CÁLCULO I

1. Funciones

Ejercicio 1.

Determine el dominio y recorrido de las siguientes funciones definidas en los reales.

a) $f(x)=4-2x^2$

b) $f(x)=x^2-2\,x$

c) $f(x)=|x^2-2\,x\,|$

d) $f(x)=\dfrac{x-2}{x}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{2-\sqrt{1-x}}$

f) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

g) $f(x)=\sqrt{4-|x|}$

h) $f(x)=\dfrac{4}{2-|x+1|}$

Respuestas.

a) Dom $f=\mathbb{R}$, Rec $f=(-\infty,4]$; b) Dom $f=\mathbb{R}$, Rec $f=[-1,+\infty)$

c) Dom $f=\mathbb{R}$, Rec $f=[0,+\infty)$; d) Dom $f=\mathbb{R}-\{0\}$, Rec $f=\mathbb{R}-\{1\}$

e) Dom $f=(-\infty,-3)\cup(-3,1)$, Rec $f=(-\infty,0)\cup[\frac{1}{2},+\infty)$

f) Dom $f=\mathbb{R}$, Rec $f=\mathbb{R}-\{1\}$; g) Dom $f=[-4,4]$, Rec $f=[0,2]$

h) Dom $f=\mathbb{R}-\{-3,1\}$, Rec $f=(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$.

Ejercicio 2.

Dada la relación f en $\mathbb{R}$, por $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$

a) ¿Es función? si no lo es encontrar el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$, tal que sea su dominio para que sea una función.

b) Determine el dominio y recorrido de f tal que sea biyectiva y encuentre una fórmula para $f^{-1}(x)$.

Respuesta.

a) Dom $f=\mathbb{R}-\{\pm 3\}$, b) Dom $f=\mathbb{R}-\{\pm 3\}$, Rec $f=\mathbb{R}\ -\{\frac{5}{6},1\}$;

$$f^{-1}(x)=\frac{3x+2}{1-x}$$

Ejercicio 3.

Sean las funciones f y g tales que $f(x)=x^2-2\,x-2$ y $g(x)=a\,x+b$.
Determine a y b, de modo que $f\circ g=g\circ f,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Respuesta.

$$(\,a=0\ \wedge\ b=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2})\ \vee\ (\,a=1\ \wedge\ b=0\,)$$

Ejercicio 4.

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función definida por $f(x)=3\,x\,+4$, demuestre que f es biyectiva y encuentre una fórmula para f^{-1}.

Respuesta.

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x-4)$$

Ejercicio 5.

Sea $f:\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}\to\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$ una función dada por $f(x)=\dfrac{x-3}{2x+1}$ probar que f es uno a uno y sobre y luego hallar una fórmula para f^{-1}.

Respuesta.

$$f^{-1}(x)=\frac{x+3}{1-2x}$$

Ejercicio 6.

Sean f y g funciones de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x\le 2 \\ 2\,x & \text{si} \quad x>2 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x>1 \\ 0 & \text{si} \quad x\le 1 \end{cases}$$

a) Demostrar que f es biyectiva.

b) Hallar fórmula para f^{-1}.

c) Grafique f y f^{-1} en un solo sistema.

d) Determine una fórmula para $g\circ f^{-1}$

Respuesta.

b) $f^{-1}(x)=\begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x\le 4 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$ d) $(g\circ f^{-1})=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x>3 \\ 0 & \text{si} \quad x\le 3 \end{cases}$

Ejercicio 7.

Sean $A=[-4,4]$; $B=[0,4]$ y $C=[-4,0]$; $R_1:A\to B$; $R_2:A\to C$; $R_3:B\to A$ y $R_4:B\to C$. Dada $R_i=\{\,(x,y):x^2+y^2=16\,\}\;\forall\, i=1,2,3,4$ representar R_i en un plano cartesiano y establecer si la relación es o no una función.

Respuesta.

R_1, R_2 y R_4 son funciones.

Ejercicio 8.

Determinar cuáles de las siguientes relaciones son funciones de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, justifique. Grafique R_1, R_2 y R_3.

a) $R_1=\{\,(x,y):3x+5y=8\,\}$ b) $R_2=\{\,(x,y):x^2+y^2>1\,\}$

c) $R_3=\{\,(x,y):x=y\,\}$ d) $R_4=\{\,(x,y):y^2-x^2=0\,\}$

e) $R_5=\{\,(x,y):y^3-x^3=0\,\}$

Respuesta.

R_1, R_3 y R_5 son funciones.

Ejercicio 9.

Cada una de las siguientes fórmulas define una función de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Hacer el gráfico de cada una de ellas en el plano cartesiano.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

c) $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$

d) $f(x) = |x|^2 - 2\,|x|\; - 1$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ 4 & \text{si} \quad -6 \leq x < 2 \\ x + 10 & \text{si} \quad x < -6 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} |x+1| - 2 & \text{si} \quad |x| \leq 2 \\ 1 - x & \text{si} \quad |x| > 2 \end{cases}$

Ejercicio 10.

Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 1;\;\; g(x) = sen\, x$ y $h(x) = \sqrt{x-1}$

Hallar: $f(5);\; g\left(\dfrac{\pi}{6}\right);\; h(10);\; (f \circ g)\left(\dfrac{\pi}{2}\right);\; (g \circ f)(1); (f \circ h)(17);\;\; (f \circ g \circ h)(x);$

$(f \circ h \circ g)(x);\;\; (g \circ f \circ h)(x);\; (f+g)(x);\; (h-g)(x);\; (\dfrac{g}{f})(x);\; [h \circ (f+g)](x)$

$f(x+k) - f(x);\;\; \dfrac{1}{k}[h(x+k) - h(x)].$

Respuesta.

$f(5) = 26;\; g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2};\; h(10) = 3;\;\; (f \circ g)\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2;\;\; (g \circ f)(1) = sen\, 2;$

$(f \circ h)(17) = 17;\; (f \circ g \circ h)(x) = sen^2 \sqrt{x-1}\; + 1;\;\; (f \circ h \circ g)(x) = sen\, x$

note que en este caso $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2},\; k \in \mathbb{Z}$ luego $(f \circ h \circ g)(x) = 1;$

$(g \circ f \circ h)(x) = sen\, x\,,\; \forall\, x \geq 1; (f+g)(x) = x^2 + 1 + sen\, x;$

$(h - g)(x) = \sqrt{x-1} - sen\, x;$

$(\dfrac{g}{f})(x) = \dfrac{sen\, x}{x^2+1}; [h \circ (f+g)](x) = \sqrt{x^2 + 1 + sen\, x}$

$f(x+k) - f(x) = 2kx + k^2;\;\; \dfrac{1}{k}[h(x+k) - h(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{x+k-1} - \sqrt{x-1}}$

Ejercicio 11.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x - x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Pruebe que f es biyectiva y luego encuentre una fórmula para f^{-1}.

Respuesta.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2-x & si \quad x \geq 0 \\ 1+\sqrt{1-x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 12.

Sean $f : X \rightarrow Y$ y g : $Y \rightarrow X$ funciones tales que $g \circ f$ es la identidad en X. Pruebe que f es uno a uno y g es sobre.

Ejercicio 13.

Averigue si la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

tiene función inversa $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Respuesta.

No tiene inversa, pues no es sobre.

Ejercicio 14.

Sean f y g dos funciones en $\mathbb{R}$, dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x < -1 \lor x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si} \quad x < -2 \lor x > 2 \end{cases}$$

determine una fórmula para $(f \circ g)(x)$.

Respuesta.

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq |x| \leq \sqrt{3} \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \sqrt{3} \lor |x| < 1 \end{cases}$$

Ejercicio 15.

Sea $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $(f \circ g)(x) = a\,x + b$; f y g polinomios de grado 1

i) Si $f(x) = c\,x + d$, $c \neq 0$; determine la función $g(x)$.
ii) Si $g(x) = p\,x$, $p \neq 0$; determine $f(x)$.

Respuesta.

i) $g(x) = \frac{1}{c}(a\,x + b - d)$
ii) $f(x) = \frac{a}{p}\,x + b$

Ejercicio 16.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}\,x + 3$ y $f \circ g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(f \circ g \circ f)(x) = 6\,x\, - 9.$ Determine $g(x)$, si g es un polinomio de grado 1.

Respuesta.

$g(x) = 54\,x - 198.$

Ejercicio 17.

Para qué números a, b, c, y d la función $f(x) = \frac{ax+d}{cx+b}$ satisface $(f \circ f)(x) = x, \forall\, x \in \mathbb{R}.$

Respuesta.

$(a = b \neq 0\, \wedge\, c = d = 0) \vee (a = \,-b$ con $a^2 + cd \neq 0)$

Ejercicio 18.

a) Suponga $f(x) = x + 1$. ¿Existen funciones $g(x)$ tales que $f \circ g = g \circ f$?
b) Suponga que f es una función constante. ¿Para qué funciones g se cumple que $f \circ g = g \circ f$?
c) Supóngase que $f \circ g = g \circ f$ para todas las funciones g. Demostrar que f es la función identidad.

Respuesta.

a) y b) $g(x) = x$

Ejercicio 19.

Demostrar que si : $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones uno a uno, entonces la función $g \circ f : A \to C$ es uno a uno.

Ejercicio 20.

Sea $A = [0, +\infty)$ y dadas las funciones f, g y h de $A \to A$ por $f(x) = x^2$; $g(x) = x^3 + 1$ y $h(x) = x - 2$ ¿Cuál(es) de estas funciones es sobre?

Respuesta.

Solo f.

Ejercicio 21.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \leq 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Averiguar si f es uno a uno o sobre.

Respuesta.

f es sobre pero no es uno a uno.

Ejercicio 22.

Sea f definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ -(2x+1) & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Demuestre que existe f^{-1} y luego determine una fórmula para ella, grafique f y f^{-1}.

Respuesta.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -\frac{1}{2}(x+1) & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

Ejercicio 23.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que:
$f(x) = 3x$ si $x \leq 1 \ \wedge \ f^{-1}(x) = x^2 - 8$ si $x > 3$ demuestre que f es biyectiva.

Ejercicio 24.

En $\mathbb{R}$ se definen las funciones f y g por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si} \quad x > 0 \\ x + 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si} \quad x > 3 \\ x^2 & \text{si} \quad x \leq 3 \end{cases}$$

a) Muestre que f es biyectiva y que g no lo es.
b) Determine $f$órmulas para: $f \circ g$ y $g \circ f$.

Respuesta.

b) $$(f \circ g)(x) = \begin{cases} (2x+5)^2 + 2 & \text{si} \quad x > 3 \\ x^4 + 2 & \text{si} \quad x < 0 \ \vee \ 0 < x \leq 3 \\ x^2 + 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x^2 + 9 & \text{si} \quad x > 1 \\ (x^2+2)^2 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ (x+2)^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 25.

Demostrar que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ tienen inversas, entonces
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ejercicio 26.

a) Demostrar que para la función $f(x) = 1 - |\,2x - 1\,|$, con $0 \leq x \leq 1$
se tiene $f(x) = f(1-x)$
b) Sea $g(x) = 2x + 5, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ calcúlese $f \circ g$ y $g \circ f$ siendo f la función

definida en a).

Ejercicio 27.

Dada $f(x) = \dfrac{ax-b}{cx+d}$, determine las condiciones necesarias y suficientes entre las constantes $a, b,$ c y d para que se verifique $(f \circ f^{-1}) = x$ indicando además el dominio y recorrido de f.

Respuesta.

$ad + bc \neq 0;$ Dom $f = \mathbb{R} - \{ -\dfrac{b}{c} \},$ Rec $f = \mathbb{R} - \{ \dfrac{a}{c} \}, c \neq 0.$

Ejercicio 28.

Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro es de 5m., encontrar la función que expresa el área de la ventana en términos de la longitud de la base del rectángulo.

Respuesta.

$A(x) = \dfrac{5}{2}x - \dfrac{1}{8}(4+\pi)x^2.$

Ejercicio 29.

Un rectángulo se encuentra inscrito en una circunferencia de radio r. Determine la función que calcula su área en términos de la longitud de uno de sus lados.

Respuesta.

$A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2},\ 0 < x < 2r.$

Ejercicio 30.

Un triángulo tiene dos de sus vértices en los puntos $(0,0)$ y $(4,0)$. Su tercer vértice se encuentra en la curva $x^2 y = 1$. Determine la función que calcula el área del triángulo en términos de la abscisa del tercer vértice.

Respuesta.

$A(x) = \dfrac{2}{x^2}$, $x > 0$.

Ejercicio 31.

La función $f(x)$ esta definida para $0 \leq x \leq 1$. ¿Cuáles son los dominios de definición de las funciones siguientes?: $f(3\,x^2)$, $f(x-5)$, $f(2x+3)$, $f(1+|x|)$ y $3f(x)$.

Respuesta.

$-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $5 \leq x \leq 6$, $-\dfrac{3}{2} \leq x \leq -1$, $x = 0$, $0 \leq x \leq 1$.

2. Sucesiones y límites

1. Calcule:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}\,)$$

$$\text{b) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+4}{3n+2}\right)^{n^2 sen\,\frac{1}{n}}$$

Respuesta.

a) $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ b) $e^{2/3}$

2. Sea la sucesión a_n definida por

$$\frac{1+3\,a_n}{1-2\,a_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

demuestre que es decreciente y acotada (entre 0 y $-\dfrac{1}{3}$) y luego calcule su límite.

Respuesta.

$-\dfrac{1}{3}$

3. Límites de funciones

1. Calcule:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{3}{1-\sqrt{x}}\right]$$

$$\text{b) } \lim_{x\to 0}\frac{x\,-\,2\,x^2\,+\,sen3x}{4\,x\,-\,e^{-x}\,+\,1}$$

Respuesta

a) $-\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{4}{5}$

2. Dada

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x} & \text{si} \quad x>1\\ \frac{1}{2}x-x^2 & \text{si} \quad 0\le x\le 1\\ \frac{1-cos\,(\pi x)}{x} & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

Calcule:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x),\quad \lim_{x\to 0} f(x),\quad \lim_{x\to 1}\quad f(x)\ \text{ y } \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

y aprovéchelos para graficar $f(x)$.

Respuesta.

$0,\ 0,\ -\dfrac{1}{2},\ 0.$

4. Continuidad

5. Derivadas

1. Si $y=2\,sen2x-cosx$ resuelva la ecuación trigonométrica

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \frac{5}{2}cotgx$$

Respuesta.

$2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \ \vee \ \pi k + (-1)^k \frac{\pi}{6}$

2. Sea $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, a constante no nula

   a) Calcule y'

   b) Demuestre que

$$27(y'')^3 = \frac{a}{x^4 y}$$

Respuesta.

a) $-(\frac{y}{x})^{1/3}$

6. Aplicaciones de la derivada

1. Dada la curva

$$e^y + ax^2 - 5y = 6, \quad a \neq 0$$

Determine a de modo que la tangente a la curva dada, en el punto $P_0(x_0, 0)$ sea paralela a la recta $ax + 4y = 5$

2. Sea $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hallar a, b, c, d de manera que $g(0) = 0$, la recta tangente al gráfico de g en el origen pase por $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ y que además en $x = 1$ y en $x = -1$ las rectas tangentes sean paralelas al eje X.

7. La integral definida

1. Demuestre que si f y g son funciones integrables en $[0,a]$ tales que

$f(x) = f(a-x)$ y $g(x)+g(a-x)=k$, $\forall x \in [0,a]$

con k constante, entonces;

$$\int_0^a f(x)\,g(x)\,dx = k\int_0^{\frac{a}{2}} f(2x)\,dx$$

Use este hecho para calcular

$$\int_0^{\pi} \frac{xsenx}{1+cos^2 x}\,dx$$

8. La integral indefinida

9. Métodos de integración

1. Calcular

a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+5}\,dx$ $\qquad b)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^3-2x^2-3x}\,dx$ $\qquad c)$ $\displaystyle\int_0^1 Arctg\,x\,dx$

10. Aplicaciones de la integral

1. Dada la curva

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Calcule:

a) La longitud total de la curva dada

b) El área encerrada por dicha curva.

c) El volumen de revolución en torno al eje X.

2. Si $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt$ y $f(2) = 3$

Calcule $\int_0^2 x\,f(x)\,dx$

3. a) Calcular el área de la región R_1 limitada por la curva $y = x^3 - 4\,x$ y su tangente en el punto $x = 1$.

   b) Sea R_2 la parte de R_1 comprendida entre $x = 0$ y $x = 1$. Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar R_2 alrededor del eje X. Idem alrededor del eje Y.

   c) Consideremos el sólido obtenido al desplazarse perpendicularmente al eje X un círculo, uno de cuyos diámetros está limitado por la curva $y = x^3 - 4\,x$ y la tangente mencionada en a). Calcular su volumen.

4. Sea la región plana entre las curvas

$$x\,y = 1,\;\; 4\,y = x,\;\; x = 1$$

Calcule: el área de la región, $V_x,\ V_y$ y la longitud de la frontera de la región.

5. Determine el centroide del alambre definido por la función

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

para $0 \le x \le a,\; y \ge 0$

11. Integrales impropias

1. Estudiar la convergencia de las integrales siguientes:

a) $\int_1^\infty \frac{log\,x}{x+2}\,dx$ b) $\int_0^\infty \frac{3\sqrt{x}\,+\,7}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx$ c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$

2. Ocupando Gamma y Beta respectivamente, calcule

a) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-2x^2} dx$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$

3. a) Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias

   i) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ ii) $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}(x^2+1)} dx$

   b) Calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{tg\, x}} + \frac{1}{\sqrt{cotg\, x}}\right)\, dx$$

4. Calcule el volumen del sólido generado al rotar la curva $y^2 = \dfrac{x}{1-x}$

   a) En torno al eje X.

   b) En torno a su asíntota.

   es constante.

5. Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-kx}\sqrt{x+1}\, dx$

6. Dada la región acotada por $y = e^{-x}$ e $y = 0\,(x \geq 0)$, calcular

   a) El área de la región

   b) El volumen del sólido generado por esa region al girar en torno al eje y.

7. Calcular

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{log(\frac{1}{x})}}\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 (log\frac{1}{x})^3 dx$

8. Dada la región entre la curva $y = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ y el eje X

   a) Calcule su área

   b) Determine su centroide

12. Series numéricas

1. Estudiar la convergencia de

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,log^2 n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2^n})$

2. Estudiar la convergencia de las series siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+sen\,\frac{2}{n}}{n^2+4}$ b) $\displaystyle\frac{2^p}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3^p}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{4^p}{3\cdot 4\cdot 5}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

3. Estudiar la convergencia de las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^3}{2^n-1}$

4. Determine si las siguientes series son absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes o divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5n}$

5. Ocupando series demuestre que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

6. De las afirmaciones que se indican, determine cuáles son verdaderas y cuáles son falsas. Para las que sean verdaderas debe hacer una demostración y para las falsas explique por qué o dé un ejemplo.

a) Si f es continua en $[0,\infty)$ y $\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)\neq 0$

b) Si f' es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^{\infty} f'(x)\, dx = -f(0)$

c) Si f es discontinua en $x = a$, entonces $\int_a^1 f(x)\, dx$ es una integral impropia.

13. Series de Potencias

1. Calcular el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ y utilizar el valor de la suma para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^{n-1}}$

2. Determinar el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x - 10)^n$$

3. Determine el desarrollo en serie de potencias de x de $(1 - x)^{-2}$

   a) Elevando al cuadrado el desarrollo de $(1 - x)^{-1}$

   b) Derivando el desarrollo de $(1 - x)^{-1}$

4. Determinar el intervalo de convergencia de las siguientes series y expresar su suma en términos de funciones elementales:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$

   con ayuda de los resultados obtenidos, determinar el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (n+1)}$

5. Estudiar el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n x^n}{n+1} \text{ con } p > 0,$$

expresar su suma en términos de funciones elementales y, con su ayuda, calcular

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(n+1)}$$

6. Determine el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x+2)^n}{2^n + 3^{n+1}}$$

7. Determine el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n}+1}(x-e)^{n-1}$$

Estudie también la convergencia en los extremos del intervalo.

8. Determine el intervalo de convergencia de la serie dada, analizando también en los puntos terminales.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(-2x)^{n-1}$$

9. Usar la serie de potencias

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

para obtener una representación en serie de potencias, centrada en 0, de

$$f(x) = log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

10. ¿Para qué valores de x?, $x \in \mathbb{R}$, converge o diverge la serie dada. También estudiar en los extremos del intervalo considerado

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^n log\, n}$$

11. Ocupando series geométricas calcule

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(\frac{1}{3})^{n-1}$$

12. Determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-5)^n}{n3^n}$$

13. Ocupando series geométricas calcule

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

14. Calcule para $|x|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)}{n}x^n$$

Recuerde que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_1\,r^{n-1}=\frac{a_1}{1-r},\ (-1<r<1)$

15. Demuestre que

$$y(x)=3+3x^2+7\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

es solución de la ecuación diferencial $(x^2+1)\,y''(x)=2\,y(x)$

16. Si $y=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{x^{2n}}{n!}$ demostrar que és solución de la ecuación diferencial

$$y''+3x\,y'+3y=0$$

Determine el intervalo de convergencia de la serie

14. Polinomio y serie de Taylor

1. a) Usar el polinomio de Taylor para aproximar la integral

$$\int_0^{0.1}\frac{sen\,x}{x}\,dx$$

con un error $< 10^{-4}$

b) Calcular el polinomio de Taylor de la función $Arctg\,x$ y utilícelo para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 2senx + Arctg\,x}{1 - e^{x^5}}$$

2. Determinar los cuatro primeros términos en el desarrollo de Taylor de

$$ln(cos\,x) \text{ en torno a } x_0 = \frac{\pi}{3}$$

3. Usar Taylor para aproximar

$$\int_0^{0.1} e^{-x^2} dx$$

4. Con ayuda del polinomio de Taylor calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{cos\,x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

5. Calcule la serie de Taylor de la función $h(x) = sen\,x - x\,cos\,x$ centrada en $x_0 = 0,$ determine su intervalo de convergencia y utilícelo para calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n\,\pi^{2n}}{(2n+1)!}$$

6. Ocupando Taylor calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{Arctg\,x - x - \frac{1}{3}x^3}{senx - x}$$

7. Obtener el desarrollo de Taylor de orden dos, para $f(x,y) = x^2 e^{x+y}$ en el punto $(1,0)$.