el punto $P_0(-3, -7)$

**Solución.**



Primero $Q(u,v)$ pertenece a la curva, entonces la satisface

$$u^2-2uv+v^2+2u-6=0 \qquad (1)$$

por una parte $m_t=\dfrac{v+7}{u+3}$ por otra $m_t=y'(u,v)$, entonces calculando $y'$

resulta : $2x-2y-2x\,y'+2y\,y'+2=0\Rightarrow y'=\dfrac{y-x-1}{y-x}$ así

$$m_t=\frac{v-u-1}{v-u},\text{ con } v\neq u,\text{ luego } \frac{v+7}{u+3}=\frac{v-u-1}{v-u} \text{ de donde}$$

$$u^2-2uv+v^2-3u+4v+3=0 \qquad (2)$$

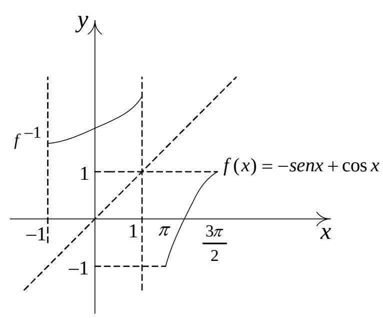
resolviendo $(1)$ y $(2)$ resultan: $u=1\ \vee\ u=-15\Rightarrow v=-1\ \vee\ v=-21$

y las ecuaciones de las tangentes son:

$$t_1:\ y+7=\frac{3}{2}(x+3) \qquad t_2: y+7=\frac{7}{6}(x+3)$$

4. Si $f(x)=|senx|+cosx$, con $x\in\,]\pi,\frac{3\pi}{2}[$ entonces calcule $(f^{-1})'(0)$

**Solución.**




Primera forma

Notemos que cuando en la función inversa

$$x=0\Rightarrow 0=-senx+cosx\Leftrightarrow tg\,x=-1\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{4}\in\,]\pi,\frac{3\pi}{2}[$$

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(\frac{5\pi}{4})}=\frac{1}{-cos\,\frac{5\pi}{4}-sen\frac{5\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Segunda forma

Obteniendo la inversa, $y=-senx+cosx=-senx-sen(\frac{3\pi}{2}-x)\Leftrightarrow$

$$y = -2\,sen(\frac{x+\frac{3\pi}{2}-x}{2})\,cos(\frac{x-\frac{3\pi}{2}+x}{2}) = -2sen\,\frac{3\pi}{4}\,cos(x-\frac{3\pi}{4}) \Leftrightarrow$$

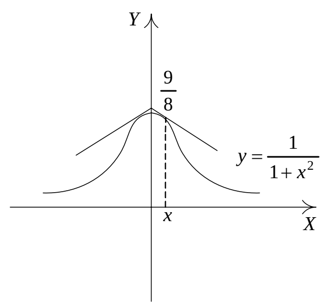
$y = -\sqrt{2}\;cos(x-\frac{3\pi}{4})$ invirtiendo $x = \frac{3\pi}{4} + cos^{-1}(-\frac{y}{\sqrt{2}})$, así resulta

$f^{-1}(x) = \frac{3\pi}{4} + cos^{-1}(-\frac{x}{\sqrt{2}})$, derivando y luego evaluamos en $x = 0$,

$(f^{-1})'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} \cdot -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. Encuentre las tangentes a la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, trazadas desde el punto $(0, \frac{9}{8})$.

**Solución.**




Por una parte : $m_t = y' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

por otra parte $m_t$ es igual a la pendiente entre los puntos $(0, \frac{9}{8})$ y $(x, \dfrac{1}{1+x^2})$

es decir $\quad m_t = \dfrac{\frac{9}{8}-\frac{1}{1+x^2}}{0-x}$,

como $m_t$ debe ser la misma, entonces $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{\frac{9}{8}-\frac{1}{1+x^2}}{0-x}$ de donde se

obtiene $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (3x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

luego las ecuaciones de las dos tangentes son:

$$y - \frac{9}{8} = \mp\frac{3}{8}\sqrt{3}\;x$$

6. Sea $y = (x^2-2)\,e^{-2x}$, determine los intervalos de $x$ donde $y' > 0$ e $y' < 0$

**Solución.**

Calculamos $y'$,

$$y' = 2x\ e^{-2x} + (x^2 - 2)\,e^{-2x}(-2) = 2\ e^{-2x}(-x^2 + x + 2)$$

puntos críticos donde cambia el signo de $y'$, son: $x = -1,\ x = 2$

Así, $\underset{\qquad -1 \qquad\qquad\qquad\qquad 2}{\underline{\quad - \quad \bullet \qquad\quad + \qquad\quad \bullet \quad - \quad}}$ $\leftarrow$ signos de $f'$, por tanto

$y' > 0,\ \forall x /\ \ -1 < x < 2$

$y' < 0,\ \forall x /\ \ x < -1\ \vee\ x > 2$

7. Una partícula $P$ se mueve a lo largo de la gráfica de $y^2 = x^2 - 4,\ x \geq 2,$ de modo que la abscisa del punto $P$ esta aumentando a razón de 5 unidades por seg. ¿Que tan rápido está variando la ordenada cuando $x = 3$?.¿ Aumenta o disminuye?

**Solución.**

Note que : $x = x(t)$ e $y = y(t)$ entonces derivando $y^2 = x^2 - 4$ con respecto a $t$ se tiene $2y\,\dfrac{dy}{dt} = 2x\,\dfrac{dx}{dt} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{y}\,\dfrac{dx}{dt}$ ahora para $x = 3\ \Rightarrow y = \pm\sqrt{5}$

por tanto $\dfrac{dy}{dt} = \pm\dfrac{3}{\sqrt{5}} \cdot 5 = \pm 6.70$ unidades por seg.

Observe que la ordenada crece si la partícula se ecuentra en la rama de la curva donde la ordenada es positiva y decrece en el caso en que la ordenada es negativa.

8. Una partícula de masa $m$ se mueve a lo largo del eje $x$ de modo que su posición $x$ y velocidad $v = \dfrac{dx}{dt}$ satisfacen

$$m(v^2 - v_0^2) = k(x_0 - x^2)$$

donde $v_0, x_0$ y $k$ son constantes. Demuestre que

$$m\frac{dv}{dt} = -kx,$$

siempre que $v \neq 0$

**Demostración.**

Note que : $x = x(t)$ e $v = v(t)$ entonces, derivando $m(v^2 - v_0^2) = k(x_0 - x^2)$ con respecto a $t$, se tiene $m\,2v\,\dfrac{dv}{dt} = k(-2x\,\dfrac{dx}{dt}) \Leftrightarrow mv\dfrac{dv}{dt} = -kxv$ de donde

$$m\frac{dv}{dt} = -kx.$$

9. Encuentre la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ definida implícitamente por la ecuación

$$x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x + 7y - 3 = 0$$

en el punto $y = 0$ y de abscisa positiva.

**Solución.**

Coordenadas del punto, si $y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 > 0.$

Derivando con respecto a $x$,

$$2x - 2y - 2x\,y' + 6y\,y' + 2 + 7\,y' = 0 \;\Rightarrow y' = \frac{2y - 2x - 2}{6y - 2x + 7}$$

luego $m_t = \dfrac{-2-2}{-2+7} = -\dfrac{4}{5}$

así la ecuación de la tangente resulta $y = -\frac{4}{5}(x - 1)$

10. Calcule el punto de intersección de las tangentes trazadas a la curva

$$x^3 - y^2 + 6xy - y + 2 = 0$$

en los puntos $P_i, i = 1, 2$ y cuya abscisa sea $x = 0$.

**Solución.**

Puntos de tangencia, si $x = 0 \Rightarrow -y^2 - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \;\vee\; y = -2$

Dos son los puntos de tangencia $P_1(0, 1)$ y $P_2(0, -2)$.

Por otra parte derivando impícitamente para obtener la pendiente de estas tangentes, se tiene:

$$3x^2 - 2y\,y' + 6y + 6xy' - y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{3x^2 + 6y}{1 + 2y - 6x}$$

Ecuación de la tangente en $P_1(0, 1)$ es, $y - 1 = 2x$

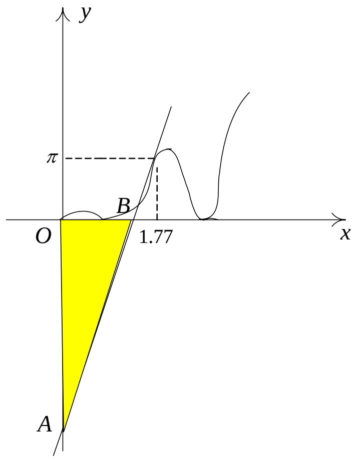
Ecuación de la tangente en $P_2(0, 1)$ es, $y + 2 = 4x$

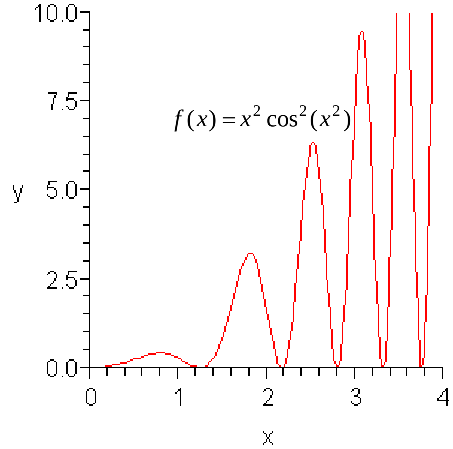
Intersecando estas tangentes, resulta $y + 2 = 2(y - 1) \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

luego el punto de intersección de las tangentes es $(\dfrac{3}{2}, 4)$.

11. Calcule el área del triángulo formado por la tangente a la curva $y = x^2cos^2(x^2)$ en el punto $x = \sqrt{\pi}$, y los ejes coordenados.

**Solución.**




Note que si, $x = \sqrt{\pi} \approx 1.77 \ \Rightarrow y = \pi$ ,

La ecuación de la tangente en $P_0(\sqrt{\pi}, \pi)$ es: $y - \pi = m_t(x - \sqrt{\pi})$, luego

$y' = 2x\,cos^2(x^2) + x^2 \cdot 2\,cos(x^2) \cdot sen(x^2) \cdot 2x \Rightarrow m_t = y'(\sqrt{\pi}\,) = 2\sqrt{\pi}$

de donde $m_t = 2\sqrt{\pi}$ entonces $y - \pi = 2\sqrt{\pi}(x - \sqrt{\pi})$

Intersecando esta ecuación con el eje $Y$, $x = 0 \Rightarrow y = -\pi \Rightarrow A(0, -\pi)$

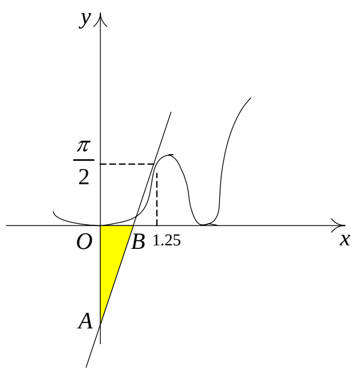
y con el eje $X$, $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \Rightarrow B(\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, 0)$

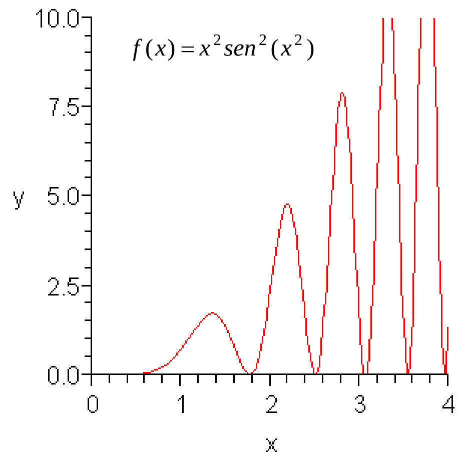
Por tanto,

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|-\pi||\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,| = \frac{1}{4}\pi\sqrt{\pi}$$

12. Calcule el área del triángulo formado por la tangente a la curva $y = x^2 sen^2(x^2)$ en el punto $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, y los ejes coordenados.

**Solución.**




Note que si, $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.25 \;\Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$ ,

La ecuación de la tangente en $P_0(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ es: $y - \frac{\pi}{2} = m_t(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}})$, luego

$y' = 2x\, sen^2(x^2) + x^2 \cdot 2\, sen(x^2) \cdot (-cos(x^2))\, 2x \Rightarrow m_t = y'(\sqrt{\frac{\pi}{2}})$

de donde $m_t = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ entonces $y - \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}})$

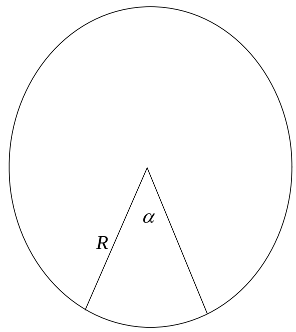
Intersecando esta ecuación con el eje $Y$, $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow A(0, -\frac{\pi}{2})$

y con el eje $X$, $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow B(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0)$

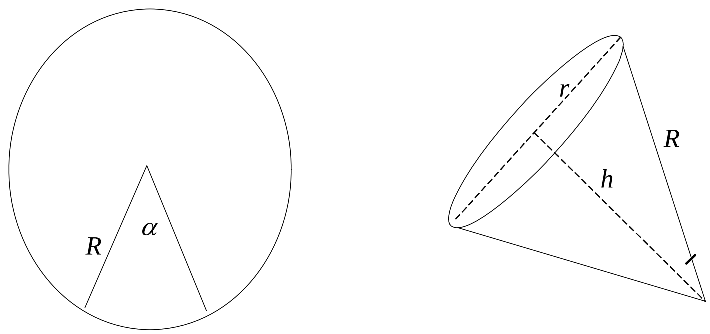
Por tanto,

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|-\frac{\pi}{2}\right|\left|\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right| = \frac{1}{8}\,\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

13. De una lámina circular de radio $R$ dado se quiere construir un embudo de la mayor capacidad posible, cortando una sección circular de ángulo $\alpha$ como se indica en la figura. Determine el valor de $\alpha$.




**Solución**




Función a maximizar el volumen del embudo

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ sujeta a la restricción } r^2 + h^2 = R^2, \text{ así}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 - h^2)h \Rightarrow V\,' = \frac{1}{3}\pi(R^2 - 3h^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{3}}R \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}}R,$$

Como $V\,'' = 2\pi h \Rightarrow V''(\frac{1}{\sqrt{3}}R) = -2\pi\frac{1}{\sqrt{3}}R < 0 \Rightarrow$ en $h = \frac{1}{\sqrt{3}}R$ el volumen $V$ es máximo.

Ahora para determinar el ángulo $\alpha$, se tiene que:

$$2\pi R = 2\pi r + \alpha R \text{ y como } r = \sqrt{\frac{2}{3}}R \Rightarrow \alpha = 2\pi(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}) \approx 66.06°$$

14. Encuentre la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ definida implícitamente por la ecuación

$$x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x + 7y - 3 = 0$$

en el punto $y = 0$ y de abscisa positiva.

**Solución.**

Coordenadas del punto, si $y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 > 0$.

Derivando con respecto a $x$,

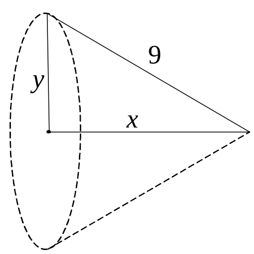
$$2x - 2y - 2x\,y' + 6y\,y' + 2 + 7\,y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2y - 2x - 2}{6y - 2x + 7}$$

luego $m_t = \dfrac{-2-2}{-2+7} = -\dfrac{4}{5}$

así la ecuación de la tangente resulta $y = -\frac{4}{5}(x-1)$

15. Un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 9 m., gira en torno de uno de sus catetos, generando un cono circular recto. Determine las dimensiones del triángulo rectángulo que genera el cono de volumen máximo.

**Solución.**




Función a maximizar el volumen $V$ del cono circular recto, que está dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi\,y^2 x \text{ sujeto a } x^2 + y^2 = 81, \text{ entonces } V = \frac{1}{3}\pi\,(81 - x^2)x$$

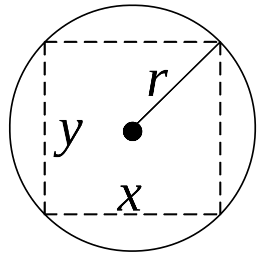
$$V = \frac{1}{3}\pi\,(81x - x^3) \Rightarrow V' = \frac{1}{3}\pi\,(81 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{3} \Rightarrow y = 3\sqrt{6}$$

Naturaleza del punto crítico,

$$V''(x) = \frac{1}{3}\pi(-6x) = -2\pi x, \text{ entonces } V''(3\sqrt{3}) = -6\pi\sqrt{3} < 0$$

luego, en el crítico $V$ toma su mayor valor.

16. Determine las dimensiones $x$ e $y$, del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un círculo de radio $r$ (dado).




**Solución.**

Sea $A$ el área a maximizar, $A = xy$, $x$ e $y$ variables, $0 < x < 2r$, $0 < y < 2r$ por otra parte se debe cumplir que $x^2 + y^2 = (2r)^2 \Rightarrow y = \sqrt{4r^2 - x^2}$, entonces,

$$A = x\sqrt{4r^2 - x^2}, \text{ con } 0 < x < 2r$$

$$A' = \sqrt{4r^2 - x^2} + x\frac{(-x)}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow 4r^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}\,r$$

Note que $0 < \sqrt{2}\,r < 2r$, por tanto el óptimo es absoluto, así:

$$A'' = \frac{-x}{\sqrt{4r^2 - x^2}} + \frac{x^3 - 8r^2x}{4r^2 - x^2} \Rightarrow A''(\sqrt{2}\,r) = -1 - 3\sqrt{2}\,r < 0$$

Por tanto la función $A$ es máx. para $x = \sqrt{2}\,r$, así el rectángulo de mayor área tiene las dimensiones $x = y = \sqrt{2}\,r$.

## 7. La integral definida

1. Por medio de cambios de variable adecuados, demuestre

$$\int_{-\pi}^{\pi} ln(5 + 4\,cos\,x)dx = 2\int_{0}^{\pi/2} ln(25 - 16\,sen^2 x)dx$$

**Demostración.**

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} ln(5 + 4\,cos\,x)dx = 2\int_{0}^{\pi} ln(5 + 4\,cos\,x)dx$, ya que $ln(5 + 4\,cos\,x)$ es par,

sea $x = \dfrac{\pi}{2} - t \Rightarrow x\Big|_0^{\pi} \leftrightarrow t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}$ y $dx = -dt$, así

$$= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} ln[5 + 4\,cos(\frac{\pi}{2} - t)](-dt) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ln[5 + 4\,sen\,t]\,dt$$

$$= 2(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} ln[5 + 4\, sen\, t]\, dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ln[5 + 4\, sen\, t]\, dt)$$

Ahora sea $t = -u \Rightarrow t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \leftrightarrow u\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}$, y $dt = -du$ y en la primera integral resulta

$$= 2(\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ln[5 - 4\, sen\, u]\, (-du) + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ln[5 + 4\, sen\, t]\, dt)$$

$$= 2(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ln[5 - 4\, sen\, u]\, du + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ln[5 + 4\, sen\, t]\, dt)$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/2} ln(25 - 16\, sen^2 x) dx$$

## 8. La integral indefinida

1. Encuentre una primitiva $F(x)$, de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + 2^{x-1}$$

tal que $F(1) = \sqrt{3}$

**Solución.**

De inmediato $F(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{ln2}\, 2^{x-1} + C$,

$F(1) = \sqrt{3} + \frac{1}{ln2} + C = \sqrt{3} \Rightarrow C = -\frac{1}{ln2}$,

luego

$$F(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{ln2}\, 2^{x-1} - \frac{1}{ln2}$$

2. Determine una curva $y = f(x)$ si $y' = \frac{2x-1}{x} + cos\, \pi(3x-1)$, si la curva pasa por el punto $\left(1, \frac{2}{3}\right)$

**Solución.**

$$y' = \frac{2x-1}{x} + cos\, \pi(3x-1) \Rightarrow y = \int [\frac{2x-1}{x} + cos\, \pi(3x-1)]\, dx \Rightarrow$$

$$y = \int [2 - \frac{1}{x} + cos\, \pi(3x-1)]\, dx = 2x - ln\, x + \frac{1}{3\pi} sen\, \pi(3x-1) + C$$

como la curva debe pasar por el punto $\left(1, \frac{2}{3}\right)$, entonces

$$1 = 2 \cdot 1 - ln\, 1 + \tfrac{1}{3\pi}\, sen\, \pi + C \Leftrightarrow C = -1,$$ con lo que

$$y = 2x - ln\, x + \frac{1}{3\pi} sen\, \pi(3x-1) - 1,$$ es la ecuación de la curva pedida.

3. Encuentre la primitiva de $f(x) = e^{-2x} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ que pasa por el origen O$(0,0)$

**Solución.**

Sea $F(x)$ la primitiva buscada, entonces $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} + \dfrac{1}{x+1} + C$

Por otra parte se debe tener, $F(0) = 0$ entonces: $-\dfrac{1}{2} + 1 + C = 0 \Rightarrow C = -\dfrac{1}{2}$

luego, la primitiva de $f$ es $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}$

4. Calcule $y'(0)$, si

$$y = \int_0^{x^2} sen\, x\, sen(t^2 + \frac{\pi}{2})\, dt$$

**Solución.**

Previamente, $y = sen\, x \displaystyle\int_0^{x^2} sen(t^2 + \frac{\pi}{2})\, dt,$ entonces

$$y' = cos\, x \int_0^{x^2} sen(t^2 + \frac{\pi}{2})\, dt + sen\, x\, sen(x^4 + \frac{\pi}{2})\, 2x$$

$$y'(0) = (cos\, 0) \cdot 0 + sen\, 0\, sen(\frac{\pi}{2})\, 2 \cdot 0 = 0$$

5. Calcule $y'(1)$, si

a) $y = \displaystyle\int_1^x e^{t^2} dt$b) $y = \displaystyle\int_1^x x^2 e^{t^2} dt$ c) $\displaystyle\int_1^{x^2} e^{t^2} dt$

**Solución.**

a) $y' = e^{x^2},$ entonces $y'(1) = e$

b) $y = \displaystyle\int_1^x x^2 e^{t^2} dt = x^2 \int_1^x e^{t^2} dt \Rightarrow y' = 2x \int_1^x e^{t^2} dt + x^2 e^{x^2} \Rightarrow y'(1) = e$

c) $y' = e^{x^2} 2x,$ entonces $y'(1) = 2e$

6. Determine $f$ y una constante $c$ tal que

$$\int_c^x f(t)\,dt = cos\,2x\ + 1$$

**Solución.**

Derivando, resulta $f(x) = -2sen\,2x$, luego

$$\int_c^x -2sen\,2t\ dt = cos\,2x\ + 1 \Leftrightarrow cos\,2t\Big|_c^x = cos\,2x\ + 1,$$ de donde

$cos\,2x - cos\,2c = cos\,2x\ + 1 \Leftrightarrow cos\,2c = -1,$ luego una constante $c$ resulta

$c = \dfrac{\pi}{2}$

7. Determine $y'$ e $y''$, si $y = \displaystyle\int_x^{x^3} cos^3 t\,dt + \int_0^{\pi} cos^3 x\,dx$

**Solución.**

Note que $\displaystyle\int_0^{\pi} cos^3 x\,dx$ es una constante, luego

$y' = (cos^3 x^3)3x^2 - cos^3 x$

$y'' = (3\,cos^2 x^3 \cdot sen\,x^3 \cdot 3x^2)3x^2 + (cos^3 x^3)6x - 3cos^2 x \cdot (-senx).$

8. Dada $f(x) = \dfrac{sen\,x}{1 + cos^2 x} + bx,$ determine $b \in \mathbb{R},$ si se sabe que existe una primitiva $F$ de $f$, que satisface: $F(0) = 0$ y $F(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{4}$

**Solución.**

Se debe tener que: $F'(x) = f(x)$ de donde $F(x) = \displaystyle\int [\frac{sen\,x}{1 + cos^2 x} + bx]\,dx$

$$F(x) = -Arctg(cos\,x) + b\frac{x^2}{2} + C,$$ luego

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow -Arctg(cos\,0) + b\frac{0^2}{2} + C = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + C = 0 \Leftrightarrow \underline{C = \frac{\pi}{4}}$$

$$F(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -Arctg(cos\,\frac{\pi}{2}) + b\frac{\pi^2}{4} + C = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$b\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \underline{b = \frac{2}{\pi}}$$

9. Calcule $y'(1)$ si

$$y = \int_1^{x^2} (t - x)\, cos^{\,3} t \;\; dt$$

**Solución.**

$$y = \int_1^{x^2} t\, cos^{\,3} t \;\; dt - x \int_1^{x^2} cos^{\,3} t \;\; dt$$

$$y\,' = x^2 (cos^3 x^2) 2x - \int_1^{x^2} cos^{\,3} t \;\; dt - x\, (cos^3 x^2) 2x$$

$$y\,'(1) = 0$$

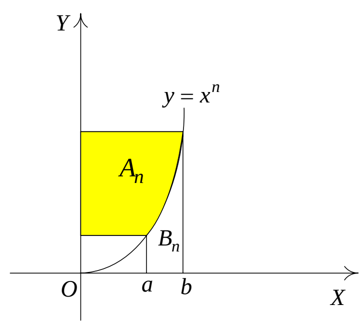
10. La siguiente ecuación es verdadera

$$\int_a^b x^n dx + \int_{a^n}^{b^n} \sqrt[n]{y}\, dy = b^{n+1} - a^{n+1}$$

a) Utilice la figura que se indica para justificar esta ecuación geométricamente.

b) Demuestre este ecuación utilizando el segundo teorema fundamental del cálculo.

c) Demuestre que $A_n = nB_n$




**Solución.**

a)

Note que $B_n = \displaystyle\int_a^b x^n dx$ y que $A_n = \displaystyle\int_{a^n}^{b^n} \sqrt[n]{y}\, dy$, entonces geométricamente $\displaystyle\int_a^b x^n dx + \int_{a^n}^{b^n} \sqrt[n]{y}\, dy$, es la suma de dos rectángulos cuyo valor es:

$$= (b - a) b^n + a(b^n - a^n) = b^{n+1} - ab^n + ab^n - a^{n+1} = b^{n+1} - a^{n+1}$$

b)

$$\int_a^b x^n dx + \int_{a^n}^{b^n} \sqrt[n]{y}\, dy = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b + \left.\frac{y^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\right|_{a^n}^{b^n} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1}) + \frac{n}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1}) \\
&= (b^{n+1}-a^{n+1})(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}) \\
&= b^{n+1}-a^{n+1}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
A_n &= \int_{a^n}^{b^n} \sqrt[n]{y}\, dy = \frac{n}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1}) \\
&= n\{\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})\} = nB_n
\end{aligned}
$$

11. a) En base a las propiedades de la integral definida calcule(no ocupe primitivas)

$$\int_{-1}^{1}(1-\frac{xe^x}{1+e^{2x}})\, dx$$

b) Encuentre

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{x^2-1}\int_{-1}^{x}\frac{1+t}{2+t}\ dt$$

**Solución.**

a)

$$\int_{-1}^{1}(1-\frac{xe^x}{1+e^{2x}})\, dx = \int_{-1}^{1} dx - \int_{-1}^{1}\frac{xe^x}{1+e^{2x}}\ dx = 1[1-(-1)]$$

note que $f(x) = \dfrac{xe^x}{1+e^{2x}}$ es impar pues

$f(-x) = \dfrac{-xe^{-x}}{1+e^{-2x}} = -\dfrac{xe^x}{e^{2x}+1} = -f(x)$, por tanto

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{xe^x}{1+e^{2x}}\ dx = 0$, así:

$$\int_{-1}^{1}(1-\frac{xe^x}{1+e^{2x}})\, dx = 1[1-(-1)] - 0 = 2$$

b)

Por el teorema del valor medio $\exists\xi \in [-1, x]\ /\ f(\xi)(x+1) = \displaystyle\int_{-1}^{x}\frac{1+t}{2+t}\, dt,$

entonces,

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^2-1}\int_{-1}^{x}\frac{1+t}{2+t}\,dt = \lim_{x\to -1}\frac{1}{x^2-1}\ f(\xi)(x+1),\ \ -1\le \xi \le x$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{1}{x-1}\ f(\xi),\ \ -1\le \xi\le x,$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{1}{x-1}\ \frac{1+\xi}{2+\xi},\ \ -1\le \xi\le x,$$

note que cuando, $x\to\ -1 \Rightarrow \xi \to\ -1$ entonces,

$$\lim_{x\to -1}\ \frac{1}{x^2-1}\int_{-1}^{x}\frac{1+t}{2+t}\ dt = 0$$

12. Sea $x = F(y)$ tal que

$$x = \int_1^y [y\, sen^2(\ \frac{\pi}{2}t^{-1})]\, dt,\ \ y>0$$

Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ en $x=0.$

**Solución.**

Note que, $x = y\int_1^y sen^2(\ \frac{\pi}{2}t^{-1})dt$ y que $sen^2(\ \frac{\pi}{2}t^{-1})>0,$ entonces si

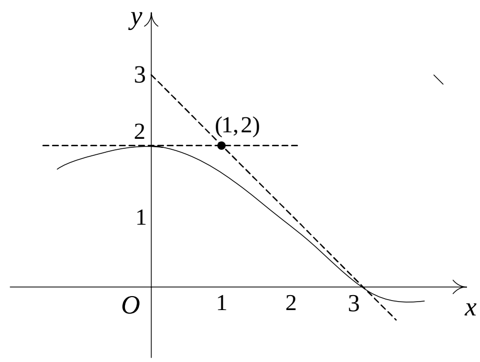
$x=0 \Rightarrow 0 = y\int_1^y sen^2(\ \frac{\pi}{2}t^{-1})dt,$ pero $y>0 \Rightarrow y=1.$

Así, derivando con respecto a $y,$ se tiene:

$$\frac{dx}{dy} = 1\cdot\int_1^y sen^2(\ \frac{\pi}{2}t^{-1})dt\quad + y\cdot sen^2(\ \frac{\pi}{2}y^{-1}),\ \text{entonces}$$

$$(\frac{dy}{dx})_{x=0,y=1} = \frac{1}{\displaystyle\int_1^1 sen^2(\ \frac{\pi}{2}t^{-1})dt + 1\cdot sen^2(\ \frac{\pi}{2})} = 1$$

13. La figura muestra la gráfica de una función $f$ que tiene tercera derivada continua Las rectas segmentadas son tangentes a la gráfica de $y=f(x)$ en los puntos $(0,2)$ y $(3,0)$. En base a la figura, diga, si es posible, si las integrales siguientes son positivas, negativas o cero.




a) $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^3 f\,'(x)dx$

c) $\displaystyle\int_0^3 f''(x)dx$ d) $\displaystyle\int_0^3 f\,'''(x)dx$

**Solución.**

a) $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx > 0,$ pues $f(x) > 0,\ \forall x:\ 0 < x < 3$

b) $\displaystyle\int_0^3 f\,'(x)dx = f(x)\Big|_0^3 = f(3) - f(0) = 0 - 2 < 0$

c) $\displaystyle\int_0^3 f''(x)dx = f\,'(x)\Big|_0^3 = f\,'(3) - f\,'(0) = \frac{2-0}{1-3} - 0 = \ -1 < 0$

d) $\displaystyle\int_0^3 f\,'''(x)dx = f''(x)\Big|_0^3 = f''(3) - f\,'(0) = 0 - (\ < 0) = \ > 0$

14. a) En base a las propiedades de la integral definida calcule(no ocupe primitivas)

$$\int_{-2}^{2} (3-x)\sqrt{4-x^2})\,dx$$

b) Encuentre

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} \int_1^x \frac{1+t}{2+t}\,dt$$

**Solución.**

a)

$$\int_{-2}^{2} (3-x)\sqrt{4-x^2})\,dx = 3\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx - \int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx,$$

note que $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ es impar, entonces $\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx = 0$, y

$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx =$ a la mitad d área de una circunferencia de radio $2$,

entonces $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(2)^2 = 2\pi$, por tanto

$\int_{-2}^{2} (3-x)\sqrt{4-x^2})\,dx = 3(2\pi) - 0 = 6\pi.$

b)

Por el teorema del valor medio $\exists \xi \in [1, x]\ /\ f(\xi)(x-1) = \int_{1}^{x} \frac{1+t}{2+t}\,dt,$

entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} \int_{1}^{x} \frac{1+t}{2+t}\,dt &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}\ f(\xi)(x-1),\ 1 \le \xi \le x \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}\ f(\xi),\ \ 1 \le \xi \le x, \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}\ \frac{1+\xi}{2+\xi},\ \ 1 \le \xi \le x,
\end{aligned}$$

note que cuando, $x \longrightarrow 1 \Rightarrow \xi \longrightarrow 1$ entonces

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} \int_{1}^{x} \frac{1+t}{2+t}\,dt = \frac{1}{3}$$

15. Sea $x = F(y)$ tal que

$$x = \int_{1}^{y} [y + sen^2(\,\pi t^{-1})]\,dt,\ \ y > 0$$

Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ en $x = 0$

**Solución.**

$x = \int_{1}^{y} [y + sen^2(\,\pi t^{-1})]\,dt = y\int_{1}^{y} dt + \int_{1}^{y} sen^2(\,\pi t^{-1})\,dt$

$x = y(y-1) + \int_{1}^{y} sen^2(\,\pi t^{-1})\,dt$

Ahora, derivando respeto a $y$, y considerando $x = F(y)$, se tiene:

$$\frac{dx}{dy} = 2y - 1 + sen^2(\,\pi y^{-1})$$

Si $x = 0$ entonces $0 = \int_1^y [y + sen^2(\pi t^{-1})]\, dt,$ y como $y + sen^2(\pi t^{-1}) > 0$ se tiene que $y = 1,$ luego:

$$(\frac{dy}{dx})_{x=0} = \frac{1}{2 \cdot 1 - 1 + sen^2(\pi \cdot 1^{-1})} = 1$$

## 9. Métodos de integración

1. Calcule

a) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

b) $$\int sen(lnx)\, dx$$

**Solución.**

a) $x = 2\, tg\, t \Rightarrow dx = 2\, sec^2 t\, dt,$ entonces

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\, sec^2 t\, dt}{4tg^2 t\sqrt{4+4tg^2 t}} = \frac{1}{4}\int \frac{sec\, t\, dt}{tg^2 t} = \frac{1}{4}\int \frac{cos\, t\, dt}{sen^2 t}$$

$$= -\frac{1}{4} sen^{-1} t + C = -\frac{1}{4x}\sqrt{4+x^2} + C$$

b) Por partes: $u = sen(lnx) \Rightarrow du = cos(lnx)\frac{1}{x}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

entonces, resulta

$$I = \int sen(lnx)\, dx = x\, sen(lnx) - \int cos(lnx)\, dx$$

$$I = x\, sen(lnx) - J \qquad (1)$$

Analogamente, $u = cos(lnx) \Rightarrow du = -sen(lnx)\frac{1}{x}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$J = x\, cos(lnx) + \int sen(lnx)\, dx$$

$$J = x\,cos(lnx) + I \qquad\qquad (2)$$

Resolviendo $(1)$ y $(2)$ para $I$, resulta

$$I = \frac{x}{2}[sen(lnx) + cos(lnx)] + C$$

2. Calcular

a) $\displaystyle\int x\,sen\,(2x)\,dx$

b) $\displaystyle\int [(3x^2+2)^9 + 6]\,x\,dx$

**Solución.**

a) $\displaystyle\int x\,sen\,(2x)\,dx$, por partes: $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = sen\,(2x)\,dx \Rightarrow v = -\dfrac{1}{2}cos(2x), \end{cases}$

$$\int x\,sen\,(2x)\,dx = -\frac{1}{2}x\,cos(2x) + \frac{1}{2}\int cos(2x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}x\,cos(2x) + \frac{1}{4}sen\,(2x) + C$$

b)

$$\int [(3x^2+2)^9 + 6]\,x\,dx = \frac{1}{6}\int (3x^2+2)^9\,6x\;dx + \int 6x\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\,\frac{(3x^2+2)^{10}}{10} + 3x^2 + C$$
$$= \frac{1}{60}(3x^2+2)^{10} + 3x^2 + C$$

3. Calcule las siguientes integrales:

(i) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int sen\,x\,ln(tg\,x)\,dx$

**Solución.**

(i) Sea $x = sen\,t \Leftrightarrow dx = cos\,t\,dt$, así

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{sen^2 t}{\sqrt{1-sen^2 t}}\,cos\,t\,dt = \int sen^2 t\,dt$$
$$= \int \frac{1-cos\,2t}{2}dt = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}sen\,2t) + C$$

$$= \frac{1}{2}(t - sent\, cos\, t) + C = \frac{1}{2}(arcsen\, t - x\sqrt{1-x^2}) + C$$

(ii) Por partes, sea

$$u = ln(tg\, x) \Leftrightarrow du = \frac{1}{sen\, x\, cos\, x} dx$$
$$dv = sen\, x\, dx \Leftrightarrow v = -cos\, x,$$

$$\int sen\, x\, ln(tg\, x)\, dx = -cos\, x\, ln(tg\, x) + \int cosec\, x\, dx$$
$$= -cos\, x\, ln(tg\, x) - ln(cosec\, x + cotg\, x) + C$$

4. Calcular

a) $\int x\, sen\,(2x)\, dx$

b) $\int [(3x^2+2)^9 + 6]\, x\, dx$

**Solución.**

a) $\int x\, sen\,(2x)\, dx$, por partes: $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = sen\,(2x)\, dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}cos(2x), \end{cases}$

$$\int x\, sen\,(2x)\, dx = -\frac{1}{2}x\, cos(2x) + \frac{1}{2}\int cos(2x)\, dx$$
$$= -\frac{1}{2}x\, cos(2x) + \frac{1}{4}sen\,(2x) + C$$

b)

$$\int [(3x^2+2)^9 + 6]\, x\, dx = \frac{1}{6}\int (3x^2+2)^9\, 6x\; dx + \int 6x\, dx$$
$$= \frac{1}{6}\,\frac{(3x^2+2)^{10}}{10} + 3x^2 + C$$
$$= \frac{1}{60}(3x^2+2)^{10} + 3x^2 + C$$

5. Calcule

a) $\int \frac{5}{6 + 4\, sec\, x}\, dx$

b) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

**Solución.**

a) Sea $t = tg\,\dfrac{x}{2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $cos\,x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{5}{6+4\,sec\,x}\,dx = \int \frac{5\,cos\,x}{6\,cos\,x+4}dx = \int \frac{5(1-t^2)}{6(1-t^2)+4(1+t^2)}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= 5\int \frac{t^2-1}{(t^2-5)(1+t^2)}dt$$

$$= 5\int \frac{t^2-1}{(t-\sqrt{5})(t+\sqrt{5})(1+t^2)}dt,$$

$$\frac{t^2-1}{(t-\sqrt{5})(t+\sqrt{5})(1+t^2)} = \frac{A}{t-\sqrt{5}} + \frac{B}{t+\sqrt{5}} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$

$$t^2-1 = A(t+\sqrt{5})(1+t^2) + B(t-\sqrt{5})(1+t^2) + (Ct+D)(t^2-5)$$

de donde resolviendo resultan: $A = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}$ , $B = -\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$, $C = 0$, $D = \dfrac{1}{3}$

Así,

$$\int \frac{5}{6+4\,sec\,x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3\sqrt{5}}}{t-\sqrt{5}}\,dt + \int \frac{\frac{1}{3\sqrt{5}}}{t+\sqrt{5}}\,dt + \int \frac{\frac{1}{3}}{1+t^2}dt$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{5}}\,ln(t-\sqrt{5}) + \frac{1}{3\sqrt{5}}\,ln(t+\sqrt{5}) + \frac{1}{3}Arctg\,t + k$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{5}}\,ln(tg\,\frac{x}{2}-\sqrt{5}) + \frac{1}{3\sqrt{5}}\,ln(tg\,\frac{x}{2}+\sqrt{5}) + \frac{1}{6}x + k$$

b) Sea $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^t 2tdt = 2\int t\,e^t dt$, ahora por partes:

$u = t \Rightarrow du = dt$ y $dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$, así:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2(\,t\,e^t - \int e^t\,dt) = 2(te^t - e^t) + c$$

$$= 2\,e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + c$$

6. Calcular

a) $\displaystyle\int sen^3 x\,dx$

b) $\displaystyle\int [(ax^2+bx)^3 - sen\,x](ax+\frac{b}{2})\,dx$

**Solución.**

a) $\displaystyle\int sen^3x\,dx = \int sen^2x\;senx\,dx = \int (1-cos^2x)\,senx\,dx$

$$= \int\; senx\,dx - \int cos^2x\,senx\,dx$$

$$= \,-\,cosx + \frac{1}{3}cos^3x + C$$

b) $\displaystyle\int [(ax^2+bx)^3 - sen\,x](ax+\frac{b}{2})\,dx =$

$$= \int (ax^2+bx)^3(ax+\frac{b}{2})\,dx - a\int xsenx\,dx + \frac{b}{2}\int dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (ax^2+bx)^3(2ax+b)\,dx - a\int xsenx\,dx + \frac{b}{2}\int dx$$

la primera y tercera son inmediatas, la segunda es por partes, así

Sea $\qquad u = x \Leftrightarrow du = dx$

$dv = senx\,dx \Leftrightarrow v = \,-\,cosx$, luego

$\displaystyle\int xsenx\,dx = \,-\,xcosx + \int cosx\,dx = \,-\,xcosx + senx$, entonces

$\displaystyle\int [(ax^2+bx)^3 - sen\,x](ax+\frac{b}{2})\,dx =$

$$= \frac{1}{8}(ax^2+bx)^4 - a(\,-\,xcosx + senx) + \frac{b}{2}x\; + C$$

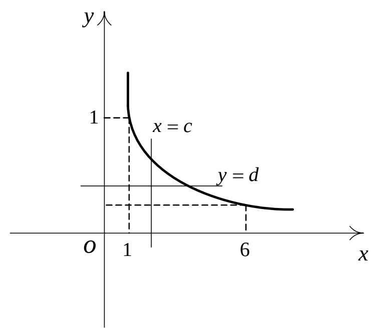
## 10. Aplicaciones de la integral

1. Considere la curva $y = \dfrac{1}{x^2}$ para $1 \le x \le 6$

   a) Calcule el área bajo la curva.

   b) Determine $c$ de modo que la recta $x = c$ bisecte el área de la parte a).

   c) Determine $d$ de modo que la recta $y = d$ bisecte el área de la parte a).




**Solución.**

a) Área $= \displaystyle\int_1^6 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^6 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

b) Se debe tener

$$\int_1^c \frac{1}{x^2}dx = \frac{5}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{x}\Big|_1^c = \frac{5}{12},\ 1 < c < 6$$

$$1 - \frac{1}{c} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow c = \frac{12}{7}$$

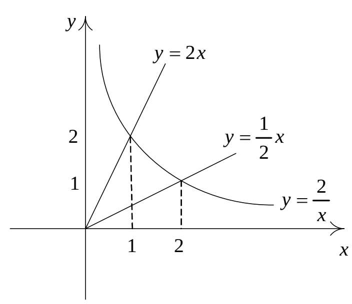
c) Analogamente,

$$\int_d^1 \frac{1}{\sqrt{y}}dy = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 2\sqrt{y}\Big|_d^1 = \frac{5}{12} = 2 - 2\sqrt{d} \Rightarrow d = 0.62$$

2. Calcule el área encerrada por las curvas

$$y = \frac{1}{2}x,\ y = 2x \ \text{ e } \ y = \frac{2}{x}$$

**Solución.**




$$\text{Área} = \int_0^1 (2x - \frac{1}{2}x)dx + \int_1^2 (\frac{2}{x} - \frac{1}{2}x)dx$$

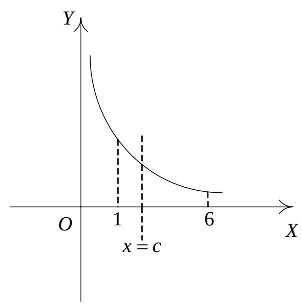
$$= \frac{3}{4}x^2\Big|_0^1 + (2\,ln\,x - \frac{1}{4}x^2)\Big|_1^2 = \frac{3}{4} + (2\,ln\,2 - 1) - (\,-\frac{1}{4}) = 2\,ln\,2$$

3. Sea la región plana comprendida entre la curva $y = \dfrac{1}{x^2}$ , el eje $X$, para $1 \leq x \leq 6$.

   a) Determine $c$ de modo que la recta $x = c$ biseque el área de la región.

   b) Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al girar en torno al eje $Y$, la región mencionada.

   **Solución.**

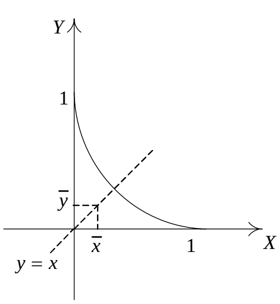



   a) Área $= \displaystyle\int_1^6 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^6 = \frac{5}{6}$, entonces $\displaystyle\int_1^c \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}(\frac{5}{6}) \Rightarrow$
   $-\dfrac{1}{x}\Big|_1^c = \dfrac{5}{12} \Leftrightarrow c = \dfrac{12}{7}$

   b) $V_y = 2\pi \displaystyle\int_1^6 x(\frac{1}{x^2})\,dx = 2\pi\,ln\,x\,\Big|_1^6 = 2\pi\,ln6$

4. Calcular el centroide del alambre que está definido por la curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, en el primer cuadrante.

   **Solución.**




   Como $y = x$ es un eje de simetría, entonces $\overline{y} = \overline{x}$

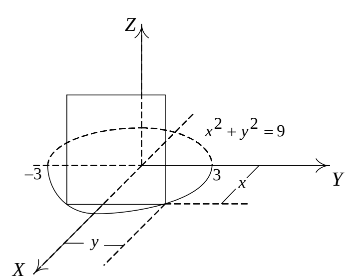
$$\overline{y} = \overline{x} = \frac{\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx} = \frac{\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+(\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}})^2}\;dx}{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+(\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}})^2}\,dx}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}dx}{\displaystyle\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx} = \frac{\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_0^1}{\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1} = \frac{2}{5}$$

5. Un sólido con base semicircular acotada por un semicírculo del círculo $x^2+y^2=9$ y $z=0$, tiene secciones transversales perpendiculares al eje $X$ que son cuadrados.

   Encuentre el volumen de este sólido.

   **Solución.**




$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 (2y)^2 dx = 4\int_0^3 (9-x^2)dx$$

$$= 4\,(9x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^3 = 72$$

6. Un objeto parte del origen y se mueve hacia arriba por el eje $Y$. Al mismo tiempo, un perseguidor parte del punto $(1,0)$ y se mueve siempre en dirección al objeto. Si la velocidad del perseguidor es el doble que la del objeto, la ecuación de la trayectoria es

$$y = \tfrac{1}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} - 3\,x^{\frac{1}{2}} + 2\right)$$

   ¿Qué distancia ha recorrido el objeto en el momento de ser capturado?. Probar que el perseguidor recorre el doble.

   **Solución.**

Sean: $d_2$ la distancia recorrida por el objeto

$d_1$ la distancia que recorre el perseguidor

$d_2$ se obtiene cuando $x = 0 \Rightarrow d_2 = \dfrac{2}{3}$

$$d_1 = \int_1^0 \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \quad y' = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow$$

$$1 + y'^2 = [\frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)]^2 \Rightarrow \sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow$$

$$d_1 = \int_1^0 \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{4}{3}, \text{ por tanto } d_1 = 2\, d_2.$$

7. Determinar el centroide de la sección plana que se indica

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

**Solución.**

Por simetría $x_g = 0$, para calcular $y_g$ separamos la sección en dos partes: la de la astroide $0 \leq y \leq 1$, y la sección rectangular $-1 \leq y \leq 0$, así

$$y_g = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} \text{ en que de inmediato } y_2 = -\frac{1}{2} \text{ y } A_2 = 2$$

$$\text{para } y_1 = \frac{\displaystyle\int_0^1 y\,(x_2 - x_1)\, dy}{2\displaystyle\int_0^1 y\, dx} \text{ y } A_1 = 2\int_0^1 y\, dx \text{ siendo:}$$

$$x_2 = \left(1 - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},\ x_1 = -\left(1 - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}};\ y = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_0^1 y\,[\left(1 - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - \{-\left(1 - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\}]\, dy = 2\int_0^1 y\left(1 - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dy; \text{ sea } \quad t = y^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{entonces } = 2\int_0^1 \frac{3}{2}\, t^2 (1 - t)^{\frac{3}{2}} dt = 3\,\beta(3, \frac{5}{2}) = 3\,\frac{\gamma(3)\gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\gamma\left(\frac{11}{2}\right)} \text{ analogamente}$$

$$2\int_0^1 y\, dx = 2\int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx; \text{ sea } t = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$= 2\int_0^1 \frac{3}{2}\, t^{\frac{1}{2}} (1 - t)^{\frac{3}{2}} dt = 3\,\beta(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) = 3\,\frac{\gamma\left(\frac{3}{2}\right)\gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\gamma(4)} = \frac{3\pi}{16}, \text{ por lo tanto}$$

$$y_1 = \frac{\gamma(3)\,\gamma(4)}{\gamma\left(\frac{3}{2}\right)\gamma\left(\frac{11}{2}\right)} = \frac{256}{315\,\pi} \approx 0.259, \text{ finalmente}$$

$$y_g = \frac{0.259 \cdot \frac{3\pi}{16} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2}{\frac{3\pi}{16} + 2}$$

8. Una tangente al gráfico de una función continua $y = f(x)$ en el punto $x = a$ forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje de las abscisas y un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ en el punto $x = b$.

Calcule:

a) $\displaystyle\int_a^b f''(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_a^b x\,f''(x)\,dx$, si $f(x) = Arctg\,(\frac{x}{a})$

**Solución.**

a) $\displaystyle\int_a^b f''(x)\,dx = f'(x)\,\Big|_a^b = f'(b) - f'(a) = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{3} = 1 - \sqrt{3}$

b) $\displaystyle\int_a^b x\,f''(x)\,dx = xf'(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,dx = bf'(b) - af'(a) - f(x)\Big|_a^b$

$$= b - a\sqrt{3} - f(b) + f(a)$$

Como: $f'(a) = \sqrt{3}$ y $f'(b) = 1$ con $f'(x) = \dfrac{a}{a^2 + x^2}$ resulta

$a = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ y $b = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-1}{3}}$ por tanto

$$\int_a^b x\,f''(x)\,dx = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-1}{3}} - \frac{1}{2} \pm Artg\sqrt{2\sqrt{3}-1} + \frac{\pi}{4}$$

9. a) Demuestre que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} log\,sen(t + \frac{\pi}{4})\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} log(cost)\,dt$

b) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{log(1+x)}{1+x^2}dx$ haga la sustitución $x = tgt$

**Solución.**

a) Sea $t = \frac{\pi}{4} - u \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} + u)$ y $dt = -du,\ t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \leftrightarrow u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^0$

luego $\int_0^{\frac{\pi}{4}} log\, cost\, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 log\, cos[\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} + u)](-du) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} log\, sen(t + \frac{\pi}{4})\, dt$

b) $\int_0^1 \frac{log(1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{log(1+tgt)}{1+tg^2 t} sec^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} log(1+tgt)\, dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} log(cost + sent)\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} log\, cost\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} log\, \sqrt{2}\ sen(t + \frac{\pi}{4})\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} log\, cost\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} log \sqrt{2}\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} log\, sen(t + \frac{\pi}{4})\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} log\, cost\, dt$$

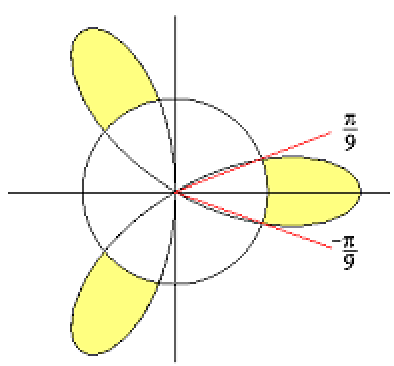
$$= \frac{\pi}{4} log\, \sqrt{2}$$

10. a) Hallar el área de las regiones limitadas por la curva $\rho = 2a\, cos 3\theta$ y los arcos del círculo $\rho = a$ situados fuera del círculo.

b) De un cilindro circular recto de radio $a$ se corta una cuña por un plano que pasa por el diámetro de la base del cilindro y esta inclinado un ángulo $\alpha$ respecto de la base. Hallar el volumen de la cuña.

**Solución.**

a)




Puntos de intersección de las dos curvas

$$\begin{cases} \rho = 2a\,cos3\theta \\ \rho = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow cos\,3\theta\ = \frac{1}{2}\ \Rightarrow 3\theta = 2k\pi\ \pm \frac{\pi}{3}$$

suficiente $k = 0,\ \theta\ =\ \pm\,\frac{\pi}{9}$

Asi,

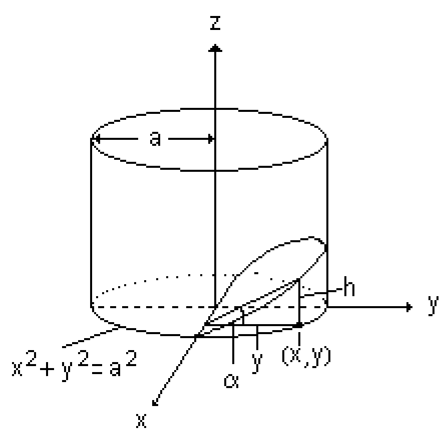
$$A\ = 3\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}[4a^2cos^2 3\theta\ -\ a^2]\,d\theta$$

$$A = \frac{3}{2}a^2(4\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\frac{1+cos6\theta}{2}d\theta\ -\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}d\theta\,)$$

$$A = \frac{3}{2}a^2(\frac{2\pi}{9}\ +\ \frac{2}{3}sen\frac{2\pi}{3}\,)$$

$$A = a^2(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2})$$

b)




$$V\ = 2\int_0^a A(x)\,dx$$

$$A(x) = \frac{1}{2}yh, \quad h = y\,tg\,\alpha$$

$$V\ = 2\int_0^a \frac{1}{2}y\,y\,tg\,\alpha\,dx,\ \text{ pero }\ y^2 = a^2 - x^2$$

$$V = tg\,\alpha \int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{2}{3}a^3 tg\,\alpha$$

11. Calcular el área entre la curva $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ y el eje $X$, entre los puntos $x = -2$ y $x = 3$.

**Solución.**

$$\text{Área} = \int_{-2}^{3} \left| \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} \right| dx = \int_{-2}^{3} \frac{|x^2 - 4|}{x^2 + 1}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} -\frac{(x^2 - 4)}{x^2 + 1}\, dx + \int_{2}^{3} \frac{(x^2 - 4)}{x^2 + 1}\, dx,$$

Calculamos

$$\int \frac{(x^2 - 4)}{x^2 + 1}\, dx = \int [1 + \frac{-5}{x^2 + 1}]\, dx = x - 5Arctg(x) + C$$

$$\int_{-2}^{2} -\frac{(x^2 - 4)}{x^2 + 1}\, dx = -[x - 5Arctg(x)]\Big|_{-2}^{2} = 10Arctg\,2 - 4 \approx 7.071$$

$$\int_{2}^{3} \frac{(x^2 - 4)}{x^2 + 1}\, dx = [x - 5Arctg(x)]\Big|_{2}^{3} = 1 - 5(Arctg\,3 - Arctg\,2) \approx 0.2905$$

luego,

$$\text{Área} \approx 7.071 + 0.2905 = 7.366$$

12. Calcule la longitud de la astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

**Solución.**

$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = -(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow (y')^2 = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})x^{-\frac{2}{3}},$ así

$$l = 4\int_0^a \sqrt{1 + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})x^{-\frac{2}{3}}}\, dx \qquad = 4a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} dx = 4a^{\frac{1}{3}} \frac{3}{2}\, a^{\frac{2}{3}} = 6a.$$

## 11. Integrales impropias

1. Calcular

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2(\sqrt{x}+1)}dx$$

**Solución.**

$x = t^2 \Leftrightarrow dx = 2tdt;\ x\Big|_1^{\infty} \leftrightarrow\ t\Big|_1^{\infty}$, luego

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2(\sqrt{x}+1)}dx = 2\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2(t+1)}dt = 2\int_1^{\infty} [\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}]dt$$

$$= 2\lim_{b\to\infty}[\ -\frac{1}{t} + log\frac{t+1}{t}]\Big|_1^b$$

$$= 2\lim_{b\to\infty}\{[-\frac{1}{b} + log\frac{b+1}{b}] - [-1 + log\,2]\}$$

$$= 2\,[1 - log2]$$

2. Averiguar la convergencia de

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x+1)}}dx$ b) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\ lnx}dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{e^{3x-1}}\,dx$

**Solución.**

a) Comparando con $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2/3}}dx$ que diverge $(p = \dfrac{2}{3} < 1)$ y

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x(x+1)}}}{\frac{1}{x^{2/3}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} = 1,$ por tanto la integral diverge.

b) Sea $x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$ y $ln\,x = 2\,ln\,t,\ x\Big|_2^{\infty} \leftrightarrow t\Big|_{\sqrt{2}}^{\infty}$, luego

$\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\ lnx}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{ln\,t}dt,$ por otra parte

$\displaystyle t > lnt \Leftrightarrow \frac{1}{ln\,t} > \frac{1}{t} \Rightarrow \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{ln\,t}dt > \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{t}dt,$ y como

$\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge, $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{ln\,t}dt$ también diverge.

c)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{e^{3x-1}}\,dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-3x} e\,dx - \int_0^{\infty} e^{-3x} e\ dx,$$

Sea $t = 3x \Leftrightarrow dt = 3\,dx,\ x\Big|_0^{\infty} \leftrightarrow t\Big|_0^{\infty},$ así resulta

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{e^{3x-1}}\,dx = \frac{e}{27}\int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt - \frac{e}{3}\int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{e}{27}\gamma(3) - \frac{e}{3}\gamma(1)$$

$$= \frac{2e}{27} - \frac{e}{3} \Rightarrow \text{la integral converge.}$$

3. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{6x^2+x+1}{x(x^2+1)(x+2)}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

**Solución.**

a)

$$\int_1^{\infty} \frac{6x^2+x+1}{x(x^2+1)(x+2)}\,dx,\ \text{comparando con } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx,\ \text{que converge}$$

y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(6x^2+x+1)\,x^2}{x(x^2+1)(x+2)} = 1 \neq 0 \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{6x^2+x+1}{x(x^2+1)(x+2)}\,dx$

también converge.

b)

$$\int_0^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \text{comparando con } \int_0^{1} \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}dx\,,\ p = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$$

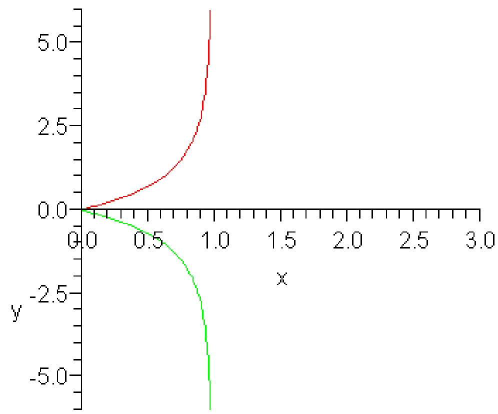
que converge, y

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \Rightarrow \text{conv.}$$

4. Hallar el área entre las curvas

$$y^2 = \frac{x^2}{1-x^2},\ x = 0,\ \ x = 1$$

**Solución.**




Como $y^2 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{1-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$, entonces el área pedida resulta

$$A = 2\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{1-\epsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(-\sqrt{1-x^2}\,\Big|_0^{1-\epsilon}\right)$$

$$A = -2\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\sqrt{1-(1-\epsilon)^2}-1\right) = 2$$

5. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\theta}(\dfrac{x}{\theta})^{\beta-1}e^{-(\frac{x}{\theta})^{\beta}} & \text{si } \; x > 0 \\ 0 & \text{si } \; x \leq 0 \end{cases}$$

con $\theta \neq 0$ y $\beta > 1$. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

**Demostración.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\beta}{\theta}(\frac{x}{\theta})^{\beta-1}e^{-(\frac{x}{\theta})^{\beta}}dx$$

Sea $t = (\dfrac{x}{\theta})^{\beta} \Leftrightarrow dt = \dfrac{\beta}{\theta}(\dfrac{x}{\theta})^{\beta-1}dx,\; x\Big|_0^{\infty} \leftrightarrow t\Big|_0^{\infty}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}\; -e^{-t}\Big|_0^{b} = \lim_{b\to\infty}(e^{-0}-e^{-b}) = 1$$

6. a) Determine los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los cuáles la siguiente integral converge

$$\int_1^{\infty} \frac{log\, x}{x^p}\, dx$$

b) Estudie la convergencia de la siguiente integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x(e^x+1)}}\, dx$$

**Solución.**

a) Si $p = 1$ la integral diverge pues: $\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{log\, x}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\, log^2 b = \infty$

Si $p < 1$, como $\frac{log\ x}{x^p} \geq \frac{log\ 2}{x^p}\ \ \forall\, x \geq 2$ y $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\, dx$ diverge, por lo que se concluye que $\int_1^{\infty}\frac{log\, x}{x^p}\, dx$ diverge.

Si $p > 1$, sea $p = q + 1$ ahora $log\, x < x^{\frac{q}{2}}$ para $x$ suficientemente grande, luego $\frac{log\, x}{x^{q+1}} \leq \frac{1}{x^{\frac{q}{2}+1}}$ y como $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{q}{2}+1}}\, dx$ converge $(\forall\, q > 0)$ se concluye que $\int_1^{\infty}\frac{log\, x}{x^p}\, dx$ converge.

En resumen: La integral diverge si $p \leq 1$ y converge si $p > 1$.

7. Determine si las siguientes integrales son convergentes y en caso afirmativo calcúlelas.

a) $\int_0^1 x\,(log\,\frac{1}{x})^2\, dx$ b) $\int_{-1}^1 \frac{(t+2)^{\frac{1}{3}}}{(4t-1)^2}\, dt$

**Solución.**

a) Sea $t = log\,\frac{1}{x} \Leftrightarrow x = e^{-t} \Leftrightarrow dx = -\,e^{-t}dt;\ x\Big|_0^1 \leftrightarrow t\Big|_{\infty}^0$, así

$\int_0^1 x\,(log\,\frac{1}{x})^2\, dx = \int_{\infty}^0 e^{-t}t^2(-\,e^{-t}dt) = \int_0^{\infty} t^2e^{-2t}dt;$ integrando por partes resulta $\int_0^1 x\,(log\,\frac{1}{x})^2\, dx = \frac{1}{4} \Rightarrow$ converge.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(t+2)^{\frac{1}{3}}}{(4t-1)^2}\, dt = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} \frac{(t+2)^{\frac{1}{3}}}{(4t-1)^2}\, dt + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{(t+2)^{\frac{1}{3}}}{(4t-1)^2}\, dt;$ analizando la primera

comparándola con $\displaystyle 4^2 \int_{-1}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{(4t-1)^2}\, dt = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\left(\frac{1}{4}-t\right)^2}\, dt \Rightarrow p = 2 > 1$ (div.)

y como $\displaystyle \lim_{t\to\frac{1}{4}} \frac{\frac{(t+2)^{\frac{1}{3}}}{(4t-1)^2}}{\frac{1}{\left(\frac{1}{4}-t\right)^2}} = 16(\frac{1}{4}+2)^{\frac{1}{3}} \neq 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{(t+2)^{\frac{1}{3}}}{(4t-1)^2}\, dt,$ diverge.

8. Hallar el área entre la curva $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ y su asíntota.

**Solución.**

Notemos que el área está dada por $\displaystyle A = \int_{-\infty}^{\infty} [\,1 - \frac{x^2}{x^2+1}]\, dx,$ o bien

$$A = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = 2\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} \frac{1}{x^2+1} dx = 2\lim_{b\to\infty}(Arctg\, b - Arctg\, 0)$$

$$A = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

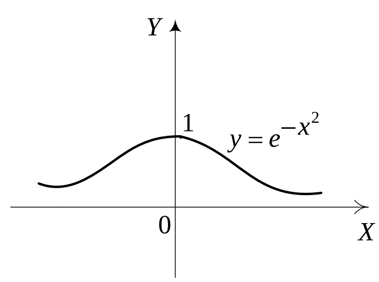
9. Determine el volumen del cuerpo de revolución generado por la rotación de la curva $y = 2x\, e^{-\frac{x}{2}}$, alrededor del eje $X.(x > 0)$

**Solución.**

$$V_x = \pi\int_0^{\infty} 4x^2 e^{-x} dx = 4\pi\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 4\pi\,\gamma(3) = 8\pi$$

10. Calcular el centroide de la región plana entre la curva $y = e^{-x^2}$, y el eje $X$.

**Solución.**




Por ser el eje $Y$ un eje de simetría, $\overline{x} = 0$

$$\overline{y} = \frac{2\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{y}{2}\, y\, dx}{2\displaystyle\int_0^{\infty} y\, dx} = \frac{1}{2}\, \frac{\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x^2} dx}{\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx} \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\, \gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}\, \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

luego de $(1)$;

$$\overline{y} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

11. Determine si las siguientes integrales son convergentes y en caso afirmativo calcúlelas.

a) $\displaystyle\int_0^1 x\, log\, x\ dx$ b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(3-t)\sqrt{1+t^2}}\, dt$

**Solución.**

a) $log\, x = t \ \Leftrightarrow\ \ x = e^t \Leftrightarrow dx = e^t dt;\ \ x\Big|_0^1 \leftrightarrow t\Big|_{-\infty}^0$ así

$$\int_0^1 x\, log\, x\ dx = \int_{-\infty}^0 t\, e^{2t} dt = \int_{\infty}^0 (-\frac{u}{2})\, e^{-u} (-\frac{du}{2})$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^{\infty} u\, e^{-u} du = -\frac{1}{4}\, \gamma(2) = -\frac{1}{4}$$

b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(3-t)\sqrt{1+t^2}}\, dt,$ comparando con $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{3-t} dt,\ \ p = 1\, (div.)$

y como $\displaystyle\lim_{t\to 3} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \neq 0 \ \Rightarrow$ la integral en cuestión diverge.

12. Demuestre para $n \in \mathbb{N}$, que

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{\int_0^1 (t-1)\,log^n t\,dt}{n!} = 1$$

**Demostración.**

Sea $x = log\,t \Leftrightarrow t = e^x \Leftrightarrow dt = e^x dx,\ \ t\Big|_0^1 \leftrightarrow x\Big|_{-\infty}^0$

Así: $\int_0^1 (t-1)\,log^n t\,dt = \int_{-\infty}^0 (e^x - 1)\,x^n e^x dx;$ sea $x = -u$

$$= \int_{\infty}^0 (e^{-u}-1)(-u)^n e^{-u}(-du) = (-1)^n \int_0^{\infty} (u^n e^{-2u} - u^n e^{-u})\,du$$

$$= (-1)^n \int_0^{\infty} u^n e^{-2u} du - (-1)^n \int_0^{\infty} u^n e^{-u}\,du; \text{ sea } 2u = r$$

$$= (-1)^n \int_0^{\infty} (\frac{r}{2})^n e^{-r} \frac{1}{2}\,dr + (-1)^{n+1}\gamma(n+1)$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{\infty} r^n e^{-r}\,dr + (-1)^{n+1} n!$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}\,n! + (-1)^{n+1} n!, \text{ así:}$$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{\int_0^1 (t-1)\,log^n t\,dt}{n!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}\{(-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^{n+1}\} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1}\{\frac{1}{2^{n+1}} - 1\} = 1$$

13. En la teoría de la probabilidad, los **tiempos de espera** tienden a tener una densidad exponencial dada (para $\alpha > 0$) por $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ sobre $[0, \infty)$. Demuestre que:

a) $\int_0^{\infty} f(x)dx = 1$ b) $\int_0^{\infty} x f(x)dx = \frac{1}{\alpha}$

**Solución.**

a) $\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx;$ sea $t = \alpha x \Leftrightarrow dt = \alpha dx;\ x\Big|_0^{\infty} \leftrightarrow t\Big|_0^{\infty}$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \Gamma(1) = 1$$

b) $\int_0^{\infty} x f(x)dx = \int_0^{\infty} x\alpha e^{-\alpha x} dx;$ con la misma sustitución que en la parte a)

$$= \int_0^{\infty} \frac{t}{\alpha} e^{-t} dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty} t e^{-t} dt = \frac{1}{\alpha}\,\Gamma(2) = \frac{1}{\alpha} \cdot 1 = \frac{1}{\alpha}$$

14. Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$$

**Solución.**

Haciendo $x^2 = tg\,\theta \Leftrightarrow 2xdx = sec^2\theta\, d\theta \Leftrightarrow 2\sqrt{tg\,\theta}\, dx = sec^2\theta\, d\theta$;

$x\Big|_0^{\infty} \leftrightarrow \theta\Big|_0^{\pi/2}$ así resulta

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{tg\,\theta}{1+tg^2\theta} \frac{sec^2\theta}{2\sqrt{tg\,\theta}}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \sqrt{tg\,\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} sen^{\frac{1}{2}}\theta\, cos^{-\frac{1}{2}}\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\,\beta(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(1)}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{sen\,\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\pi$$

15. Analice la convergencia de:

a) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x+1}{(x^2-1)^{4/3}}\, dx$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{log\, x}{e^{2x}}\, dx$

**Solución.**

a) $$\int_0^{2} \frac{x+1}{(x^2-1)^{4/3}}\, dx = \int_0^{1} \frac{x+1}{(1-x^2)^{4/3}}\, dx + \int_1^{2} \frac{x+1}{(x^2-1)^{4/3}}\, dx$$

$$= \int_0^{1} \frac{1}{(1-x)^{4/3}(1+x)^{1/3}}\, dx + \int_1^{2} \frac{1}{(x-1)^{4/3}(1+x)^{1/3}}\, dx$$

la primera integral se compara con $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1-x)^{4/3}}dx$; $p = \dfrac{4}{3} > 1 \Rightarrow$ diverge, lo que es suficiente para afirmar que la integral dada diverge.

b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{log\, x}{e^{2x}}\, dx$; comparando con $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$; $p = 2 > 0 \Rightarrow$ converge y dado

que, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 log\, x}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\; log\, x + x}{2e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2log\, x + 3}{4e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4xe^{2x}} = 0 \Rightarrow$

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{log\, x}{e^{2x}}\, dx$ converge.

16. Sea $f(t)$ una función definida $\forall t > 0$, su transformada de Laplace se define

$$L(f) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \text{ si existe.}$$

a) Hallar la transformada de Laplace de $f(t) = cosh(at)$

b) Demuestre $L(e^{ax}f(x)) = F(s-a)$

**Solución.**

a) Con $f(t) = cosh(at) = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$ se tiene :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})dt = \frac{1}{2}\,[\int_0^{\infty} e^{(a-s)t}dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t}dt]$$

$$= \frac{1}{2}[\int_0^{\infty} e^{-u}\frac{1}{s-a}du + \int_0^{\infty} e^{-v}\frac{1}{s+a}dv],$$

para la primera integral $s > a$, $a > 0$ para la segunda $a > 0$, así:

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{s-a}\gamma(1) + \frac{1}{s+a}\gamma(1)] = \frac{1}{2}[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}]$$

b) $F(e^{ax}f(x)) = F(e^{at}f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-st+at}f(t)dt$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a)$$

17. Averiguar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2+\sqrt{x}}{2x^2+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x+1}{logx}\,dx$

**Solución.**

a) Comparando con $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$, que diverge y como

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{x^2+\sqrt{x}}{2x^2+1}, \ \forall x > 2, \text{ entonces}$$

$\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x^2+\sqrt{x}}{2x^2+1}\,dx$ es divergente. Así también diverge $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2+\sqrt{x}}{2x^2+1}\,dx$

ya que, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2+\sqrt{x}}{2x^2+1}\,dx = \int_1^{2} \frac{x^2+\sqrt{x}}{2x^2+1}\,dx + \int_2^{\infty} \frac{x^2+\sqrt{x}}{2x^2+1}\,dx$

b) Sea $logx = t \Leftrightarrow e^t = x \Leftrightarrow e^t dt = dx,\ x\Big|_0^1 \leftrightarrow t\Big|_{-\infty}^0$ entonces

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t+1}{t} e^t dt = \int_{\infty}^{0} \frac{e^{-t}+1}{-t} e^{-t}(-dt)$$

$$= -\int_0^{\infty} t^{-1}e^{-2t}dt - \int_0^{\infty} t^{-1}e^{-t}dt \text{ cada una de ellas}$$

conduce a $\gamma(0)$, por tanto la integral diverge

18. De las afirmaciones que se indican, determine cuáles son verdaderas y cuáles son falsas. Para las que sean verdaderas debe hacer una demostración y para las falsas explique por qué o dé un ejemplo.

a) Si $f$ es continua en $[0,\infty)$ y $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$

b) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

c) Si $f'$ es continua en $[0,\infty)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^{\infty} f'(x)\,dx = -f(0)$

d) Si $f$ es discontinua en $x = a$, entonces $\int_a^1 f(x)\,dx$ es una integral impropia.

**Solución.**

a) **Falsa.**

$f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ es continua en $[0,\infty)$ y $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, sin embargo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

b) **Verdadera.**

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = s,\ s \in \mathbb{R}$. Como $S_n - S_{n-1} = a_n$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow s - s = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

c) **Verdadera.**

Por el teorema fundamental,

$$\int_0^{\infty} f'(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b f'(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} f(x)\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}[f(b)-f(0)] = -f(0)$$

d) **Falsa.**

$f(x)=\dfrac{x^2-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}}$ es discontinua en $x=\dfrac{1}{2}$, sin embargo $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$ es una integral propia.

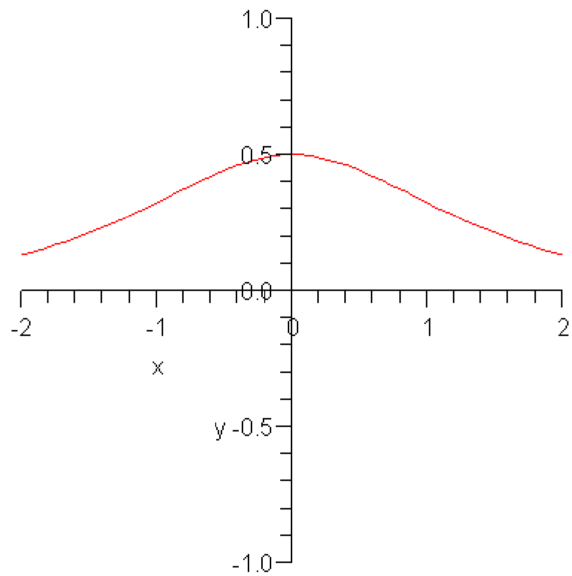
19. Dada la región entre la curva $y=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ y el eje $X$

a) Calcule su área

b) Determine su centroide

**Solución.**

a)




Note que $f(x)$ es par, por tanto el área es $A=2\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx,$

haciendo: $t=e^x \Leftrightarrow dt=e^x dx,\ x\Big|_0^{\infty}\leftrightarrow t\Big|_1^{\infty}$, por tanto

$$A=2\int_1^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt=2\lim_{b\to\infty}\left[Arctg\,b-Arctg\,1\right]=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

b) Por simetría $\overline{x}=0$, en tanto que $\overline{y}=\dfrac{2\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{y^2}{2}dx}{2\displaystyle\int_0^{\infty}y\,dx}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}dx}{\dfrac{\pi}{4}},$

haciendo: $t=e^{2x}\Leftrightarrow dt=2e^{2x}dx,\ x\Big|_0^{\infty}\leftrightarrow t\Big|_1^{\infty}$, por tanto

$$\overline{y}=\frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{1}{(1+t)^2}dt=\frac{1}{\pi}\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{1+t}\Big|_1^{b}=-\frac{1}{\pi}\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}$$

# 12. Series numéricas

1. Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)}$$

**Solución.**

Sea $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{3k-1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}[\frac{-\frac{1}{2}}{n} + \frac{4}{n+1} + \frac{-\frac{7}{2}}{n+2}]$

$$= \sum_{k=1}^{n}[\frac{\frac{1}{2}}{n+1} - \frac{\frac{1}{2}}{n} + \frac{\frac{7}{2}}{n+1} - \frac{\frac{7}{2}}{n+2}]$$

$= \ \frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} - 1) + \frac{7}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}),$ luego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\ \frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} - 1) + \frac{7}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}) = \frac{5}{4}$$

2. Analizar la convergencia o divergencia de cada una de las series que se indican

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^{n-1}\frac{2n-5}{n(n^2-5)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,cos(n\pi)}{(n+1)(n+2)}$

**Solución.**

a) Por D'Alembert,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}n(2n-3)(n^2-5)}{3^n(n+1)(2n-5)[(n+1)^2-5]}=\frac{1}{3}<1$$

luego la serie converge.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,cos(n\pi)}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n}{(n+1)(n+2)},$$

por el criterio para series alternadas, se tiene

$$1)\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}=0$$

$$2)\ n\geq 1\Leftrightarrow n^2+2n+1\leq n^2+3n\Leftrightarrow (n+1)^2\leq n(n+3)\Leftrightarrow$$

$$\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}\leq\frac{n}{(n+1)(n+2)}\Leftrightarrow a_{n+1}\leq a_n,$$

luego $a_n$ es decreciente. Así por este criterio la serie converge.

Ahora, como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}$ es divergente, se compara con $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,

entonces la serie es condicionalmente convergente.

3. Estudiar la convergencia de las siguientes series

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha(n)}}{\alpha(n)}$ donde $\alpha(n)=n+\frac{1}{n}$ $b)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,b^n n}{n^2+1}$ , $b\in\mathbb{R}$

**Solución.**

a) $a_n=\frac{n^n\sqrt[n]{n}\,n}{n^2+1}$ aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n\sqrt[n]{n}\,n}{n^2+1}}=\frac{n\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}\ \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^2+1}}=\infty>1\Rightarrow \text{la serie es divergente}$$

recordemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ y que: $\sqrt[n]{n^2} < \sqrt[n]{n^2+1} < \sqrt[n]{2n^2}$ y que por sandwich $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$.

b) Por el criterio del cuociente $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |b| \frac{(n+1)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)\,n} = |b|$

Si $b = 1$ el criterio no decide

Si $|b| < 1$ la serie converge

Si $|b| > 1$ la serie diverge

Ahora si $b = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\,n}{n^2+1}$ y esta serie diverge, se compara con $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

4. Estudiar la convergencia de las siguientes series

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{log\,\sqrt{n} + 2\sqrt{n}}{(2n-1)\sqrt{n}}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{Arctg^2 n - 2n}{1+n^2}$

**Solución.**

a) Comparamos con $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que diverge

y como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n log\,\sqrt{n} + 2\,n^{\frac{3}{2}}}{(2n-1)\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} log \sqrt{n} + 2}{2 - \frac{1}{n}} = 1 \neq 0$

pués $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} log \sqrt{n} = 0$, por tanto la serie dada diverge.

b) La comparación con $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ también es eficiente, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{nArctg^2 n - 2n^2}{1+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{Arctg^2 n}{n} - 2}{\frac{1}{n^2} + 1} = -2 \neq 0$$

pués $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Arctg^2 n}{n} = 0$, por lo que la serie diverge.

5. Estudiar la convergencia de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{Arctg\,n}}{n^2+1}$$

**Solución.**

Por el criterio de la integral,

Sea $f(x)=\dfrac{e^{Arctg\,x}}{x^2+1}\Rightarrow f\,'(x)=\dfrac{e^{Arctg\,x}(1-2x)}{(x^2+1)^2}<0,\ \forall x\geq 1,$ por tanto

$f(x)$ es continua y decreciente en $[1,\infty),$ por tanto

$$\int_1^{\infty}\frac{e^{Arctg\,x}}{x^2+1}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{e^{Arctg\,x}}{x^2+1}\,dx=\lim_{b\to\infty}e^{Arctg\,x}\Big|_1^b=e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{4}}$$

## 13. Series de Potencias

1. Estudiar en función de $p\geq 0$ el caracter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+2}{n}p^n$$

**Solución.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+2}{n}p^n=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+2}{2}p^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{1\cdot 2}\,p^n,\ \text{ con } p\geq 0$$

Aplicando D'Alambert, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(n+2)}{(n+2)(n+1)}p=p$$

Si $0<p<1$ la serie diverge; si $p>1$ la serie converge, y si $p=0$ converge.

2. a) Calcule para $|x|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\quad \text{y}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)}{n}x^n$$

b) Hallar el intervalo de convergencia de: $f''(x)$ y de $\int f(x)dx$, e investigar que ocurre en los puntos terminales.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

**Solución.**

a) Sea $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \Leftrightarrow \int_0^x F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^x x^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$

$$\int_0^x F(x)dx = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow F(x) = \frac{1(1-x)-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Notemos que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)}{n}x^n = \sum_{n=2}^{\infty} x^n - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}x^n \qquad (*)$

y sea $G(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}x^n \Leftrightarrow G'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1} = \frac{x}{1-x}$ de donde

$$\int_0^x G'(x)dx = \int_0^x \frac{x}{1-x}dx \Leftrightarrow G(x) = \int_0^x \frac{x-1+1}{1-x}dx$$

$$G(x) = \int_0^x [-1+\frac{1}{1-x}]dx = [-x-log(1-x)]$$

por tanto en $(*)$ : $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)}{n}x^n = \frac{x^2}{1-x} - [-x-log(1-x)]$

$$= \frac{x^2}{1-x} + [x+log(1-x)]$$

b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1} \Rightarrow f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(x-1)^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = |x-1|$$

Si $|x-1|<1 \Leftrightarrow 0<x<2$ la serie converge

Si $x=0 \Rightarrow f''(0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n$, que diverge.

Si $x=2 \Rightarrow f''(2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$, que diverge.

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow$$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)} = |x-1|$, que también converge

para $0<x<2$ .

Si $x = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+3}}{(n+1)(n+2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ que es convergente

pués se compara con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Si $x = 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ con módulo resulta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, que

converge y se dice que lo hace absolutamente.

En resumen: la serie converge en $0 \leq x \leq 2$

3. a) Determine el intervalo de convergencia de la serie que se indica, analizando también en sus extremos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n} x^n$$

b) Demuestre que la serie que se indica, converge $\forall x > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}$$

**Solución.**

a) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{10^{n+1} x^{n+1}}{n+1} \frac{n}{10^n x^n} \right| = 10|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 10\,|x|$

Si $10\,|x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{10} < x < \frac{1}{10}$, la serie converge.

Si $x < -\frac{1}{10} \vee x > \frac{1}{10}$, la serie diverge.

Si $x = \frac{1}{10} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, la serie diverge.

Si $x = -\frac{1}{10} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, la serie converge condicionalmente.

b) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} (2n-1) \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2n-1} \right|$

$$= \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$

Si $(\dfrac{x-1}{x+1})^2 < 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 < (x+1)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 - (x-1)^2 > 0$

$2(2x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ la serie converge.

4. Calcule para $|x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)}{n} x^n$$

Recuerde que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} = \frac{a_1}{1-r}, \ (-1 < r < 1)$

**Solución.**

Sea $\displaystyle F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \Leftrightarrow \int_0^x F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^x x^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$

$$\int_0^x F(x)dx = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow F(x) = \frac{1(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Para la segunda serie

Notemos que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)}{n} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \qquad (*)$

y sea $\displaystyle G(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \Leftrightarrow G'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1} = \frac{x}{1-x}$ de donde

$$\int_0^x G'(x)dx = \int_0^x \frac{x}{1-x}dx \ \Leftrightarrow \ G(x) = \int_0^x \frac{x-1+1}{1-x}dx$$

$$G(x) = \int_0^x [-1 + \frac{1}{1-x}]dx = [-x - log(1-x)]$$

por tanto en $(*)$ : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)}{n} x^n = \frac{x^2}{1-x} - [-x - log(1-x)]$

$$= \frac{x^2}{1-x} + [x + log(1-x)]$$

## 14. Polinomio y serie de Taylor

1. Exprese el polinomio $p(x)=2x^3+3x^2-5x+7,$ como otro polinomio en potencias de $(x+1)$

   **Solución.**

   De inmediato sea $f(x)=2x^3+3x^2-5x+7,$ así

   $f(-1)=7$

   $f^{(1)}(x)=6x^2+6x-10 \Rightarrow f^{(1)}(-1)=-10$

   $f^{(2)}(x)=12x+6 \Rightarrow f^{(2)}(-1)=-6$

   $f^{(3)}(x)=12 \Rightarrow f^{(3)}(-1)=12$

   Así,

   $$p(x)=f(-1)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(-1)(x+1)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(-1)(x+1)^2+$$
   $$+\ \frac{1}{3!}f^{(2)}(-1)(x+1)^3.$$

   $$p(x)=7+\frac{1}{1!}(-10)\,(x+1)+\frac{1}{2!}(-6)(x+1)^2+\frac{1}{3!}\,12(x+1)^3$$

   $$p(x)=7-10(x+1)-3(x+1)^2+2(x+1)^3$$

2. Desorrollar en potencias de $x$ hasta $x^{10}$ inclusive las funciones:

   i) $f(x)=ln(1+x),$ en $[0,1]$ ii) $f(x)=e^x,$ en $[-1,1]$

   **Solución.**

   i) $f(0)=ln\,1=0,$

   $f'(x)=(1+x)^{-1} \Rightarrow f'(0)=1=0!$

   $f''(x)=-(1+x)^{-2} \Rightarrow f''(0)=-1=-1!$

   $f^{(3)}(x)=1\cdot 2(1+x)^{-3} \Rightarrow f^{(3)}(0)=1\cdot 2=2!$

   $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

   $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} \Rightarrow$

   $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,\ n\geq 1$

$$ln(1+x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}(i-1)!}{i!} x^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i}$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot - \frac{x^{10}}{10} + R_{11}(x)$$

donde

$$R_{11}(x) = \frac{f^{11}(\xi)}{11!} x^{11} = \frac{10!(1+\xi)^{-11}}{11!} x^{11} = \frac{1}{11} \frac{1}{(1+\xi)^{11}} x^{11},\ 0 < \xi < x$$

Como $0 \le x \le 1$, $\xi > 0$, calculando el valor absoluto del resto $R_{11}(x)$

$$|\ R_{11}(x)| = |\frac{x^{11}}{11(1+\xi)^{11}}| < \frac{1}{11}$$

ii) $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1,\ n \ge 0$; así

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} x^n$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdot\cdot\cdot + \frac{x^{10}}{10!} + R_{11}(x)$$

$$R_{11}(x) = \frac{f^{11}(\xi)}{11!} x^{11} = \frac{e^{\xi}}{11!} x^{11},\ \ 0 < \xi < x$$

Como $-1 \le x \le 1$, $\xi > 0$, calculando el valor absoluto del resto $R_{11}(x)$

$$|\ R_{11}(x)| = |\frac{e^{\xi}}{11!} x^{11}| < \frac{e}{11!} < \frac{3}{11!}$$

3. ¿Cuantos términos hay que tomar en la fórmula de Maclaurin aplicada a la función $f(x) = e^x$ para obtener un polinomio que represente a esta función en $[-1, 1]$, con tres cifras decimales exactas.

**Solución.**

Por el problema anterior parte b) se tiene para: $0 < \xi < x,\ -1 \le x \le 1$

$$|\ R_n(x)| = |\frac{e^{\xi}}{n!} x^n| < \frac{e}{n!} < \frac{3}{n!}$$

Se debe exigir que $|\ R_n(x)| < \frac{3}{n!} \le 0.001 \Rightarrow n! \ge \frac{3}{0.001} \Rightarrow n \ge 7$

por tanto se deben tomar a lo menos siete términos en la fórmula de Maclaurin.

4. ¿Para que valores de $x$ la fórmula aproximada

$$sen\,x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

tendrá un error menor que $0.0001$

**Solución.**

El segundo miembro de la ecuación aproximada representa los primeros seis términos de la fórmula de Maclaurin para la función $sen\,x$.

calculemos entonces $R_7(x)$, como $(sen\,x)^{(7)} = -cos\,x$, entonces

$$|\,R_7(x)| = \left|\frac{-\,cos\,x}{7!}x^7\right| \leq \frac{|x|^7}{7!}$$

Para que el error sea menor que $0.0001$, se debe tener que

$$\frac{|x|^7}{7!} < 0.0001 \Leftrightarrow |x|^7 < 0.504 \Leftrightarrow |x| < 0.9067$$

5. Hallar el polinomio de Taylor de grado $3$, para $f(x) = sen\,x$, centrado en $c = \dfrac{\pi}{6}$

**Solución.**

$$f(x) = sen\,2x \quad \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = 2cos\,2x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2cos\,\frac{\pi}{3} = 1$$

$$f''(x) = -4sen\,2x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4sen\,\frac{\pi}{3} = -2\sqrt{3}$$

$$f^{(3)}(x) = -8\,cos\,2x \Rightarrow f^{(3)}\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = -4$$

Así, resulta

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3}\frac{f^{(i)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{i!}(x - \frac{\pi}{6})^i$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{1!}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{2\sqrt{3}}{2!}(x - \frac{\pi}{6})^2 - \frac{4}{3!}(x - \frac{\pi}{6})^3$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + (x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}\,(x - \frac{\pi}{6})^2 - \frac{2}{3}(x - \frac{\pi}{6})^3$$

6. Demuestre que para todo real $x \geq 0$ se tiene que

$$e^x \geq x + 1$$

**Demostración.**

Como se vió en el problema 2b) se tiene

$$e^x = 1 + x + \frac{e^{\xi}}{2!}x^2, \quad 0 < \xi < x$$

Note que $\frac{e^{\xi}}{2!}x^2 > 0$, $\forall x \neq 0$; y que si $x = 0 \Rightarrow e^0 = 0 + 1$, por tanto

$e^x \geq x + 1$, y la igualdad solo se verifica para $x = 0$.

7. Demuestre que

$$cosh\, x \approx 1 + \frac{1}{2}\, x^2$$

y determine los valores de $x$ de modo con esta aproximación se obtenga un error menor que $0.001, \ -1 \leq x \leq 1$

**Demostración.**

Como $cosh\, x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ y considerando el polinomio de McLaurin hasta el orden $3,$ se tiene:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ \text{ y } \ e^{-x} \approx 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$$

entonces:

$$cosh\, x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ + 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!})$$

Así:

$$cosh\, x \approx 1 + \frac{1}{2}\, x^2$$

$$R_4(x) = \frac{1}{2}\, \frac{(e^{\xi} + e^{-\xi})}{4!}\, x^4, \ 0 < \xi < x \Rightarrow$$

$$R_4(x) < \frac{(\, e^{\xi} + e^{-\xi})|\, x^4|}{2 \cdot 4!} < \frac{e + e^{-1}}{2 \cdot 4!}|\, x^4| < 0,001 \Leftrightarrow |x| < 0.36$$

8. a) Determine la serie de potencias de $x$ de $ln(1+x)$ y su intervalo de convergencia.

   b) Use a) para obtener los cuatro primeros términos no nulos y el término general del desarrollo de $lnx$ de la serie de Taylor en potencias de $(x-1),$ y para probar que su intervalo de convergencia es $(0, 2]$

   c) Aproveche b) para obtener la serie de potencias de $(lnx^x - x\,)$ en potencias de

$(x-1)$ y luego calcule $ln4$ tomando en cuenta los 4 primeros términos no nulos.

**Solución.**

a) Sea $f(x)=ln(1+x) \Rightarrow f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\,,\ \forall\, n\geq 1$

$$ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f^{(0)}(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n$$

Intervalo de convergencia

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\ \frac{n}{n+1}=|x|$$

Si $|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$ la serie converge, note que $x>-1$, solo debemos estudiar en $x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, que es condicionalmente convergente, así el intervalo de convergencia resulta $-1<x\leq 1$

b)

En, $ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n$ sea $x=''x-1''$, así resulta

$$ln(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,(x-1)^n;\ \ a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,(x-1)^n$$

$$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Intervalo de convergencia

$$-1<x-1\leq 1 \Leftrightarrow 0<x\leq 2$$

c) Note que $lnx^x-x=x\,lnx-x$ función que se logra integrando la serie del $ln\,x$ obtenida en b), es decir

$$\int_1^x ln(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_1^x(x-1)^n dx$$

$$[x\,ln(x)-x]\Big|_1^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)}$$

$$x\,ln(x) - x = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)}$$

Considerando los 4 primeros términos, resultan

$$x\,ln(x) - x \approx -1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4 - \frac{1}{20}(x-1)^5$$

Ahora para $x = 2$, se tiene

$$ln\,4 \approx 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = 1.3666$$