Capítulo 9

Aplicaciones Derivación

9.1. Regla de L'Hôpital

1. Cálculo de formas indeterminadas del tipo $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un cierto entorno del punto x_0, excepto, quizás en el propio punto x_0, y $g'(x) \neq 0$ y si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ ó } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ supuesto que existe $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. El punto x_0 puede ser finito o no.

2. Las formas indeterminadas del tipo 0∞ ó $\infty - \infty$ se reducen al tipo $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$ mediante transformaciones algebráicas.

3. Las formas indeterminadas del tipo $1^\infty, \infty^0, 0^0$ se reducen al tipo 0∞ y por ende a $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$ tomando logaritmos o mediante la transformación:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)log[f(x)]}$$

9.2. Problemas Resueltos

1. Si $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$ con $m, n \in \mathbb{N}$ demuestre que el punto ξ del teorema de Rolle divide al intervalo $[a, b]$ en la razón $m : n$.

Solución.

Notemos que $f(a) = f(b) = 0, f$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) pues: $f'(x) = m(x-a)^{m-1}(x-b)^n + n(x-b)^{n-1}(x-a)^m$ entonces por el teorema de Rolle se sabe que $f'(\xi)=0$ para $a<\xi<b$, así:

$m(\xi-a)^{m-1}(\xi-b)^n+n(\xi-b)^{n-1}(\xi-a)^m=0$

$(\xi-a)^{m-1}(\xi-b)^{n-1}[m(\xi-b)+n(\xi-a)]=0$ como $a<\xi<b$ necesariamente $m(\xi-b)+n(\xi-a)=0 \Leftrightarrow \xi=\frac{na+mb}{n+m}$.

2. Demostrar las siguientes desigualdades:

   a) $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{15}<Arc\,sen\,0{,}6<\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{8}$

   b) $1-\dfrac{a}{b}<log\left(\dfrac{b}{a}\right)<\dfrac{b}{a}-1$

   c) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{25}<Arctg\dfrac{4}{3}<\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{6}$

   Demostración.

   a) Sea $f(x)=Arcsen\,x \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   Para $\xi\in(a,b), f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(\epsilon)=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{Arcsen\,b-Arcsen\,a}{b-a}$ luego para, $0<a<\xi<b<1$, se tiene:

   $$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$$

   luego:

   $$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}<\frac{Arcsen\,b-Arcsen\,a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$$

   si $b=0{,}6$ y $a=0{,}5$

   queda:

   $$\frac{2}{\sqrt{3}}<\frac{Arcsen\,0{,}6-\frac{\pi}{6}}{0{,}1}<\frac{10}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{15}+\frac{\pi}{6}<Arcsen\,0{,}6<\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}$$

   b) Sea $f(x)=log\,x \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{x};\; f'(\xi)=\frac{1}{\xi}=\frac{log\,b-log\,a}{b-a}$ y de
   $a<\xi<b \Leftrightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{b}<\frac{log(\frac{b}{a})}{b-a}<\frac{1}{a}$ finalmente queda:

   $$1-\frac{a}{b}<log\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b}{a}-1$$

c) Sea $f(x) = Arctg\, x \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2};\ f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{Arctg\, b - Arctg\, a}{b-a}$

y de $a < \xi < b \Leftrightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+a^2} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{1+b^2} < \frac{Arctg\, b - Arctg\, a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$

si $b = \frac{4}{3}$ y $a = 1$ se tiene $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < Arctg\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$.

3. *a*) Demostrar que $\dfrac{x}{1+x} < log\,(x+1) < x,\ x > 0$

   b) Aproveche a) para calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log\,(x+1)}{x}$ y verifique su resultado usando la definición de derivada.

Demostración.

a) $f(x) = logx \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x};\ f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$

Para $\xi \in (x, x+1), x > 0$ se tiene $f'(\xi) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x}$ de aquí $\frac{1}{\xi} = \frac{log(x+1)}{x}$, pero como $x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{\xi} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{log(x+1)}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} < log(x+1) < x$

b) De inmediato por sandwich $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log\,(x+1)}{x} = 1$, por otra parte:
aplicando la definición de derivada a $f(x) = log\,(x)$,
$f'(1) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log(x+1) - log(1)}{(x+1)-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log(x+1)}{x}$ y obviamente $f'(1) = 1$.

4. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log\,(1+x^2)}{cos\,3x - e^{-x}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2\,Arctg\,x^2 - \pi}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n logx \quad (n > 0)$

e) $\lim\limits_{x\to\pi/2} (sen\,x)^{tg\,x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\pi - 2Arctg\,x)log\,(x)$ h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\,x}$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{log\,x} - \dfrac{x}{log\,x}\right)$ j) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{log(e^x-1)}}$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{log\,(1+x^2)}{cos\,3x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{-3sen\,3x+e^{-x}}=0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2Arctg\,x^2-\pi}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}(-2x^{-3})}{2\frac{1}{1+x^4}\cdot 2x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{\frac{1}{x^4}+1}}=-\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}x^n\,log\,x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{log\,x}{x^{-n}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}=-\dfrac{1}{n}\lim\limits_{x\to 0}x^n=0\quad(n>0)$

e) Sea $y=(sen\,x)^{tg\,x}\Leftrightarrow log\,y=tg\,x\,log\,(sen\,x)$,

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}log\,y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{log\,(sen\,x)}{cotg\,x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{1}{sen\,x}\cdot cos\,x}{-cosec^2x}=0$ de aquí

$log(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}y)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}y=e^0$ así $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(sen\,x)^{tg\,x}=1$

f) Sea $y=x^x\Leftrightarrow log\,y=x\,log\,x,\ \lim\limits_{x\to 0^+}log\,y=\lim\limits_{x\to 0^+}x\,log\,x$

$\lim\limits_{x\to 0^+}log\,y=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{log\,x}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$ de donde

$\lim\limits_{x\to 0^+}y=e^0=1$ así $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$

g)

$$\lim_{x\to+\infty}(\pi-2Arctg\,x)log\,x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2Arctg\,x}{[log\,x]^{-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-[log\,x]^{-2}\frac{1}{x}}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{[log\,x]^2}{\frac{1}{x}+x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{2(logx)\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}+1}=4\lim_{x\to+\infty}\frac{log\,x}{-\frac{1}{x}+x}$$

$$=4\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}=0$$

h) Sea $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}\Leftrightarrow log\,y=tg\,x\,log\left(\frac{1}{x}\right)=-tg\,x\,log\,x$

$\lim\limits_{x\to 0^+}log\,y=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{log\,x}{cotg\,x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-cosec^2\,x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{sen^2\,x}{x}=0$

así $log(\lim\limits_{x\to 0^+}y)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\,x}=1$

i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{log\,x}-\dfrac{x}{log\,x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{log\,x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{\frac{1}{x}}=-1$

j) Sea $y=x^{\frac{1}{log(e^x-1)}}\Leftrightarrow log\,y=\frac{1}{log\,(e^x-1)}\,log\,x$ de aquí

$$\lim_{x\to 0}log\,y=\lim_{x\to 0}\frac{log\,x}{log\,(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x-1}\cdot e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{e^x}=1$$

así $log(\lim\limits_{x\to 0}y)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}y=e$

5. Determine las constantes a y b de manera que

$$\lim_{x\to 0}(x^{-3}sen3x+x^{-2}a+b)=0$$

Solución.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen3x+ax+bx^3}{x^3}=0$$

aplicando L'Hôpital tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3cos3x+a+3bx^2}{3x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow 3cos\,3\cdot 0+a=0\Leftrightarrow a=-3$$

así $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3cos3x-3+3bx^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-9sen3x+6bx}{6x}=\dfrac{0}{0}$ luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{-27cos3x+6b}{6}=0\Leftrightarrow -27+6b=0\Leftrightarrow b=\frac{9}{2}$$

6. Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{t^2}dt$$

Solución.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{t^2}dt=\lim_{x\to 0}\frac{x\displaystyle\int_0^x e^{t^2}}{1-e^{x^2}}\,dt$$

Notemos que es de la forma $\frac{0}{0}$, luego por L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt+xe^{x^2}}{-e^{x^2}2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{-2(e^{x^2}+2x^2e^{x^2})}=-\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{1+2x^2}=-1$$

7. Determinar las constantes a y b de manera que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-senx}\int_0^x \frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}=1$$

Solución.

Aplicando L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}}{bx-senx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-cosx},$$

si $b\neq 1\Rightarrow L=0$ lo que no puede ser, así que $b=1$, luego

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(1-cosx)\sqrt{a+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{senx\sqrt{a+x}+(1-cosx)\frac{1}{2\sqrt{a+x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x\sqrt{a+x}}{2(a+x)senx+1-cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{a+x}+\frac{4x}{2\sqrt{a+x}}}{2senx+2(a+x)cosx+senx}=1$$

$I=\frac{4\sqrt{a}}{2a}=1\Rightarrow a=4;$

Nótese que de (1) amplificando por $1+cosx$, se llega a $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{sen^2x}\frac{1+cosx}{\sqrt{a+x}}=\frac{2}{\sqrt{a}}=1\Leftrightarrow a=4$, es decir, es más inmediato.

8. Calcular los siguientes límites :

a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\displaystyle\int_0^x (Arctg\ t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x sen\,x-x-x^2}{x^2+xlog\,(1-x)}$

Solución.

a) Se puede aplicar L'Hôpital, así:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\displaystyle\int_0^x (Arctg\ t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(Arctg\ x)^2}{\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}(Arctg\ x)^2}{x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}(Arctg\ x)^2=\frac{\pi^2}{4}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x senx - x - x^2}{x^2 + xlog\,(1-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x senx + e^x cosx - 1 - 2x}{2x + log\,(1-x) - \frac{x}{1-x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^x cos\,x - 2}{2 - \frac{1}{1-x} - \frac{1-x+x}{(1-x)^2}} = 2\lim_{x\to 0}\frac{e^x cos\,x - e^x sen\,x}{-(1-x)^{-2} - 2(1-x)^{-3}} = -\frac{2}{3}$$

9. Un peso está suspendido por una cuerda y se le causa una vibración mediante una fuerza sinusoidal, su desplazamiento $f(t)$ en el tiempo t viene dado por

$$f(t) = \frac{A}{c^2 - k^2}(sen\,kt - sen\,ct)$$

donde A, c y k son constantes positivas, $c \neq k$.
Determinar el valor límite del desplazamiento cuando c tiende a k.

Solución.

De inmediato: $\lim_{c\to k} f(t) = \lim_{c\to k}\frac{A}{c^2 - k^2}(sen\,kt - sen\,ct)$
aplicando L'Hôpital, derivando respecto de c, se tiene

$$= A\lim_{c\to k}\frac{-t\,cos\,ct}{2c} = -\frac{At\,cos\,kt}{2k}$$

10. Calcular

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left[\left(\frac{1}{x}+1\right)log(1+x) - 1\right]$$

Solución.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left[\left(\frac{1}{x}+1\right)log(1+x) - 1\right]}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}log(1+x) + \left(\frac{1}{x}+1\right)\frac{1}{1+x}}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-log(1+x) + x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{1+x}+1}{2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Nota: Compare parte del problema resuelto de 9.6.-N° 9.

9.3. Problemas Propuestos

1. Aplicando el teorema del valor medio, demostrar:

   a) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ para $-1 < x < 0$ y para $x > 0$

   b) $x < Arcsen\,x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ 0 < x < 1$

c) $tg\,x > x,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

2. Demostrar que $|f(x) - f(x_1)| \leq |x - x_1|$, donde x_1 es un real cualquiera, cuando

   a) $f(x) = sen\,x$ b)$f(x) = cos\,x$

3. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{log(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{a^{log(x)}-x}{logx}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,x - x}{x - sen,x}$ d)$\lim\limits_{x\to 0} Arc\,sen\dfrac{x-a}{a}cotg(x-a)$

   e)$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-4sen^2\left(\frac{\pi x}{6}\right)}{1-x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+2x+sen\,2x}{(2x+sen\,2x)e^{sen\,x}}$

   g) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(cosh\dfrac{a}{x} - 1\right)$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x - x^2 log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

   i) $\lim\limits_{x\to 0^+}[log(cotg\,x)]^{tg\,x}$ j)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)$

   k)$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - sen\,x}{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}$ l)$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x + 2sen\frac{x}{2} - 16sen\frac{x}{4}}{sen^5 x}$

   m)$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{log\,x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$ n)$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{sen\,x}}{x^3}$

   o)$\lim\limits_{x\to 0}(cos\,2x)^{n/x^2}$

   Respuesta.

   a) $\frac{4}{7}$ b) $log\,a - 1$ c)2 d) $\frac{1}{a}$

   e)$\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$ f) no existe g) $\frac{a^2}{2}$ h)$\frac{1}{2}$

   i)1 j)$e^{-\frac{1}{30}}$ k) 1 l)$\frac{1}{2560}$

   m) $\frac{1}{2}$ n)$\frac{loga}{6}$ o)e^{-2n}

4. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x^3}\frac{1}{2}e^{t^2}\sqrt{1+t^2}dt}{sen\,x-x^2-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x} sen\sqrt{t}dt}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_1^{x^2}(x^2+e^{-sen\,t})dt}{log(1+x^2)-x^2sen\,x}$

Respuesta.

a) 0 b)$\frac{2}{3}$ c) 1

5. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+tg\,2x}{x-tg\,2x}$ b) $\lim\limits_{x\to \pi^+}\dfrac{sen\,x}{\sqrt{x-\pi}}$

c)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{log(1+sen\,x)-log(1+x)}{x-tg\,x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-cotg\,x\right)$

e)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2log(1+x)}{x\,sen\,x}$ f)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-Arctg\,x}{x^2log(1+x)}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x sen\,x-x-x^2}{x^2+x\,log(1-x)}$ h)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senh\,x-sen\,x}{x^3}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{log\,x}}$

Respuesta.

a) -3 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d)$\frac{1}{2}$ e) 2 f) $\frac{1}{3}$ g) $-\frac{2}{3}$ h) $\frac{1}{3}$ i) e

6. Hallar c de modo que

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=4$$

Respuesta.

$log(2)$

7. La corriente $I(t)$ que circula en un cierto circuito eléctrico en el tiempo t viene dada por: $I(t) = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$, en donde E, R, L son números positivos. Determinar el valor límite de $I(t)$ cuando $R \to 0^+$.

   Respuesta.

   tE/L.

8. Sean $g(x) = xe^{z^2} \wedge f(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)\left(t + \frac{1}{t}\right) dt$. Calcular el límite de $f''(x)/g''(x)$ cuando $x \to +\infty$.

   Respuesta.

   $\frac{1}{2}$

9. Sean $g(x) = x^c e^{2x} \wedge f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{2t}(3t^2+1)^{1/2} dt$. Para un cierto valor de c, el límite de $f'(x)/g'(x)$ cuando $x \to +\infty$ es finito y no nulo. Determinar c y calcular el límite.

   Respuesta.

   $c = 1$; $\text{lím} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

10. Para un cierto valor de c, el límite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x^5 + 7x^4 + 2)^c - x$ es finito y no nulo. Determinar c y calcular el valor del límite.

    Respuesta.

    $c = \frac{1}{5}$; $\text{lím} = \frac{7}{5}$

9.4. Monotonía, Valores Extremos, Concavidad e Inflexiones de una Función

9.4.1. Monotonía

Función Creciente.

Si la función $f(x)$ derivable en (a, b), entonces: $f(x)$ creciente en $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$

Función Decreciente

Si la función $f(x)$ derivable en $[a,b]$, entonces: $f(x)$ es decreciente en $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$.

Nota: La desigualdad estricta se cumple cuando $f(x)$ es estríctamente creciente o decreciente.

9.4.2. Valores Extremos

Máximo-Mínimo

Una función $f(x)$ tiene un máximo (mínimo) absoluto en el punto x_0, si y sólo si

$$f(x) \leq f(x_0);\ (f(x) \geq f(x_0))$$

en tal caso $f(x_0)$ se llama máximo (mínimo) absoluto de f.

Máximo-Mínimo Relativos.

Diremos que $f(x)$ tiene un máximo o mínimo **relativo** en x_0 si $f(x)$ tiene un máx.(mín.) **absoluto** en x_0, en algún entorno de x_0.

Necesidad para la Existencia de Valores Extremos.

Sea f definida en $[a,b]$ y sea f derivable en $[a,b]$, excepto tal vez en un número finito de puntos de $[a,b]$. Entonces si $f(x)$ es un máximo relativo, x debe satisfacer una de las siguientes condiciones:

1. $f'(x) = 0$
2. $f'(x)$ no existe en x
3. x es un punto extremo de $[a,b]$

Esta afirmación **no** dice que puntos dan extremos relativos, pero si da todos los **candidatos** a extremos relativos.

Suficiencia para la Existencia de Valores Extremos.

A. Criterio de la primera derivada.

Sea f continua en $[a,b]$ al cual pertenece el punto crítico x_1, y es derivable en todos los puntos del mismo (a excepción, quizá del mismo punto x_1). Si:

a)

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \quad \forall x < x_1 \\ f'(x) < 0 \quad \forall x > x_1 \end{array}\right\} \quad \underset{x_1}{\underline{+ \quad \bullet \quad -}}\, f'$$

la función tiene un **máximo** en el punto x_1, cuyo valor es $f(x_1)$.

b)

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \quad \forall x < x_1 \\ \\ f'(x) > 0 \quad \forall x > x_1 \end{array}\right\} \quad \underset{x_1}{\overline{- \quad \bullet \quad +}}\, f'$$

la función tiene un **mínimo** en el punto x_1, cuyo valor es $f(x_1)$.

B. Criterio de la Segunda Derivada.

Si $f'(x) = 0$, entonces en $x = x_1$ la función tiene: un máximo relativo si $f''(x_1) < 0$ y un mínimo relativo si $f''(x_1) > 0$.

9.4.3. Concavidad e Inflexiones

Si $f'(x)$ es creciente (decreciente) en $[a, b]$, entonces f es cóncava hacia arriba $\smile$ (cóncava hacia abajo $\frown$) en este intervalo, es decir, podemos afirmar también que:

Si $f''(x) > 0(f''(x) < 0)\forall x \in [a, b]$, entonces f es cóncava hacia arriba (cóncava hacia abajo).

Punto de Inflexión.

El punto en que una curva continua, separa la parte cóncava hacia arriba de la cóncava hacia abajo, se llama punto de inflexión. Si $f''(x) = 0$ ó $f''(x_0)$ no existe y $f''(x)$ *cambia de signo al pasar por* x_0, entonces en el punto x_0, hay un punto de inflexión siempre que $x_0 \in Dom f$.

$$\left(\underset{x_0}{\overline{- \quad \bullet \quad +}}\, f''\, \underset{x_0}{\overline{+ \quad \bullet \quad -}} \right)$$

Optimización de Problemas Aplicados

1. Tratar de expresar la cantidad que se va a maximizar o minimizar como función de alguna variable que se presente en el problema, como por ejemplo: una distancia, un tiempo, un ángulo, $\cdots$ etc.

2. Si en un principio necesita dos variables, digamos x e y, para expresar la cantidad a optimizar, hallar una segunda relación entre x e y, y usarla para eliminar una de las variables.

3. Determine que valores de la variable son admisibles en el problema. En otras palabras hallar el conjunto de valores sobre el cual se considera la función en cuestión.

4. Encuentre los puntos donde la primera derivada se anula, no existe, o en los extremos del intervalo considerado.

5. Descarte los puntos que no pertenecen al intervalo considerado y estudie el resto según las necesidades del problema en cuestión.

9.5. Estudio de Funciones y sus Gráficos

Para este estudio bastará seguir el siguiente resumen que vamos a adoptar como modelo, para cada función. (En realidad completaremos lo que hemos estado haciendo desde el principio en estos apuntes).

1. Estudio del dominio de f
2. Raíces y signos de f.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonía y valores extremos de f.
6. Concavidades e inflexiones.
7. Gráfico de f.

9.6. Problemas Resueltos

1. Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$y = 2sen\, x + cos\, 2x$$

Solución.

1. $y' = 2cos\, x - 2sen\, 2x = (2cos\, x)(1 - 2senx)$
2. $y' = 0 \Rightarrow 2cos\, x(1 - 2sen\, x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6};\ x_2 = \frac{\pi}{2};\ x_3 = \frac{5\pi}{6};\ x_4 = \frac{3\pi}{2}$

   Observación: Puesto que la función es períodica y tiene un período 2π, será suficiente estudiarla en el intervalo $[0, 2\pi]$.
3. $y'' = -2sen\, x - 4cos\, 2x$.
4. Analicemos ahora la naturaleza de cada punto crítico:

   $y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3 < 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$ tenemos un máximo de valor
   $y = \frac{3}{2}$, análogamente.

   $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2}$ tenemos un mínimo de valor
   $y = 1$, y además $x_3 = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow$ máximo, de valor
   $y = \frac{3}{2}$; $x_4 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$mínimo, de valor $y = -3$.

2. Encuentre los máximos y mínimos de la función

$$y = 4\alpha\, cos\, x - \beta\, cos\, 2x; \quad (\alpha, \beta > 0)$$

Solución.

Como la función es períodica, bastará con estudiarla en $[0, 2\pi]$
$y' = -4\alpha\, sen\; x + 2\beta\, sen\, 2x \Leftrightarrow y'' = -4\alpha\, cos\, x + 4\beta\, cos\, 2x$

$y' = 0 \Rightarrow 4sen\, x(-\alpha + \beta cos\, x) = 0 \Rightarrow sen\, x = 0 \,\underline{\vee} - \alpha + \beta\, cos\, x = 0$

a) $sen\, x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$

$$y''(0) = 4(\beta - \alpha) \Rightarrow \begin{cases} \beta > \alpha \ \Rightarrow \ \text{hay un mínimo} \\ \\ \beta < \alpha \ \Rightarrow \ \text{hay un máximo} \end{cases}$$

si $\alpha = \beta \Rightarrow \dfrac{+ \quad \bullet \quad -}{0} y'$ hay un máximo

$y''(\pi) = 4(\alpha + \beta) > 0 \Rightarrow$ hay un mínimo

$y''(2\pi) = y''(0)$, mismas conclusiones.

b) $cos\, x = \frac{\alpha}{\beta} \begin{cases} \text{si } \alpha = \beta \ \Leftrightarrow x = 0 \,\underline{\vee}\, x = 2\pi \text{ puntos ya estudiados} \\ \\ \text{si } \alpha > \beta \text{ no hay solución} \end{cases}$

ahora, si $\alpha < \beta$, entonces existen 2 puntos críticos, sean estos $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$, tal que $cos\, x_1 = cos\, x_2$

$$y''(x_1) = -4\alpha cos\, x_1 + 4\beta cos\, 2x_1 = 4(-\alpha cos\, x_1 + 2\beta cos^2\, x_1 - \beta)$$

$$y''(x_1) = 4\left(-\alpha\tfrac{\alpha}{\beta} + 2\beta\tfrac{\alpha^2}{\beta^2} - \beta\right)$$
$$= \tfrac{4}{\beta}(\alpha^2 - \beta^2) < 0, \text{ luego}$$

$$y''(x_1) = y''(x_2) < 0 \Rightarrow \text{hay un máx en } x_1, x_2$$

3. Determinar los máximos y mínimos de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$

b) $y = x^x \ (x > 0)$

c) $f(x) = 2cos\, x - x$ en $[0, 2\pi]$

Solución.

a)
$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ así esquemáticamente
$f' \; \underset{\text{crece} \quad -1 \quad \text{decrece} \quad 1 \quad \text{crece}}{\overline{\quad + \quad \bullet \quad - \quad \bullet \quad + \quad}}$, en $x = -1$ hay un máx. que vale $f(-1) = -1$ en $x = 1$ hay un mín. que vale $f(1) = 3$

b)
$y = x^x \Leftrightarrow log\, y = x\, log\, x \Leftrightarrow y' = x^x(log\, x + 1); x > 0$

$y'' = x^x(logx + 1)^2 + \frac{1}{x}x^x = x^x(log\, x + 1)^2 + x^{x-1}$, ahora

de $y' = 0$ y como $x^x \neq 0 \Rightarrow log\, x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

y evaluando $y''(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}-1} > 0$, luego en $x = \frac{1}{e}$

hay un mínimo cuyo valor es $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$.

c)
$f'(x) = -2sen\, x - 1;\; f''(x) = -2cos\, x;$

$f'(x) = 0 \Rightarrow sen\, x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{6}\; x_2 = \frac{11\pi}{6}$

$f''\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1{,}732 > 0$ así en $x_1 = \frac{7\pi}{6}$ hay un mín. cuyo valor es:
$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\left(\sqrt{3} + \frac{7\pi}{6}\right)$.
$f''\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -1{,}732 < 0$ en $x_2 = \frac{11\pi}{6}$ hay un máx. cuyo valor es:
$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \frac{11\pi}{6}$.

4. Determinar los intervalos de concavidad de:

a) $y = 2 - x^2$ b) $y = e^x$ c)$y = x^3$ d)$y = \frac{1}{x^2-1}$

Solución.

a) $y'' = -2 \Rightarrow y'' \underline{\quad \frown \quad}$

b) $y'' = e^x > 0\; \forall x \Rightarrow y'' \underline{\quad \smile \quad}$

c) $y'' = 6x \Rightarrow y'' \; \underset{\frown \quad 0 \quad \smile}{\overline{\; - \quad \bullet \quad + \;}}$

d) $y'' = 2\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3} \Rightarrow y''\begin{array}{ccccc} + & \circ & - & \circ & + \\ \hline \smile & -1 & \frown & 1 & \smile \end{array}$

5. Determine los intervalos de concavidad y puntos de inflexión de las curvas

   a) $y = e^{-x^2}$ (curva de Gauss)

   b) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

   c) $y = x sen\,(log\, x) \quad (x > 0)$

Solución.

a) $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2-1) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Así $y''\begin{array}{ccccc} + & \bullet & - & \bullet & + \\ \hline \smile & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frown & \frac{1}{\sqrt{2}} & \smile \end{array}$ x_1 y x_2 son puntos de inflexión ya que y'' al pasar por estos cambia su signo y ambos pertenecen al dominio de y.

b) En el problema 4(d), se indican las concavidades y nótese que ± 1 no son puntos de inflexión ya que aunque hay cambio de concavidad, ± 1 no pertenecen al dominio de y.

c)

$$y' = sen(log\, x) + x cos(log\ x) \cdot \tfrac{1}{x} = sen(log\, x) + cos(log\, x)$$

$$y'' = cos(log\, x)\tfrac{1}{x} - sen(log\, x)\tfrac{1}{x} = \tfrac{1}{x}(cos(log\ x) - sen(log\, x))$$

$y'' = \frac{\sqrt{2}}{x} sen\left(\frac{\pi}{4} - log\, x\right)$; donde $y'' = 0$ para $x_k = e^{\frac{\pi}{4}+k\pi}$ $k \in Z$,
no se considera $x = 0$ ya que $x > 0$. Nótese que y'' cambia de signo al pasar por cada x_k, por lo tanto, los x_k son las abscisas de los puntos de inflexión.
En los intervalos $(e^{2k\pi-\frac{3\pi}{4}},\ e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}})$ es cóncava hacia arriba $\smile$
En los intervalos $(e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}},\ e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}})$ es cóncava hacia abajo $\frown$

6. Halle el máximo global de $f(x) = 1 + 12|x| - 3x^2$ en $[-1, 4]$. Esboze su gráfica.

Solución. f es derivable sobre $\mathbb{R} - \{0\}$, porque $|x|$ no es derivable en $x = 0$. Esto muestra que 0 es punto crítico. También -1; 4 son puntos críticos porque son puntos extremos.

Como $f'(x) = 12 - 6x$ si $x > 0 \wedge f'(x) = -12 - 6x$ si $x < 0$, tenemos que $x = \pm 2$. El conjunto de puntos críticos es $\{0, -1, 4, 2\}$ se descarta -2 porque no pertenece al dominio, además, f es continua en el intervalo $[-1, 4]$.

De $f(0) = 1; f(-1) = 10;\ f(4) = 1 \wedge f(2) = 13$ se tiene máximo de $f = 13$ y mínimo de $f = 1$. Obsérvese que el máximo se produjo en un punto estacionario y el mínimo en un punto extremo no derivable.

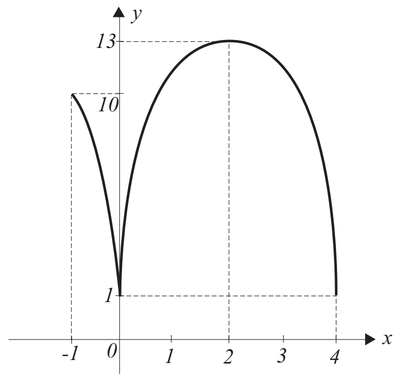

Figura 9.1: $f(x) = 1 + 12|x| - 3x^2$

7. Estudiar las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < 3 \\ 8 - x & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$

c) $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$ d) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

Solución.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

1) Dom $f = \mathbb{R}$
2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 0{,}10375)(x^2 - 6{,}104x + 9{,}6332) = 0$
$x_1 = -0{,}10375$ (raíz que se puede obtener por Newton, o cualquier otro método de aproximación), ahora como $\triangle < 0$, la ecuación cuadrática no aporta más raíces así: $f \; \dfrac{- \quad \bullet \quad +}{-0{,}10375}$
3) No tiene simetrías con los ejes coordenados.
4) No tiene asíntotas (función polinómica).
5) $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x = 1;\ x = 3$ así:
$f' \; \dfrac{+ \quad \bullet \quad - \quad \bullet \quad +}{\text{crece} \quad 1 \quad \text{decrece} \quad 3 \quad \text{crece}}$ de aquí en $x = 1$ hay un máximo, $f(1) = 5$, en $x = 3$ hay un mínimo $f(3) = 1$
6) $f''(x) = 3(2x - 4) = 0 \Rightarrow x = 2$ así: $f'' \; \dfrac{- \quad \bullet \quad +}{\frown \quad 2 \quad \smile}$ y en $x = 2$ hay un punto de inflexión, $f(2) = 3$.

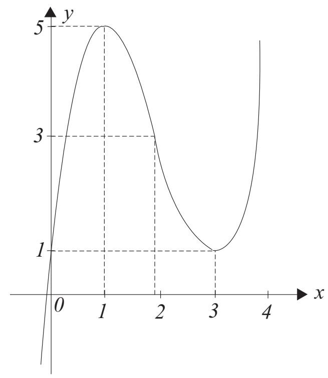

Figura 9.2: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < 3 \\ \\ 8 - x & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$

Si $x < 3$ $f(x)$ es una función parabólica, así que resumiendo

$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad f' \begin{array}{cccc} - & \bullet & + & \\ \hline \text{decrece} & 0 & \text{crece} & 3 \end{array}$ hay un mínimo en

$x = 0;\ f(0) = -4.$

$f''(x) = 2 \Rightarrow$ siempre cóncava hacia arriba, no hay puntos de inflexión.

Para $x > 3$, una línea recta su gráfico es inmediato. Para $x = 3, f(3) = 5$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - 4) = 5$, luego la función es continua en $x = 3$. Para $x > 3$ $f(x)$ decrece.

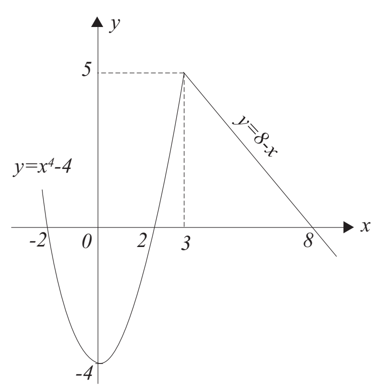

Figura 9.3: $f(x) = x^2 - 4$ si $x < 3$ y $f(x) = 8 - x$ si $x \geq 3$

c) $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

1) $Dom\, f = (-\infty, \infty)$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^{1/3}(x + 4) = 0 \Rightarrow \quad f \begin{array}{ccccc} + & \bullet & - & \bullet & + \\ \hline & -4 & & 0 & \end{array}.$

3) No hay simetrías.

4) No hay asíntotas.

5) $f'(x) = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \Rightarrow$
$f' \; \dfrac{- \quad \bullet \quad + \quad \bullet \quad +}{\text{decrece} \;\; -1 \;\; \text{crece} \;\; 0 \;\; \text{crece}}$, por lo tanto,
hay un mín. en $x = -1$; $f(-1) = -3$.

6) $f''(x) = \frac{4}{9}x^{-5/3}(x-2)$ debemos analizar los ceros de f'' y donde no existe, es decir $f'' \; \dfrac{+ \quad \circ \quad - \quad \bullet \quad +}{\smile \quad 0 \quad \frown \quad 2 \quad \smile}$ luego hay inflexiones en 0 y en 2; $f(0) = 0$; $f(2) \cong 7{,}56$

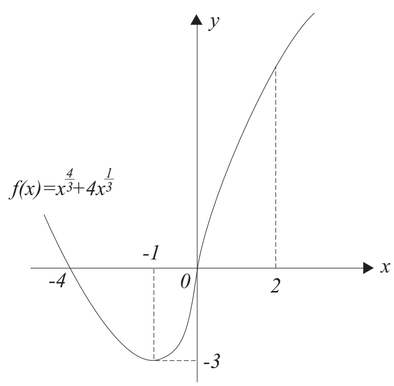

Figura 9.4: $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

d) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

1) $Dom\, f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

2) $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

3) No tiene simetrías.

4) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow x = 0$ asíntota vertical
$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} \right) = 0 \Rightarrow n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} \right) = 1$ así $y = 1$ asíntota horizontal, intersección de ésta con la curva $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = -1$.

5) $f'(x) = -\frac{x+2}{x^3}$ puntos críticos -2 y 0 así:
$f' \; \dfrac{- \quad \bullet \quad + \quad \circ \quad -}{\text{decrece} \;\; -2 \;\; \text{crece} \;\; 0 \;\; \text{decrece}}$ sólo en $x = -2$ hay un mín. ,

$f(-2) = \frac{3}{4}$. $x = 0$ no pertenece al Dominio de f.

6) $f''(x) = \frac{2(x+3)}{x^4}$ punto crítico - 3 así: f'' $\underset{\frown \quad -3 \quad \smile}{\overline{- \quad \bullet \quad +}}$ y hay un punto de inflexión en $x = -3$, $f(-3) = \frac{7}{9}$.

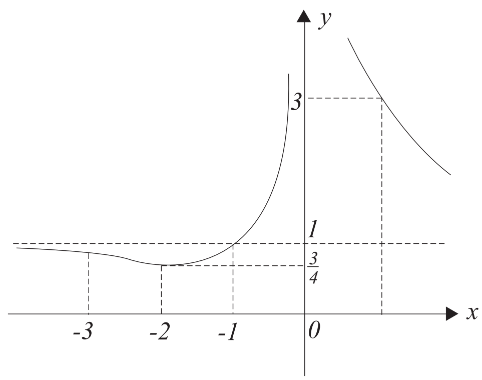

Figura 9.5: $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

8. Para $x > 0$. Qué es mayor e^x o x^e?

   Solución. Sean $f(x) = e^x \wedge g(x) = x^e$ luego $log(f(x)) = x \wedge log(g(x)) = e\ log(x)$. Consideremos la función: $h(x) = x - e\ log(x) \Rightarrow h'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}$ como $x > 0$ solo es crítico $x = e$ así: h' $\underset{e}{\overline{- \quad \bullet \quad +}}$, luego en $x = e$ hay un mínimo, luego $\forall x > 0 : h(e) < h(x)$ de donde $h(x) = x - e\,log\,x > e - e\,log\,e = 0 \Leftrightarrow x > e\,log\,x \Leftrightarrow e^x > x^e$.

9. Para $x \geq 1$, demostrar que:

$$log\left(\frac{4}{e}\right) \leq log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} - x < \frac{1}{2}$$

   Demostración.

   Sea $f(x) = log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} - x = x\left[(x+1)log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right]$

   $f'(x) = (2x+1)log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2$

   $f'' = 2log(x+1) - 2logx - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ y $f'''(x) = \frac{1}{x^2(x+1)^2} > 0 \quad (x \geq 1)$

luego $f''(x)$ es siempre creciente.
Además $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[2log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{2x+1}{x(x+1)}\right] = 0,$
luego $f''(x) < 0$ esto implica que $f'(x)$ es siempre decreciente $\forall x \geq 1$ además: $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[(2x+1)log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - 2\right]$, haciendo el cambio x por $\frac{1}{t}$, $x \to \infty \Rightarrow t \to 0$ resulta:

$= \lim\limits_{t\to+0}\left\{\left(\dfrac{2}{t}+1\right)log(1+t) - 2\right\}$; pero: $1 - t < \frac{1}{1+t} < 1,\ t > 0$ de donde integrando: $t - \frac{t^2}{2} < log(1+t) < t$ multiplicando por $\left(\frac{2}{t}+1\right)$ queda $2 - t + t - \frac{t^2}{2} < \left(\frac{2}{t}+1\right)log(1+t) < 2 + t \Rightarrow -\frac{t^2}{2} < \left(\frac{2}{t}+1\right)log(1+t) - 2 < t$ por sandwich se tiene $\lim\limits_{t\to+0}\left\{\left(\dfrac{2}{t}+1\right)log(1+t) - 2\right\} = 0$ luego $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ esto conduce a que $f'(x) > 0, \forall x \geq 1$ entonces $f(x)$ es creciente por lo tanto $*f(1) \leq f(x) \leq \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to+0}\dfrac{1}{t}\left\{\left(\dfrac{1}{t}+1\right)log(1+t) - 1\right\}$, pero: $1 - t < \frac{1}{1+t} < 1 - t + t^2 \Rightarrow t - \frac{t^2}{2} < log(1+t) < t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$ multiplicando por $\left(\frac{1}{t}+1\right)$ queda $1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} < \left(\frac{1}{t}+1\right)log(1+t) < 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{3} \Rightarrow \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} < \left(\frac{1}{t}+1\right)log(1+t) - 1 < \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{t}{2} < \frac{1}{t}\left\{\left(\frac{1}{t}+1\right)log(1+) - 1\right\} < \frac{1}{2} - \frac{t}{6} + \frac{t^2}{3} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ y como $f(1) = 2log(2) - 1 = log\left(\frac{4}{e}\right)$, reemplazando en $*$ finalmente resulta:

$$log\left(\frac{4}{e}\right) < log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2+x} - x < \frac{1}{2}$$

10. Para n entero positivo. ¿Qué es mayor

$$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}} \quad \text{ó} \quad (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}?$$

Solución.

Aplicando logaritmos: $\sqrt{n+1}\, log\sqrt{n} \gtrless \sqrt{n}\, log\sqrt{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n+1}\, logn \gtrless \sqrt{n}\, log(n+1) \Leftrightarrow \frac{logn}{\sqrt{n}} \gtrless \frac{log(n+1)}{\sqrt{n+1}}$.

Sea $f(x) = \frac{logx}{\sqrt{x}}$, $f(x+1) = \frac{log(x+1)}{\sqrt{x+1}}$ recordemos si f es estríctamente creciente entonces $f(x) < f(x+1)$ y si f es estríctamente decreciente $f(x) > f(x+1)$

$f'(x) = \frac{1-\frac{1}{2}logx}{x^{3/2}}$; para $0 < x < e^2 \Rightarrow logx < 2 \Rightarrow f'(x) > 0$ luego f es estríctamente decreciente $x < e^2 \Rightarrow n \leq 7 \Rightarrow f(x) < f(x+1) \Leftrightarrow \frac{logx}{\sqrt{x}} < \frac{log(x+1)}{\sqrt{x+1}}$ luego $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}} < (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ y para $x > e^2 \Rightarrow n \geq 8 \Rightarrow f(x) > f(x+1) \Leftrightarrow \frac{logx}{\sqrt{x}} > \frac{log(x+1)}{\sqrt{x+1}}$ luego $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}} > (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$

11. Demostrar que para $0 < n < 1$ y a y b positivos cualquiera, se cumple $(a+b)^n \leq a^n + b^n$.

Demostración.

$(a+b)^n \leq a^n + b^n \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+1\right)^n \leq \left(\frac{a}{b}\right)^n + 1$ sea $x = \frac{a}{b} \Rightarrow (x+1)^n \leq x^n + 1$, por demostrar que se cumple esta desigualdad para cualquier x positivo.

Sea la función $f(x) = 1 + x^n - (1+x)^n$; con $x > 0$

$f'(x) = n\left[\frac{1}{x^{1-n}} - \frac{1}{(1+x)^{1-n}}\right] > 0$ ya que $1-n \geq 0$ y $x > 0$ luego $f(x)$ es estríctamente creciente en $[0, \infty]$, es decir $f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + x^n - (1+x)^n > 0 \Leftrightarrow (1+x)^n < 1 + x^n$ nótese que si $n = \frac{1}{r} \Rightarrow \sqrt[r]{a+b} \leq \sqrt[r]{a} + \sqrt[r]{b},\ r \geq 1.$

12. Demostrar que: $a^b + b^a > 1$ para todo $a > 0$, $b > 0$.

Demostración.

Nótese que si $a \geq 1$ y $b \geq 1$ la desigualdad es trivial sea entonces, $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$ y poniendo $a = 1 - \alpha$ con $0 < \alpha < 1 \wedge b = 1 - \beta$ con $0 < \beta < 1$, luego

$$(1-\alpha)^{1-\beta} + (1-\beta)^{1-\alpha} > 1 \Rightarrow \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^\beta} + \frac{1-\beta}{(1-\beta)^\alpha} > 1 \qquad (*)$$

Sea $f(u) = (1-u)^r$, $f'(u) = -r(1-u)^{r-1} = \frac{r(1-u)}{(1-u)^r}$, aplicando el Teorema del valor medio para $0 < \xi > \alpha$ y haciendo $r = \beta$ se tiene $f'(\xi) = \frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0} = \frac{(1-\alpha)^\beta - 1}{\alpha} \Rightarrow$ $-\beta(1-\xi)^{\beta-1} = \frac{(1-\alpha)^\beta-1}{\alpha} \Rightarrow (1-\alpha)^\beta = 1 - \frac{\alpha\beta}{(1-\xi)^{1-\beta}} \leq 1 - \alpha\beta$; análogamente podemos obtener que $(1-\beta)^\alpha \leq 1 - \alpha\beta$; luego en $(*)$ queda:

$\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^\beta} + \frac{1-\beta}{(1-\beta)^\alpha} \geq \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta} + \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} = \frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta} = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{1-\alpha\beta} + 1 > 1$ así: $a^b + b^a > 1$.

13. Estudiar y hacer el gráfico de las siguientes funciones

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x - 2$ b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$

c) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$ d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = sen x + 2 sen \dfrac{x}{2}$

Solución.

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-2$

1) Función polinómica así que Dom $f=\mathbb{R}$
2) $f(x)=0\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{1}{2}x^2+x+2\right)=0\Leftrightarrow x=1$, así: f $\begin{array}{ccc} - & \bullet & + \\ \hline & 1 & \end{array}$
3) No tiene simetrías.
4) No tiene asíntotas, además, observe que

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\to+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)\to-\infty$$

5) $f'(x)=\frac{3}{2}x^2+x+1>0\ \forall x$ ya que $\triangle<0$, luego f es siempre creciente.
6) $f''(x)=3x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ así: f'' $\begin{array}{ccc} - & \bullet & + \\ \hline \frown & -\frac{1}{3} & \smile \end{array}$ en $x=-\frac{1}{3}$ hay un punto de inflexión cuyo valor es $f\left(-\frac{1}{3}\right)\cong-2{,}29$

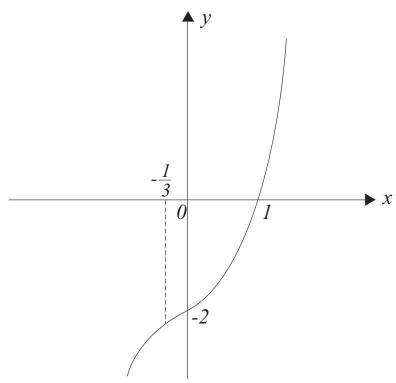

Figura 9.6: $f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-2$

b) $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$

1) Dom $f=\mathbb{R}$ ya que el denominador no tiene ceros $(\triangle<0)$
2) $f(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-7x+5=0\Rightarrow x=2\wedge x=\frac{5}{2}$ así: f $\begin{array}{ccccc} + & \bullet & - & \bullet & + \\ \hline & 2 & & \frac{5}{2} & \end{array}$
3) No tiene simetrías.
4) $m=\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-7x+5}{x(x^2-5x+7)}=0$

   $n=\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}=2$ luego $y=2$ es una asíntota horizontal, además: si $x>3\Rightarrow f(x)>2$ la curva está por encima de la asíntota si $x=3$, $f(x)=2$, la curva corta a la asíntota y si $x<3\Rightarrow f(x)<2$ la curva está por debajo de la asíntota.

5) $f'(x)=\frac{-3(x^2-6x+8)}{(x^2-5x+7)^2}=0\Rightarrow x=2$ y $x=4\Rightarrow$

$f' \quad \dfrac{- \quad \bullet \quad + \quad \bullet \quad -}{\text{decrece} \quad 2 \quad \text{crece} \quad 4 \quad \text{decrece}}$ luego en $x = 2$ hay un mínimo $f(2) = -1$ y en $x = 4$ hay un máximo $f(4) = 3$.

6) $f''(x) = \frac{3(2x^3-18x^2+48x-38)}{(x^2-5x+7)^3} = 0$ resolviendo la ecuación cúbica por cualquier método de aproximación y con ayuda de f', obtenemos las raíces $\cong 1{,}469;\ 2{,}6526;\ 4{,}889$ así: $f'' \ \dfrac{- \quad \bullet \quad + \quad \bullet \quad - \quad \bullet \quad +}{\cap \quad 1,469 \quad \cup \quad 2,65 \quad \cap \quad 4,89 \quad \cup}$
y los tres puntos críticos son punto s de inflexión: $f(1{,}469) \cong -0{,}5334$ $f(2{,}6526) \cong 0{,}6522$ y $f(4{,}889) \cong 2{,}8779$.

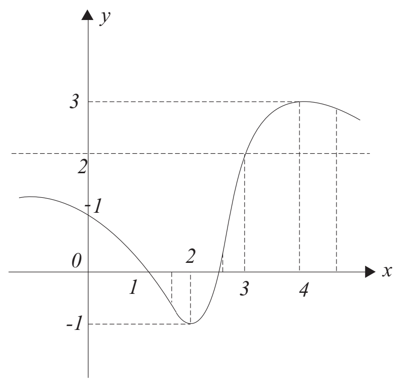

Figura 9.7: $f(x) = \frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$

c) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$

1) Como $4x^2 + 2x + 1 > 0 \Rightarrow Dom f = (-\infty, \infty)$

2) No tiene raíces y $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3) No tiene simetrías.

4) Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} |x|\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}},$$

si $x \to +\infty \Rightarrow m_1 = 2$ y

si $x \to -\infty \Rightarrow m_2 = -2$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{4x^2+2x+1} + 2|x|) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1} + 2|x|}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{\frac{|x|}{x}\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2\frac{|x|}{x}}$$

de aquí si $x \to +\infty \Rightarrow n_1 = \frac{1}{2}$ y si $x \to -\infty \Rightarrow n_2 = -\frac{1}{2}$ así $y = 2x + \frac{1}{2} \wedge y = -2x - \frac{1}{2}$ son asíntotas oblicuas de la curva, además como $f(x) = \sqrt{(2x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$, $f(x) > 2x + \frac{1}{2}$ y $f(x) > -\left(2x+\frac{1}{2}\right)$ y la curva siempre está por encima de la asíntota.

5) $f'(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$ así f' $\begin{array}{ccc} - & \bullet & + \\ \hline \text{decrece} & -\frac{1}{4} & \text{crece} \end{array}$ y en $x = -\frac{1}{4}$ hay un máximo que vale $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6) $f''(x) = \frac{3}{(4x^2+2x+1)^{3/2}} > 0$, luego la curva siempre es cóncava hacia arriba.

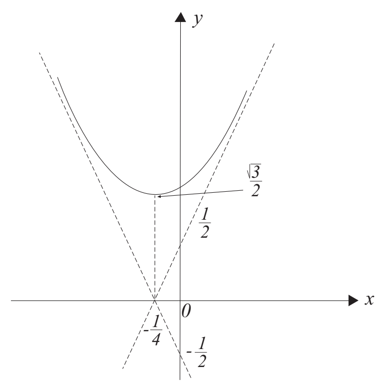

Figura 9.8: $f(x) = \sqrt{4x^2+2x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

1) $Dom\, f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

2) $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ así: f $\begin{array}{ccccccc} - & \circ & + & \bullet & - & \circ & + \\ \hline & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$

3) $f(-x) = -f(x)$, luego es simétrica con el origen de coordenadas.

4) Como $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \vee \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \vee \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ en $x = \pm 1$ hay asíntotas verticales.

Por otra parte:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0,$$

luego $y = x$ es una asíntota, oblicua que intersecta a la curva en el origen.

5) $f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ donde $\pm\sqrt{3}$ puntos críticos

$$f' \quad \begin{array}{ccccc} + & \bullet & - & \bullet & + \\ \hline \text{crece} & -\sqrt{3} & \text{decrece} & \sqrt{3} & \text{crece} \end{array}$$ con un máx. en $x = -\sqrt{3}$;

$f(-\sqrt{3}) \cong -2{,}60$ y un mín. en $x = \sqrt{3}$ que vale $f(\sqrt{3}) \cong 2{,}60$.

6) $f'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ donde $-1, 0$ y 1 son puntos críticos, así:

$$f'' \begin{array}{ccccccc} - & \circ & + & \bullet & - & \circ & + \\ \hline \frown & -1 & \smile & 0 & \frown & 1 & \smile \end{array}$$ solo punto de inflexión en $x = 0$,

$f(0) = 0$.

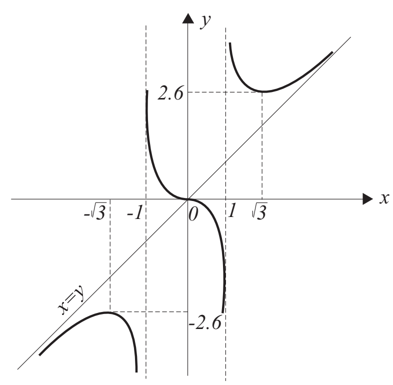

Figura 9.9: $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

e) $f(x) = sen\, x + 2\, sen \frac{x}{2}$

1) $Dom\, f = (-\infty, \infty)$, períodica, con período 4π, lugo estudiaremos solo en $[0, 4\pi]$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\, sen \frac{x}{2} \left(cos \frac{x}{2} + 1 \right)$ $x = 0,\ x = 2\pi;\ x = 4\pi$ así:

$$f \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & + & \bullet & - & \bullet \\ \hline 0 & & 2\pi & & 4\pi \end{array}$$

3) impar ya que $f(-x) = -f(x)$

4) No tiene asíntotas (es oscilante)

5) $f'(x) = cosx + cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2cos^2\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3};\ x = 2\pi;$ $x = \frac{10\pi}{3}$ así:

$$f' \quad \begin{array}{ccccccccc} & + & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & + & \\ \hline 0 & \text{crece} & \frac{2\pi}{3} & \text{decrece} & 2\pi & \text{decrece} & \frac{10\pi}{3} & \text{crece} & 4\pi \end{array}$$

máximo en $x = \frac{2\pi}{3};\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ y mínimo en $x = \frac{10\pi}{3} \Rightarrow f\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

6) $f''(x) = -sen x - \frac{1}{2} sen \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow -sen \frac{x}{2} \left(2 cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 0;$
$x \cong 3{,}6469;\ x = 2\pi; x \cong 8{,}9194;\ x = 4\pi;$ así:

$$f'' \quad \begin{array}{ccccccccccc} + & \bullet & - & \bullet & + & \bullet & - & \bullet & + & \bullet & - \\ \hline & 0 & \frown & 3{,}6469 & \smile & 2\pi & \frown & 8{,}9194 & \smile & 4\pi & \frown \end{array}$$

puntos de inflexión en todos los puntos críticos:
$0 = f(0) = f(2\pi) = f(4\pi);\ f(3{,}6469) \cong 1{,}4524$ y $f(8{,}9194) \cong -1{,}4524.$

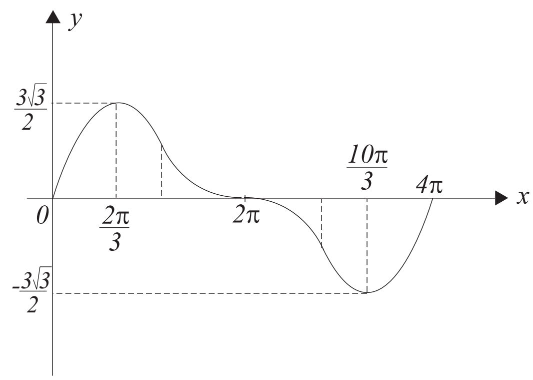

Figura 9.10: $f(x) = sen\, x + 2\, sen \frac{x}{2}$

14. Resolver la ecuación $x + log|x^2 - 1| = 0$

Solución.

Graficaremos las curvas $y = log|x^2 - 1|$ e $y = -x$, en las intersecciones de estos gráficos estan las raíces de la ecuación, así: $f(x) = log|x^2 - 1|$

1) $Dom\, f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$, signos $\Rightarrow f \quad \begin{array}{ccccccccc} + & \bullet & - & \circ & - & \circ & - & \bullet & + \\ \hline & -\sqrt{2} & & -1 & & 1 & & \sqrt{2} & \end{array}$

3) Simétrica con el eje y

4) Asíntotas verticales en $x = \pm 1$ ya que $\lim\limits_{x \to -1^{\pm}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) = -\infty$

5) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ puntos críticos $-1, 0, 1$

$$f' \quad \begin{array}{ccccccc} - & \circ & + & \bullet & - & \circ & + \\ \hline \text{decrece} & -1 & \text{crece} & 0 & \text{decrece} & 1 & \text{crece} \end{array}$$

6) $f''(x) = -\frac{2x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0$ siempre cóncava hacia abajo.

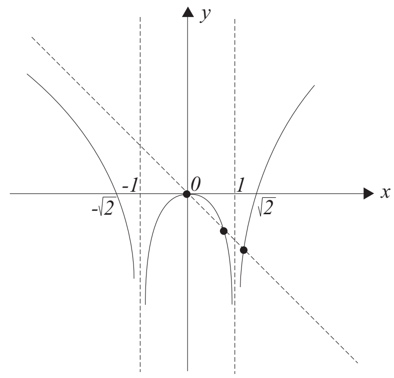

Figura 9.11: $y = -x, y = log|x^2 - 1|$

De donde observando el gráfico, vemos que las raíces se encontrarán en los intervalos $[0,1][1,\sqrt{2}]$. De inmediato $x = 0$ es una de ellas. Aplicando el método de Newton, una aproximación n-ésima de la raíz x_n de la ecuación $H(x) = 0$ está dada por:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{H(x_{n-1})}{H'(x_{n-1})}$$

con un error absoluto ξ dado por:

$|\xi - x_n| = \frac{|H(x_n)|}{m_1}$ donde $m_1 = min\,|H'(x)|$ así sea $H(x) = x + log|x^2 - 1|$ con $x \in (0,1) \Rightarrow H(x) = x + log(1 - x^2)$

$H'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1}$, sea la primera aproximación

$x_0 = 0{,}9 \in (0,1)$

$x_1 = 0{,}9 - \frac{H(0{,}9)}{H'(0{,}9)} = 0{,}9 - \frac{-0{,}7607}{-8{,}4737} = 0{,}8102$

$x_2 = 0{,}8102 - \frac{H(0{,}8102)}{H'(0{,}8102)} = -0{,}8102 - \frac{-0{,}2581}{-3{,}7163} = 0{,}7407$

$x_3 = 0{,}7407 - \frac{H(0{,}7407)}{H'(0{,}7407)} = 0{,}7167,$

y así $x_4 = 0{,}7164$ $x_5 = 0{,}7146 \cdots$ la precisión de la raíz depende exclusivamente de las necesidades del problema.

Procediendo en forma análoga para la raíz que se encuentra en el intervalo $(1,\sqrt{2})$, obtenemos

$x_0 = \sqrt{2}$; $x_1 = 1{,}0448$; $x_2 = 1{,}1013$; $x_3 = 1{,}1406$; $x_4 = 1{,}1476$; $x_5 = 1{,}1478$; $x_6 = 1{,}1478 \cdots$

Así las raíces son: 0, 0,7146 y $1{,}1478 \cdots$

Nota: La solución de ecuaciones trascendentales relativamente simples, hoy en día no son un obstáculo con la ayuda de las calculadoras electrónicas, incluso el método presentado (Newton) se puede programar (si no lo está) o algún otro método más eficiente, incluso aquel que se realiza simplemente mediante iteraciones a gusto del usuario, la precisión de los resultados evidentemente que depende exclusivamente de los fines u/o necesidades del problema.

15. Estudiar las siguientes funciones:

*a) $y = x + log|x^2 - 1|$ b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

*c) $y^3 = 2ax^2 - x^3,\ a > 0$ d) $y = xlog\left(e - \dfrac{1}{x}\right)$

*e) $y = xe^{1/x}$ *f) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

Solución.

a) $y = x + log|x^2 - 1|$

1) $Dom\, y \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$ luego $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

2) $y = 0 \Rightarrow x + log|x^2 - 1| = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}7146$ y $x_3 = 1{,}1478$ (ver problema resuelto N°14), así

$$f \quad \begin{array}{ccccccccccc} - & \circ & - & \bullet & + & \bullet & - & \circ & - & \bullet & + \\ \hline & -1 & & 0 & & x_2 & & 1 & & x_3 & \end{array}$$

3) No tiene simetrías.

4) $\lim\limits_{x \to -1^{\pm}} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) = -\infty$; $x = \pm 1$ asíntotas verticales.

Para $|x| > 1$, $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x + log(x^2 - 1)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1 + \frac{2x}{x^2-1}}{1} = 1$

$n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [x + log(x^2 - 1) - x] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} log(x^2 - 1) = +\infty$ no tiene asíntotas oblicuas.

5) Si $|x| > 1 \Rightarrow y = x + log(x^2 - 1) \Leftrightarrow y' = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1}$ puntos críticos $-1 \pm \sqrt{2}, -1, 1$ así:

$$f' \quad \begin{array}{ccccccccccc} + & \bullet & - & \overleftarrow{\circ} & + & \bullet & - & \overrightarrow{\circ} & + \\ \hline \text{crece} & -1-\sqrt{2} & \text{decrece} & -1 & & \sqrt{2}-1 & & 1 & \text{crece} \end{array}$$

, hay un máximo en $x = -1 - \sqrt{2}$; $f(-1 - \sqrt{2}) = -0{,}840$. Análogamente si $|x| < 1$ obtenemos la misma derivada, pero a $(\sqrt{2} - 1)$ como punto crítico, y en este punto hay otro máximo cuyo valor es:

$$f(\sqrt{2}-1) = 0{,}226.$$

6) $y'' = -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2} < 0, \forall x$ luego y es siempre cóncava hacia abajo, no hay puntos de inflexión.

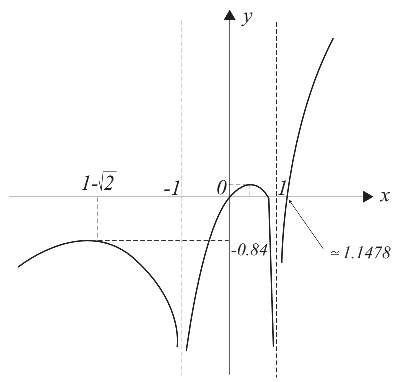

Figura 9.12: $y = x + log|x^2-1|$

b) $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1}$

1) $Dom\, y = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

2) $y \neq 0$, no tiene raíces, signos f $\begin{array}{ccc} - & \circ & + \\ \hline & 1 & \end{array}$

3) No hay simetrías.

4) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty \wedge \lim\limits_{x\to +1} f(x) = +\infty$ en $x = 1$, hay una asíntota vertical.

$m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x(x-1)}\right) = 1 \Rightarrow n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(x - 1 + \dfrac{1}{x-1} - x\right) =$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(-1 + \dfrac{1}{x-1}\right) = -1$, luego $y = x - 1$, es una asíntota oblicua, intersectándola con la curva; $x - 1 = x - 1 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow 0 = \frac{1}{x-1}$, ecuación que nos indica que no se produce intersección.

5) $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, puntos críticos 0,2 así:
$\begin{array}{ccccc} + & \bullet & - & \bullet & + \\ \hline \text{crece} & 0 & \text{decrece} & 2 & \text{crece} \end{array}$ y por lo tanto en $x = 0$ hay un máximo que vale $f(0) = -2$ y en $x = 2$, hay un mínimo que vale $f(2) = 2$.

6) $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$, punto crítico $x = 1$, así:
$\begin{array}{ccc} - & \circ & + \\ \hline \frown & 1 & \smile \end{array}$ no hay puntos de inflexión, $1 \notin Dom\, f$.

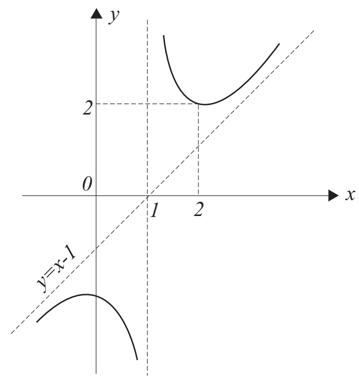

Figura 9.13: $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1}$

c) $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$

1) $Dom\, y = (-\infty, \infty)$

2) $y = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 2a(a > 0)$ signos: $\begin{array}{ccccc} + & \bullet & + & \bullet & - \\ \hline & 0 & & 2a & \end{array}\ f$

3) No tiene simetrías.

4)
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2ax^2 - x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x} - 1} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} - x) = \lim_{z\to 0} \frac{\sqrt[3]{2az - 1} - 1}{z}$$

$$n = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{(2az-1)^{2/3}} \cdot 2a}{1} = \frac{2a}{3};$$

(nótese que $z = \frac{1}{x}$) luego $y = -x + \frac{2a}{3}$ es una asíntota oblicua, intersectándola con la curva $-x + \frac{2a}{3} = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{9}a$.

5) $f'(x) = \frac{1}{3}\frac{x(4a-3x)}{\sqrt[3]{x(2a-x)^2}}$ puntos críticos 0 y $\frac{4}{3}a$, así

f' $\begin{array}{ccccc} - & \bullet & + & \bullet & - \\ \hline \text{decrece} & 0 & \text{crece} & \frac{4a}{3} & \text{decrece} \end{array}$, en $x = \frac{4}{3}a$ hay un máx. $f\left(\frac{4}{3}a\right) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}a$ y en $x = 0$ un mín. $f(0) = 0$

6) $f''(x) = -\frac{8}{9}\frac{a^2}{x^{4/3}(2a-x)^{5/3}}$ puntos críticos 0 y $2a$

f'' $\begin{array}{ccccc} - & \circ & - & \circ & + \\ \hline \frown & 0 & \frown & 2a & \smile \end{array}$ En $x = 2a$ punto de inflexión $f(2a) = 0$

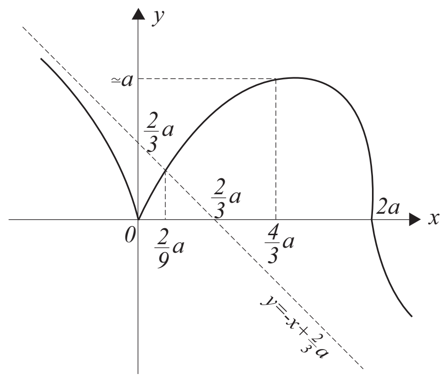

Figura 9.14: $f(x) = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$

d) $f(x) = xlog\left(e - \frac{1}{x}\right)$

1) $Dom\, f \Rightarrow e - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x < 0 \veebar x > \frac{1}{e}$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{(e-1)}$, signos $\Rightarrow f$ $\begin{array}{ccccccc} - & \overleftarrow{\circ} & & \overrightarrow{\circ} & - & \bullet & + \\ \hline & 0 & & \frac{1}{e} & & \frac{1}{e-1} & \end{array}$

3) No tiene simetrías con los ejes.

4) $\lim\limits_{x\to 0^-} x\, log\left(e - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{log\left(e - \frac{1}{x}\right)}{x^{-1}}$
$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{ex-1} = 0$ luego la recta $x = 0$ no es una asíntota vertical, en cambio $\lim\limits_{x\to +\frac{1}{e}} x\, log\left(e - \dfrac{1}{x}\right) \to -\infty$ si lo es.

Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} log\left(e - \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} x\left[log\left(e - \frac{1}{x}\right) - 1\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{log\left(1 - \frac{1}{ex}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= -\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{ex-1} = -\frac{1}{e} \text{ así } y = x - \frac{1}{e}$$

es una asíntota oblicua que no tiene intersecciones con la curva (verifíquelo usted).

5) $f'(x) = log\left(e - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{ex-1}$ para obtener los puntos críticos intersectamos las curvas $g_1(x) = log\left(e - \frac{1}{x}\right)$ y $g_2(x) = \frac{1}{1-ex}$ para lo cual estudiamos sus gráficos g_2 es una hipérbola cuya asíntota vertical se produce para $x = \frac{1}{e}$, sus signos son $g2$ $\begin{array}{ccc} + & \circ & - \\ \hline & \frac{1}{e} & \end{array}$ y su asíntota horizontal es $y = 0$, luego su

gráfico es inmediato como se indica en la figura 9.15.

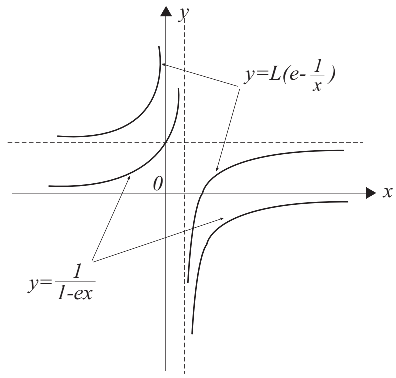

Figura 9.15: $f(x) = log(e - \frac{1}{x})$ e $y = \frac{1}{ex}$

Para $g_1(x) = log\left(e - \frac{1}{x}\right)$ hay conclusiones ya obtenidas: definida para $x < 0$ y $x > \frac{1}{e}$, asíntota vertical en $x = \frac{1}{e}$ y además en $x = 0$ ya que $\lim\limits_{x \to -0} g_1(x) = +\infty$.

$g_1'(x) = \frac{1}{x(ex-1)} \Rightarrow g_1' \; \begin{array}{cccc} + & \overleftarrow{\circ} & \overrightarrow{\circ} & + \\ \hline \text{crece} & 0 & \frac{1}{e} & \text{crece} \end{array}$ además $g_1''(x) = \frac{1-2ex}{x^2(ex-1)^2}$, el punto crítico no pertenece al dominio luego se descarta así que:
$g_1'' \; \begin{array}{cccc} + & \overleftarrow{\circ} & \overrightarrow{\circ} & - \\ \hline \smile & 0 & \frac{1}{e} & \frown \end{array}$ finalmente observando el gráfico (2) concluímos que las curvas no se intersectan, o sea $f'(x)$ no tiene raíces (puntos críticos) y además $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x) = 1$ y $f'(x) > 0$, luego f es estrictamente creciente.

6) $f''(x) = -\frac{1}{x(ex-1)^2} \Rightarrow f'' \; \begin{array}{cccc} + & \overleftarrow{\circ} & \overrightarrow{\circ} & - \\ \hline \smile & 0 & \frac{1}{e} & \frown \end{array}$, el gráfico de $f(x) = xlog\left(e - \frac{1}{x}\right)$ se muestra en la figura 9.16.

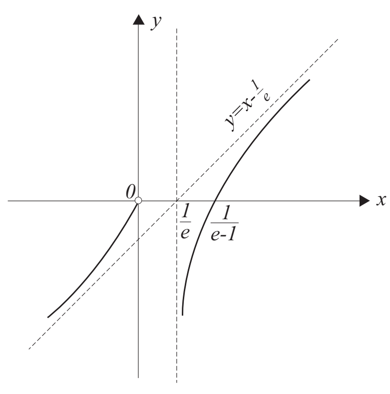

Figura 9.16: $f(x) = xlog\left(e - \frac{1}{x}\right)$

e) $f(x) = xe^{1/x}$

1) $Dom\, f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

2) No tiene raíces, signos $f \; \begin{array}{ccc} - & \circ & + \\ \hline & 0 & \end{array}$

3) No tiene simetrías con los ejes.

4)
$$\lim_{x\to 0^-} xe^{1/x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{e^x}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} \to +\infty$$

$$m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x\; e^{1/x}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to \pm\infty} (xe^{1/x} - x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = 1,$$

así $y = x+1$ es una asíntota oblicua que no intersecta a la curva (verifíquelo usted).

5) $f'(x) = e^{1/x}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ puntos críticos 0 y 1 así: $f' \; \begin{array}{ccccc} + & \circ & - & \bullet & + \\ \hline \text{crece} & 0 & \text{decrece} & 1 & \text{crece} \end{array}$ luego en $x = 1$ hay un mín. $f(1) = e$.

6) $f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3} \Rightarrow f'' \; \begin{array}{ccc} - & \circ & + \\ \hline \frown & 0 & \smile \end{array}$, pero 0 no es punto de inflexión.

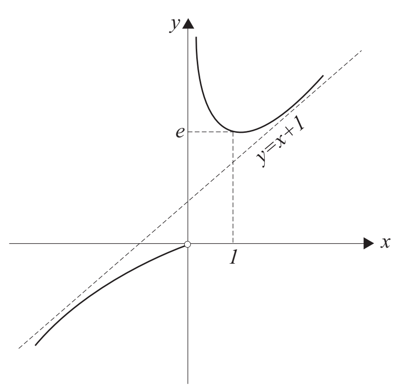

Figura 9.17: $f(x) = xe^{1/x}$

f) $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

1) $Dom\, y = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

2) $y = 0 \Rightarrow x = 0,\ y \;\begin{array}{ccc} - & \bullet & + \\ \hline & 0 & \end{array}$

3) No es simétrica con los ejes.

4) Como $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} y \to +\infty$, en $x = 1$ hay una asíntota vertical.
Asíntota oblicua: $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = 1$
$n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - 2x + 1} - x \right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 2$, así $y = x + 2$ es una asíntota oblicua, que intersecta a la curva cuando:

$$x + 2 = \frac{x^3}{(x-1)^2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

5) $y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ puntos críticos 1 y 3 así: $y' \;\begin{array}{ccccc} + & \circ & - & \bullet & + \\ \hline \text{crece} & 1 & \text{decrece} & 3 & \text{crece} \end{array}$ en $x = 3$, hay un mín. $f(3) = \frac{27}{4}$.

6) $y'' = \frac{6x}{(x-1)^4} \Rightarrow \begin{array}{ccc} - & \bullet & + \\ \hline \frown & 0 & \smile \end{array}$ inflexión en $x = 0,\ f(0) = 0$.

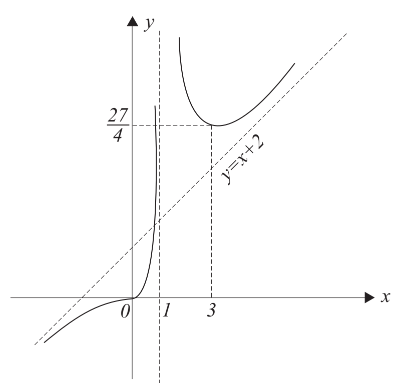

Figura 9.18: $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

16. Estudiar las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{-x^2}$ (curva Gauss)

b) $f(x) = \dfrac{x\log(x)}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = e^{xlog|x|}$

d) $f(x) = x^2 e^{1/x}$

e) $f(x) = Arctg\, x + \dfrac{x-1}{1+x^2}$

Solución.

a) $f(x) = e^{-x^2}$

1) $Dom\, f = \mathbb{R}$

2) No tiene raíces y $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

3) $f(-x) = f(x)$ simétrica con el eje y.

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{e^{-x^2}}{x} = 0,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$, así $y = 0$ es una asíntota horizontal.

5) $f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow \dfrac{+ \quad \bullet \quad -}{\text{crece} \quad 0 \quad \text{decrece}}$ hay un máx. en $x = 0,\ f(0) = 1$.

6) $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$ puntos críticos $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ así $\dfrac{+ \quad \bullet \quad - \quad \bullet \quad +}{\smile \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frown \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \smile}$

puntos de inflexión en $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

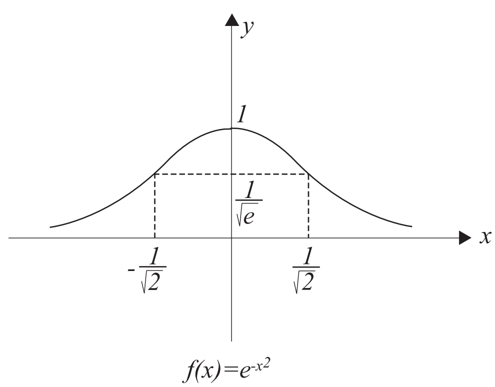

Figura 9.19: $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = \frac{xlog(x)}{x^2-1}$

1) $Dom\, f = (0,1) \cup (1,\infty)$

2) Raíces no tiene y $f(x) > 0,\ \forall x$

3) No tiene simetrías.

4) Asíntotas, posibles en $x=0$ y $x=1$.
$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xlog(x)}{x^2-1}$ depende del numerador

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{logx}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0^+}x=0$$

así $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xlog(x)}{x^2-1}=0$

$$\lim_{x\to 1^\pm}\frac{xlog(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^\pm}\frac{logx+1}{2x}=\frac{1}{2},$$

luego no tiene asíntotas verticales. Veamos las oblicuas

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{logx}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=0;$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{xlogx}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{logx}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$ equivale a calcular

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{logx}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0;$$ así $y=0$ es una asíntota horizontal.

5) $f'(x)=\frac{x^2-1-(x^2+1)logx}{(x^2-1)^2}$, el signo sólo depende del numerador así $x^2-1-(x^2+1)log(x)=(x^2+1)\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}-log(x)\right]=(x^2+1)g(x)$ ahora $f'(x)$ depende de los signos de $g(x)$, notemos que $g(x)$ es continua y derivable para $x>0$, luego

$$g'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{x}=\frac{-(x^2-1)^2}{x(x^2+1)}\leq 0,\ \forall x>0,$$

luego $g(x)$ es decreciente y $g(1)=0$, así que $g\ \dfrac{+\quad\bullet\quad-}{1}$ luego estos son los mismos signos de f' así $f'\ \dfrac{+\qquad\bullet\qquad-}{\text{crece}\quad 1\quad\text{decrece}}$ y $\lim\limits_{x\to\pm 1}f(x)=\dfrac{1}{2}$ como habíamos visto antes.

6) $f''(x)=\frac{2x^2(x^2+3)logx-3x^4+2x^2+1}{(x^2-1)^3}=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2-1)^2}\left[\frac{2logx}{x-1}-\frac{3x^3+3x^2+x+1}{x^2(x^2+3)}\right]$ por cualquier método de aproximación, obtenemos como único punto crítico $x\cong 2,115$, así $f''\ \dfrac{-\qquad\bullet\qquad+}{\frown\quad 2{,}115\quad\smile}$ en $x=2{,}115$ hay un punto de inflexión que vale $f(2{,}115)=0{,}4561$.

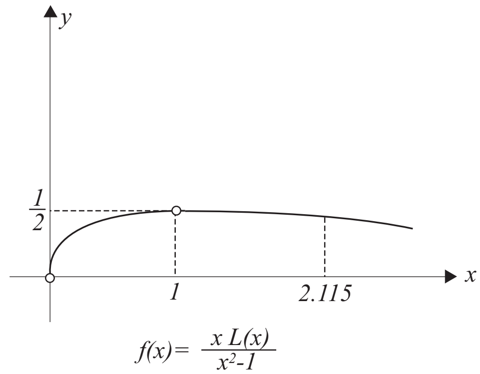

Figura 9.20: $f(x) = \frac{xlog(x)}{x^2-1}$

c) $f(x) = e^{xlog|x|} = e^{log|x|^x} = |x|^x$, si $x > 0 \Rightarrow f(x) = x^x$ y si $x < 0 \Rightarrow f(x) = (-x)^x$

1) $Dom\, f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

2) $f(x) > 0,\ \forall x \in Dom\, f$

3) No es simétrica.

4) $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} |x|^x = 1$, ver problema resuelto 9.1 - 4 - f) Asíntotas oblicuas $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^x}{x} \to +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(-x)^x}{x} = 0$ así $n = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^x = 0$, para los $x \to -\infty,\ y = 0$ es una asíntota horizontal.

5) Si $x > 0 \Rightarrow f'(x) = x^x[logx + 1];\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow logx + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ $f'\ \begin{array}{ccccc} \overrightarrow{\circ} & - & \bullet & + & \\ \hline 0 & \text{decrece} & \frac{1}{e} & \text{crece} & \end{array}$, en $x = \frac{1}{e}$ hay un mín. $f\left(\frac{1}{e}\right) \cong 0{,}6922$. Si $x < 0 \Rightarrow f'(x) = (-x)^x[log(-x) + 1]$;
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{e}$ $f'\ \begin{array}{ccc} + & \bullet & - \\ \hline \text{crece} & -\frac{1}{e} & \text{decrece} \end{array}$ en $x = -\frac{1}{e}$ hay un máximo $f\left(-\frac{1}{e}\right) \cong 1{,}444$.

6) Si $x > 0 \Rightarrow f''(x) = x^x[(logx + 1)^2 + \frac{1}{x}] > 0$ luego f es siempre cóncava hacia arriba.

si
$$x < 0 \Rightarrow f''(x) = (-x)^x[(log - x + 1)^2 + \frac{1}{x}] = 0 \Leftrightarrow x = -1$$
así $f''\ \begin{array}{ccc} + & \bullet & - \\ \hline \smile & -1 & \frown \end{array}$ luego hay inflexión en $x = -1$, $f(-1) = 1$ si definimos $f(0) = 1$ ya que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, en este punto también hay una inflexión.

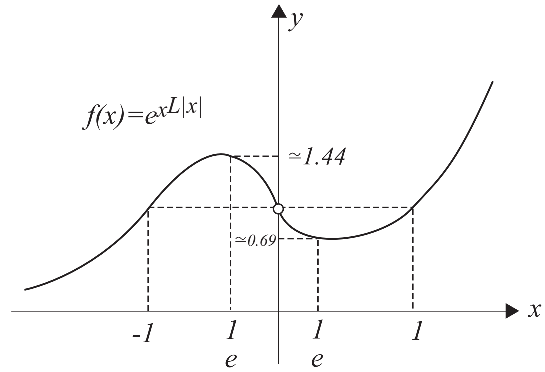

Figura 9.21: $f(x) = e^{x log|x|}$

d) $f(x) = x^2 e^{1/x}$

1) $Dom\, f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

2) No tiene raíces, $f(x) > 0\, \forall x \in Dom\, f$

3) No es simétrica.

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 e^{1/x} = \lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{e^z}{z^2} = \lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{e^z}{2z} = \lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{e^z}{2} \to +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 e^{1/x} = 0$, no hay asíntotas oblicuas ya que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\, e^{1/x} = +\infty$

5) $f'(x) = 2e^{1/x}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f' \;\; \underset{\text{decrece} \quad \frac{1}{2} \quad \text{crece}}{\overset{- \quad \bullet \quad +}{\overline{\hspace{6em}}}}$ en $x = \frac{1}{2}$ hay un mínimo $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^2 \cong 1{,}84$

6) $f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}(2x^2 - 2x + 1) > 0$, luego siempre es cóncava hacia arriba.

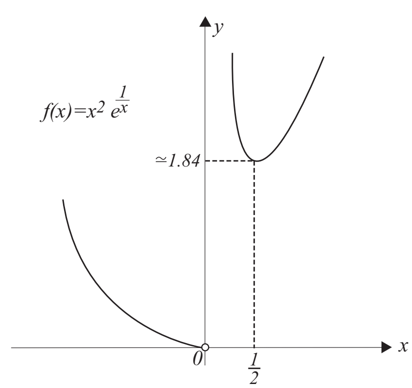

Figura 9.22: $f(x) = x^2 e^{1/x}$

e) $f(x) = Arctg\, x + \frac{x-1}{1+x^2}$

1) $Dom\, f = (-\infty, \infty)$

2) Para la obtención de las raíces graficamos las curvas $Arctg\, x$ y $\frac{1-x}{1+x^2}$ en sus intersecciones y por el método de Newton o cualquier otro, obtenemos (figura 9.23): que en el intervalo (0,1) hay una raíz, que resulta ser: $x \cong$ 0,4675, signos de f $\begin{array}{ccc} - & \bullet & + \\ \hline & 0{,}4675 & \end{array}$

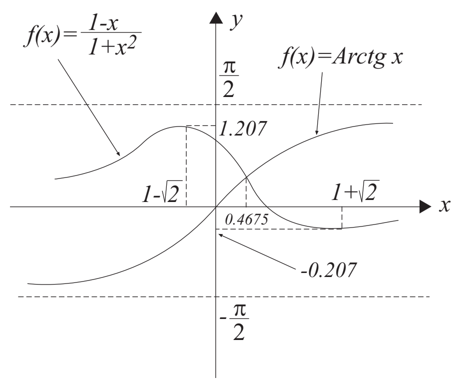

Figura 9.23: $y = Arctg\, x$ e $y = \frac{x-1}{1+x^2}$

3) No tiene simetrías.

4) Asíntotas oblicuas.
$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{Arctgx}{x} + \frac{x-1}{x+x^3} \right) = 0 \Rightarrow n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(Arctgx + \frac{x-1}{1+x^2} \right)$ cuando $x \to +\infty \Rightarrow n = \frac{\pi}{2}$ y cuando $x \to -\infty \Rightarrow n = -\frac{\pi}{2}$; o sea las rectas $y = \pm\frac{\pi}{2}$ son asíntotas horizontales.

5) $f'(x) = 2\frac{x+1}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'$ $\begin{array}{ccc} - & \bullet & + \\ \hline \text{decrece} & -1 & \text{crece} \end{array}$ mínimo en $x = -1$; $f(-1) \cong$ $-1{,}785$.

6) $f'' = 2\frac{-3x^2-4x+1}{(1+x^2)^3}$ puntos críticos $-1{,}548$, $0{,}215 \Rightarrow f''$ $\begin{array}{ccccc} - & \bullet & + & \bullet & - \\ \hline \frown & -1{,}548 & \smile & 0{,}215 & \frown \end{array}$
ambos son puntos de inflexión: $f(-1{,}548) \cong -1{,}747$; $f(0{,}215) \cong -0{,}5385$ finalmente el gráfico pedido puede verse en la figura 9.24.

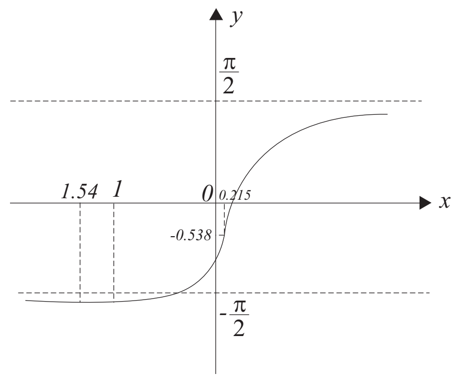

Figura 9.24: $Arctg\, x + \frac{x-1}{1+x^2}$

17. Graficar

$$y^2(x-1) = x^2(x+1)$$

Solución.

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

1) $Dom\, f \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \,\underline{\vee}\, x > 1$ así: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Estudiaremos el gráfico solo para $y \geq 0$, es decir, $y = x\,\frac{x+1}{x-1}$, ya que por la dualidad de signo es simétrica con el eje x.

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (punto aislado) y $x = -1$, signos f $\begin{array}{cccc} - & \bullet & \circ & + \\ \hline & -1 & 1 & \end{array}$

3) Simétrica con el eje x.

4) $\lim\limits_{x\to+1} f(x) = +\infty$ $(y > 0)$; oblicuas

$$m = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1;$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(x\,\frac{x+1}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}} = 1,$$

así, $y = x + 1$ es una asíntota oblicua y por simetría también $y = -x - 1$

5) $f'(x) = \frac{x^2-x-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$ puntos críticos -1, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; donde $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ lo descartamos por no pertenecer al dominio, luego

$$f' \quad \begin{array}{ccccccc} - & \overleftarrow{\bullet} & \overrightarrow{\circ} & - & \bullet & + \\ \hline \text{decrece} & -1 & 1 & \text{decrece} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \text{crece} \end{array}$$

por simetría para el signo (-)

$$f' \quad \begin{array}{ccccccc} + & \overleftarrow{\bullet} & \overrightarrow{\circ} & + & \bullet & - \\ \hline \text{crece} & -1 & 1 & \text{crece} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \text{decrece} \end{array}$$

6) $f''(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ puntos críticos $-2, -1, 1,$ luego

$f'' \quad \begin{array}{cccccc} + & \bullet & - & \overleftarrow{\circ} & \overrightarrow{\circ} & + \\ \hline \smile & -2 & \frown & -1 & 1 & \smile \end{array}$, por simetría para el signo (-)

$(f'' \quad \begin{array}{cccccc} - & \circ & + & \overleftarrow{\circ} & \overrightarrow{\circ} & - \\ \hline \frown & -2 & \smile & -1 & 1 & \frown \end{array}$, punto de inflexión en $x = -2$ que vale $f(-2) = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \cong 1{,}154$. Nótese por último que las asíntotas intersectan a la curva en el punto $x = -1$.

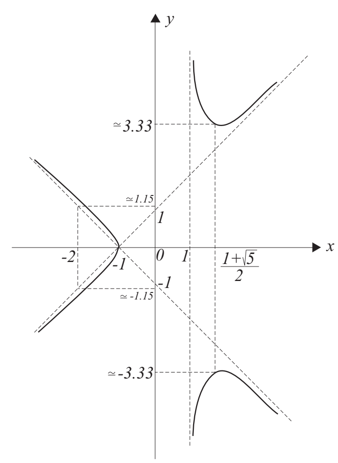

Figura 9.25: $y^2(x-1) = x^2(x+1)$

18. La derivada $f'(x)$ de cierta función *continua* tiene el siguiente gráfico en $[a, b]$.

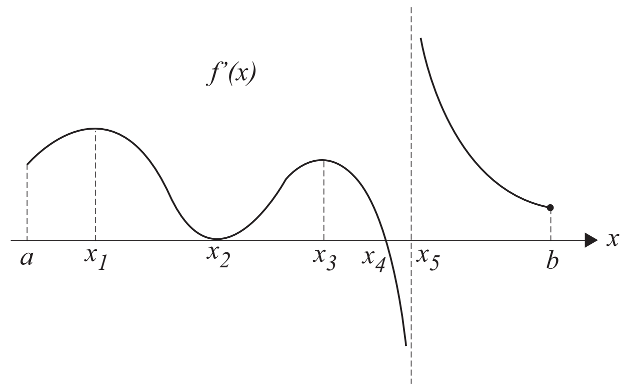

Figura 9.26: $f'(x)$

Además $f(a) = 0$. Bosquejar el gráfico de $f(x)$ en $[a, b]$. Indicando los máx. y mín. relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión y las direcciones de la concavidad.

Solución.

Del gráfico $f' \; \begin{array}{ccccccccc} & + & \bullet & + & \bullet & - & \circ & + & \\ \hline a & \text{crece} & x_2 & \text{crece} & x_4 & \text{decrece} & x_5 & \text{crece} & b \end{array} \; f'$

luego tenemos indicados los intervalos de crecimiento y decrecimiento, además en x_4 hay un máximo y como $f(x)$ es continua en x_5 hay un mínimo. En x_2 hay un punto de inflexión ya que f' no cambia su signo y $f'(x_2) = 0$, también podemos obtener:

$$f'' \; \begin{array}{ccccccccccc} & + & \bullet & - & \bullet & + & \bullet & - & \circ & - & \\ \hline a & \smile & x_1 & \frown & x_2 & \smile & x_3 & \frown & x_5 & \frown & b \end{array}$$

puntos de inflexión en: x_1, x_2 y x_3.

Finalmente el gráfico resulta:

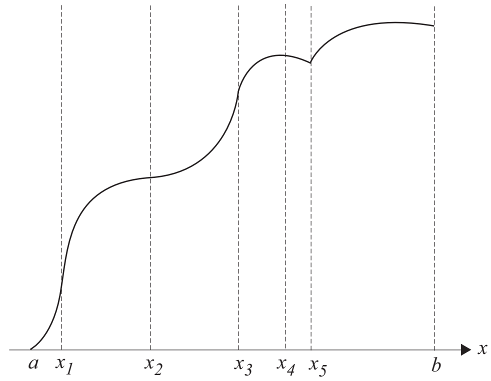

Figura 9.27: $f(x)$

19. Mismo enunciado que problema 18., con $f(a) = f(b) = 1$

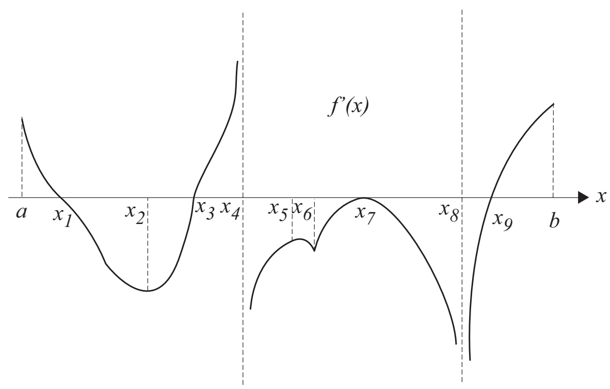

Figura 9.28: $f'(x)$

Solución.

Del gráfico

$$f' \quad \begin{array}{ccccccccccccccc} & + & \bullet & - & \bullet & + & \circ & - & \bullet & - & \circ & - & \bullet & + & \\ \hline a & \text{crece} & x_1 & \text{dec.} & x_3 & \text{crece} & x_4 & \text{dec.} & x_7 & \text{dec.} & x_8 & \text{dec.} & x_9 & \text{crece} & b \end{array}$$

Hay un máximo relativo en: x_1 y x_4, mínimos relativos en : x_3 y x_9, también obtenemos:

$$f'' \quad \begin{array}{ccccccccccccc} & - & \bullet & + & \bullet & - & \bullet & + & \bullet & - & \bullet & + & \\ \hline a & \frown & x_2 & \smile & x_5 & \frown & x_6 & \smile & x_7 & \frown & x_8 & \smile & b \end{array}$$

Hay puntos de inflexión en: x_2, x_5, x_6, x_7 y x_8 luego el gráfico de f resulta:

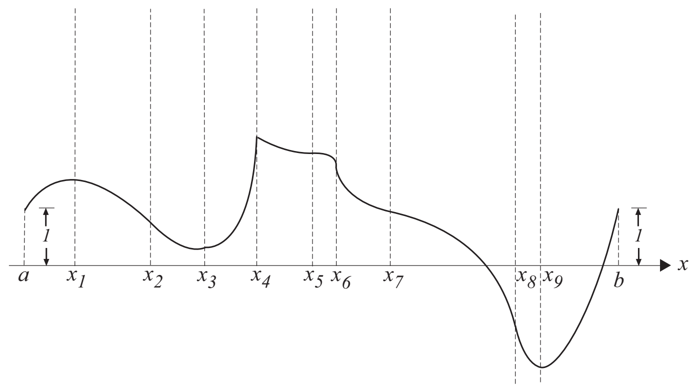

Figura 9.29: $f(x)$

20. *a*) Determinar los máximos y mínimos de $f(x) = x^3 + 3px + q$.

b) Discutir la naturaleza de las raíces de la ecuación $x^3 + 3px + q = 0$.

c) Hallar un punto en la altura de un triángulo isósceles de modo que la suma de las distancias del punto a los vértices sea mínima.

Solución.

a) $f'(x) = 3x^2 + 3p = 0 \Rightarrow x^2 + p = 0$; si $p \geq 0$, $f(x)$ siempre es creciente, si $p < 0 \Rightarrow \dfrac{+ \quad\quad \bullet \quad\quad - \quad\quad \bullet \quad\quad +}{\text{crece} \quad -\sqrt{-p} \quad \text{decrece} \quad \sqrt{-p} \quad \text{crece}}$ hay un máx. en $x = -\sqrt{-p}$ y un mín. en $x = \sqrt{-p}$.

b) $x^3 + 3px + q = 0$; si $q \neq 0$ y $p \geq 0$ hay una sola raíz real y 2 complejas, ya que $f(x)$, es siempre creciente por a). Si $q = 0 \Rightarrow x(x^2 + 3p) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \veebar x^2 = -3p$ si $q = 0$, $p < 0 \Rightarrow$ hay tres raíces reales $x = 0$, $x = -\sqrt{-3p}$ y $x = \sqrt{-3p}$. Si $q = 0$, $p > 0 \Rightarrow$ hay una raíz real y 2 complejas. Si $q = 0$, $p = 0 \Rightarrow x = 0$ una raíz real. Si $q \neq 0$ y $p < 0 \Rightarrow$ hay tres raíces reales y distintas.

c) 1) De inmediato

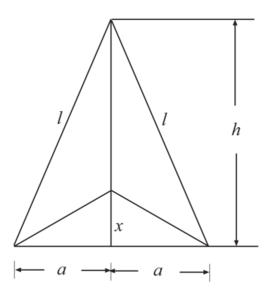

Figura 9.30: Ejercicio 20 c

$F(x)=2\sqrt{a^2+x^2}+h-x$

$F'(x)=\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}}-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$

$F''=\frac{2a^2}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}>0,\ \forall x,$

luego esto asegura que para $x=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ la función $F(x)$ tiene un mínimo, siempre que $0\leq\frac{\sqrt{3}}{3}a<h$ en caso contrario, como F es decreciente ya que $\frac{a}{\sqrt{3}}\geq h$, el mínimo se obtiene en $x=h$.

2) Si $x\geq h \Rightarrow F=x-h+2\sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow F'=1+\frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}>0 \Rightarrow F$ es decreciente luego hay un mínimo en el extremo $x=h \quad F(h)=2\sqrt{a^2+h^2}$.

21. Halle la distancia mínima del punto $(a,0)$ a la curva $y=\sqrt{x}$.

Solución.

Función a minimizar dada por : $d(x)=\sqrt{(x-a)^2+(\sqrt{x}-0)^2}=\sqrt{(x-a)^2+x}$

cuyo dominio es $[0,+\infty)$, como $d'(x)=\frac{2x-2a+1}{2\sqrt{(x-a)^2+x}}=0 \Rightarrow x=a-\frac{1}{2}\wedge x\geq 0.$

El conjunto de puntos críticos es $\{0,a-\frac{1}{2}\}$, si $a\geq\frac{1}{2}$, pero $\{0\}$ si $a<\frac{1}{2}$. Vamos a ver que el mínimo se obtiene en $a-\frac{1}{2}$ si $a\geq\frac{1}{2}$, $\underline{\vee}$ en 0 si $a<\frac{1}{2}$, en efecto:

a)

$a\geq\frac{1}{2}: d(x)\geq d\left(a-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow (x-a)^2+x\geq a-\frac{1}{4}\Leftrightarrow$

$x^2-(2a-1)x+a^2-a+\frac{1}{4}\geq 0\Leftrightarrow x^2-(2a-1)x+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$

$\Leftrightarrow\left[x-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right]^2\geq 0$

b)

$a<\frac{1}{2}: d(x)\geq d(0)\Leftrightarrow (x-a)^2+x\geq a^2$

$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+x\geq a^2\Leftrightarrow x(x-2a+1)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2a-1.$

Pero $x\geq 0\wedge a<\frac{1}{2}\Rightarrow x\geq 2a-1$ luego $x\geq 0\wedge a<\frac{1}{2}\Rightarrow d(x)\geq d(0).$

22. Halla la longitud de la escalera, de longitud máxima, que se puede pasar por la esquina de un corredor cuyas dimensiones se indican en la figura, se supone que la escalera se transporta paralela al suelo.

Solución.

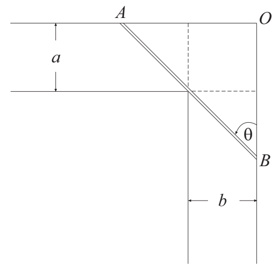

Figura 9.31: Ejercicio 22

La longitud de la escalera viene dada por: $AB = a\,sec\,\theta + b\,cosec\,\theta$, AB es máxima cuando: $\frac{d(AB)}{d\theta} = a\,sec\,\theta\;tg\,\theta - b\,cosec\,\theta\;cotg\,\theta = 0 \Rightarrow asen^3\,\theta = b\,cos^3\,\theta \Rightarrow tg\,\theta = \sqrt[3]{b/a}$ entonces $AB = \frac{a\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{a^{1/3}} + \frac{b\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{b^{1/3}}$, por tanto AB es efectívamente un máximo. Muéstrelo usted analíticamente.

23. Halle las dimensiones del cono recto circular de máximo volumen, que puede ser inscrito en una esfera de radio a.

Solución. Sea r el radio del cono, h la altura y v su volumen: $r^2 + (h-a)^2 =$

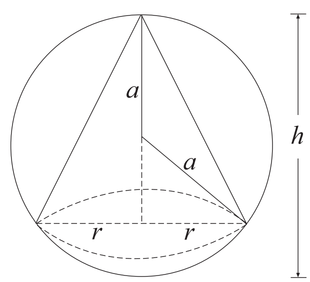

Figura 9.32: Ejercicio 23

a^2; $2r + 2\,(h-a)\frac{dh}{dr} = 0 \Leftrightarrow \frac{dh}{dr} = \frac{r}{a-h}$ y como $v = \frac{\pi}{3}r^2h \Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{\pi}{3}\left(r^2\frac{dh}{dr} + 2rh\right) = \frac{\pi}{3}\left(r^2\,\frac{r}{a-h} + 2rh\right) = \frac{\pi}{3}r\,\frac{r^2+2ah-2h^2}{a-h}$ y de $r^2 = a^2 - (h-a)^2$ se obtiene:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\pi rh\left(\frac{4}{3}a - h\right)}{a-h} = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ ó } \frac{4}{3}a.$$

La altura $h = 0$ obviamente da un mínimo; cuando $h = \frac{4}{3}a \Rightarrow r = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$. Para verificar que $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}a \wedge h = \frac{4}{3}a$ es un máximo o no, es necesario considerar solamente valores de h próxima a $\frac{4}{3}a$ tal que $h > a$. Entonces si $r < \frac{2\sqrt{2}}{3}a \Rightarrow h > \frac{4}{3}a \wedge \frac{dv}{dr} > 0$, si $r > \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow h < \frac{4}{3}a\;\wedge\;\frac{dv}{dr} < 0$. Esto muestra que estas dimensiones dan el valor máximo.

24. Halle la altura y el radio de la base de un cono recto circular, de volumen mínimo, que circunscribe una esfera de radio r. ¿Cuál es este volumen mínimo?

    Solución. Sea x el radio de la base del cono e y la distancia del vértice del cono al

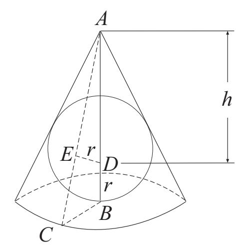

Figura 9.33: Ejercicio 24

centro de la esfera. Luego $y+r$ es la altura del cono, de la figura $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, por tanto:

$$\frac{x}{r} = \frac{y+r}{\sqrt{y^2-r^2}} \Rightarrow x = \frac{r(y+r)}{\sqrt{y^2-r^2}}$$

Como: $V = \frac{1}{3}\pi x^2(y+r) = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2(y+r)^3}{y^2-r^2} = \frac{\pi r^2(y+r)^2}{3(y-r)}, y \in (r, \infty)$

Solamente los puntos estacionarios de $V(y)$ son puntos críticos. Puesto que $V'(y) = \frac{\pi r^2(y+r)(y-3r)}{3(y-r)^2} = 0 \Leftrightarrow y = -r \veebar y = 3r$; El único punto crítico en (r, ∞) es $y_0 = 3r$ luego $y_0 + r = 4r$. El radio mínimo está dado por $x_0 = \frac{r(4r)}{\sqrt{9r^2-r^2}} = r\sqrt{2}$, puesto que $\frac{dv}{dy} < 0$ si $y+r < 4r \wedge y+r > 4r$, así $V_{min} = 8\frac{\pi}{3}r^3$.

25. Halle la relación que existe entre la altura y el radio de la base de un cilindro recto circular de volumen dado V, para que su superficie sea mínima.

    Solución.

    Sea r el radio de la base y h la altura $\Rightarrow V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$. Para cualquier r $S(r) = 2\pi r^2 + 2rh = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$, $r \in (0, +\infty)$. Los únicos puntos críticos son los ceros de S', $S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r^3 = 2V \Rightarrow r_0 = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$ es el radio mínimo si h_0 y r_0 son la altura y radio mínimos y como $V = \pi r_0^3\left(\frac{h_0}{r_0}\right) \Rightarrow \frac{h_0}{r_0} = \frac{V}{\pi r_0 3} = \frac{V}{\frac{1}{2}V} = 2.$

26. Se quiere construir una caja de una hoja de papel cuadrangular de 12 cm. de lado, cortando cuadrados en las esquinas y doblando los lados. Halle la longitud del lado del cuadrado que se debe cortar para que el volumen sea máximo.

Solución. Sea x el número de cm. del lado del cuadrado que se debe cortar. V el vol-

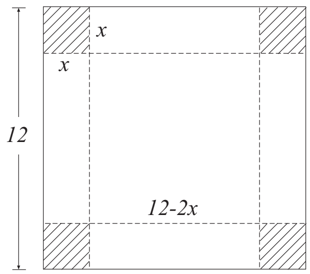

Figura 9.34: Ejercicio 26

umen de la caja. Las dimensiones de la caja son $x, (12-2x)$ y $(12-2x)$ $V(x) = x(12-2x)^2$. Si $x = 0 \Rightarrow V = 0$ si $x = 6 \Rightarrow V = 0$ esto muestra que $x \in [0,6]$; $V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3 \Rightarrow V'(x) = 144 - 96x + 12x^2 = 12(x-2)(x-6); V'(x)$ existe $\forall x$, haciendo $V'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = 6$. Como $V(0) = 0,\ V(6) = 0\ V(2) = 128$, entonces el máximo es 128 que se obtiene cuando la longitud del cuadrado que se corta es de 2 cms.

27. Determinar el radio y la altura de un vaso cilíndrico sin tapa, de manera que para una capacidad c dada, la cantidad de chapa necesaria para su construcción sea la menor posible.

    Solución.

    Sean x el radio e y la altura, entonces la capacidad es $c = \pi x^2 y$ y el área de la chapa es $A = \pi x^2 + 2\pi xy$ como $y = \frac{c}{\pi x^2}(*)$ $A = \pi x^2 + \frac{2c}{x}$, $A' = 2\pi x - \frac{2c}{x^2} \ \wedge\ A'' = 2\pi + \frac{4c}{x^3}$; $A' = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{c}{\pi}$en (*) $x^3 = x^2 y$, es decir, $x = y$. La cantidad de chapa es mínima, cuando el radio y la altura del vaso son iguales, ya que $A'' = 6\pi > 0$.

28. Con un papel circular de radio r se quiere formar un filtro de capacidad máxima después de quitar el sector AOB. Hallar la relación que debe existir entre el radio r del sector y la altura x de la superficie cónica resultante, así como el valor del ángulo α del sector.

    Solución. La capacidad (volumen),c del filtro es dada por:

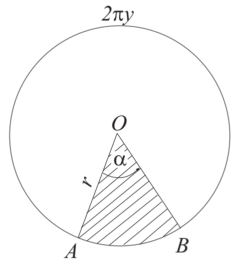

Figura 9.35: Papel circular

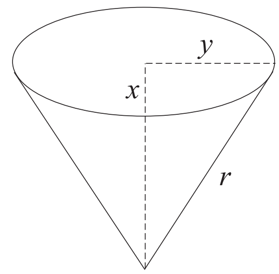

Figura 9.36: Cono

$c(x) = \frac{1}{3}\pi y^2 x$, como $y^2 = r^2 - x^2$.

$c(x) = \frac{\pi r^2 x}{3} - \frac{\pi x^3}{3}$;

$c'(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 - \pi x^2$;

$c''(x) = -2\pi x$

$c'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{r}{\sqrt{3}}$ luego $\frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

En éste el valor de x que hace máxima la capacidad del filtro, ya que $c''(x)$ es negativa para $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Para el ángulo α del sector se tiene:

$2\pi y + r\alpha = 2\pi r$ pero $y^2 = r^2 - \frac{r^2}{3} = \frac{2}{3}r^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{2}{3}}r$,

$\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}r + r\alpha = 2\pi r \Leftrightarrow \alpha = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cong 66°, 06$.

29. La expresión del momento flector de una viga de l mts., apoyada en sus dos extremos y cargada uniformemente con p kgs. por unidad de longitud, está dada por $M_x = \frac{px}{2}(l - x)$; $0 \leq x \leq l$. Calcule el momento flector máximo.

Solución.

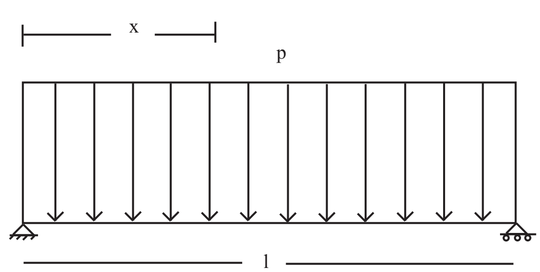

Figura 9.37: Ejercicio 29

$$M'_x = \frac{p}{z}(l-x) - \frac{p}{2}x = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{z}$$

$$M''_x = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p < 0,$$

así el momento flector máximo corresponde al punto medio de la viga, dado por $M_{l/2} = \dfrac{p\,l^2}{8}.$

30. Una ventana tiene la forma que se indica en la figura.¿Cuál es la forma de la ventana, para que entre el máximo de luz para un perímetro dado?

Solución.

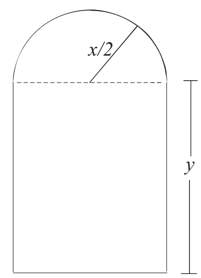

Figura 9.38: Ventana

Sea x el ancho, y la altura, A el área $\wedge P$ el perímetro luego,

$$A = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = xy + \frac{\pi x^2}{8}$$

$$P = x + 2y + \frac{\pi x}{2}$$

como A debe ser máximo $\dfrac{dA}{dx} = 0$, y como P es constante se obtiene $\dfrac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow$

$1 + 2y' + \dfrac{\pi}{2} = 0 \qquad (1)$

$y + xy' + \frac{\pi x}{4} = 0 \qquad (2)$

de donde eliminando y' entre $(1) \wedge (2)$, obtenemos: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2y$. Es decir, el ancho del rectángulo debe ser el doble de la altura; como $x = 0 \veebar y = 0$ darían áreas nulas $x = 2y$ debe dar el área máxima.

31. Dos edificios están a 150 y 100 mts., respectivamente, de los puntos más cercanos A y B sobre una red eléctrica. AB es igual a 200 mts. Los dos edificios se van a conectar a un mismo punto de la línea de transición.¿Cuál es la distancia de este punto a A para que se emplee el mínimo de alambre?

Solución.

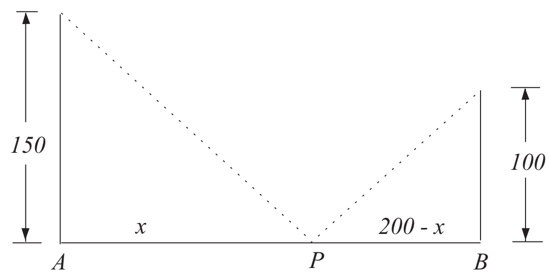

Figura 9.39: Ejercicio 31

Sea x la distancia del punto de conexión a A e y la longitud del alambre. Tomemos 50mts. como unidad.

$$y = \sqrt{x^2 + 3^2} + \sqrt{(4-x)^2 + 2^2} \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \frac{x-4}{\sqrt{(4-x)^2+4}} = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 12;\ x_2 = \dfrac{12}{5}$, $x_1 = 12$ es imposible $x_2 = \frac{12}{5} \Rightarrow x = 120mts$. ¿Por qué es mínimo?

32. ¿Cuál es el cono recto circular de volumen mínimo que se puede circunscribir a un hemisferio de radio a?

Solución.

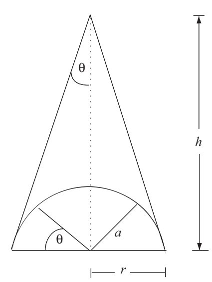

Figura 9.40: Ejercicio 32

Sea r el radio del cono y h su altura, como $r = \dfrac{a}{\cos\theta}$ $\ h = \dfrac{a}{sen\,\theta}$

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h;\ V(\theta) = \dfrac{1}{3}\dfrac{\pi a^3}{cos^2\theta\, sen\theta}$; como $\lim\limits_{\theta\to+0} V(\theta) = \lim\limits_{\theta\to+\pi/2} V(\theta) = +\infty$ se deben considerar los valores de θ en el intervalo $(0, \pi/2)$. Es evidente que el cono tiene volumen mínimo cuando la función $f(\theta) = sen\theta cos^2\theta$ alcance su valor máximo;

$$f'(\theta) = -2cos\theta\, sen^2\theta + cos^3\theta = 2cos^3\theta\left(\frac{1}{2} - tg^2\theta\right) = 0$$

$\Rightarrow \theta_0 = arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 35°$, como f' cambia de más a menos al pasar por θ_0, f tiene un máximo en θ_0. Entonces $V = (\theta)$ tiene un mínimo local en θ_0. Como $\cos\theta_0 = \sqrt{2}/\sqrt{3},\ sen\theta_0 = 1/\sqrt{3}$, el máximo que se puede circunscribir en el hemisferio tiene las siguientes dimensiones: $r = a\sqrt{3}/\sqrt{2},\ h = \sqrt{3}a,\ V = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$, como el volumen del hemisferio es $\frac{2}{3}\pi a^3$, la relación entre el volumen del cono y el hemisferio es $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ y 1.3.

33. Las ecuaciones del movimiento de un proyectil están dadas por $x = (v_0 cos\alpha)t,\ y = (v_0 sen\alpha)t - 16t^2$, con v_0 la velocidad inicial, α el ángulo de elevación del cañon, t el tiempo en segundos y x e y las coordenadas del proyectil.

    Halle la altura máxima que alcanza el proyectil y muestre que el mayor alcance se obtiene cuando el ángulo de elevación es de 45°.

    Solución.

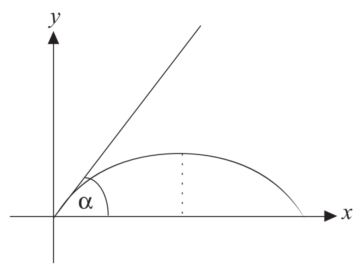

Figura 9.41: Ejercicio 33

$\dfrac{dx}{dt} = v_0 cos\,\alpha \ \wedge\ \dfrac{dy}{dt} = v_0\, sen\,\alpha - 32t \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v_0\, sen\,\alpha - 32t}{v_0\, cos\,\alpha}$. Haciendo $y' = 0 \Rightarrow t = \dfrac{v_0 sen\,\alpha}{32}; y'' = -\dfrac{32}{v_0^2\, cos^2\,\alpha} < 0$, por lo tanto el valor crítico corresponde a un máximo de valor

$$y = (v_0, sen\,\alpha) = \frac{v_0\, sen\,\alpha}{32} - 16\left(\frac{v_0\, sen\,\alpha}{32}\right)^2 = \frac{(v_0\, sen\,\alpha)^2}{64}$$

que es la máxima altura alcanzada por el proyectil. Sea r el alcance. Es igual al valor de x correspondiente al tiempo $t \neq 0$, para el cual $y = 0$ de $y = (v_0 sen\alpha)t - 16t^2 \Rightarrow t = v_0 sen\alpha/16$, por tanto el alcance está dado por $r = (v_0 cos\alpha)\dfrac{v_0\, sen\,\alpha}{16} = \dfrac{v_0^2\, sen\,2\alpha}{32}$ de donde haciendo $\dfrac{dr}{d\alpha} = 0 \Rightarrow 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$, es un valor crítico, como $\dfrac{d^2\, r}{d\alpha^2} = -\dfrac{v_0^2\, sen\,2\alpha}{2}$ es negativa para este valor crítico $\Rightarrow$ es un máximo.

34. Se desea construir un recipiente que sea un cilindro recto circular para que contenga $1m^3$ de aceite.¿Cuáles deben ser las dimensiones del recipiente para que se gaste un mínimo del material?

Solución.

El volumen y el área lateral del cilindro son respectívamente $V = \pi r^2 h$ y $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. Como el volumen es constante $\dfrac{dV}{dr} = 0$, luego:

$$\frac{dV}{dr} = \pi\left(r^2\frac{dh}{dr} + 2rh\right) = 0 \Rightarrow \frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{r};\ \frac{dA}{dr} = 2\pi\left(2r + r\frac{dh}{dr} + h\right)$$

$$= 2\pi(2r - h) = 0 \Leftrightarrow 2r = h \Rightarrow V = 2\pi r^3 \Rightarrow$$

$$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3} \wedge h = 2r = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3} \text{ como}$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 2\pi\left(2 + \frac{2h}{r}\right) > 0, \text{ entonces para } r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3} \text{ hay un mínimo.}$$

35. Un alambre de longitud L se corta en dos partes, una se dobla para que forme un círculo y la otra para que forme un cuadrado.¿Como se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas encerradas por las dos partes sea máxima?

Solución.

La suma de las áreas combinadas es: $A = \pi r^2 + x^2$ además $L = 2\pi r + 4x$, luego: $\dfrac{dA}{dr} = 2\pi r + 2x\dfrac{dx}{dr},\ 0 \leq 2\pi r \leq L$
$\dfrac{dL}{dr} = 2\pi + 4\dfrac{dx}{dr},\ L = cte \Rightarrow \dfrac{dL}{dr} = 0 \Rightarrow \dfrac{dx}{dr} = -\dfrac{\pi}{2}$, luego : $\dfrac{dA}{dr} = \pi(2r - x)$, además $\dfrac{d^2A}{dr^2} = \pi\left(2 + \dfrac{\pi}{2}\right) > 0$. Entonces la curva que representa a A es cóncava hacia arriba. $\dfrac{dA}{dr} = 0 \Leftrightarrow 2r = x$ luego $L = 2\pi r + 8r = 2r(\pi + 4) \Rightarrow \dfrac{dA}{dr} = 0$ cuando $x = \dfrac{L}{\pi + 4}$ como $\dfrac{d^2A}{dx^2} > 0,\ r = \dfrac{L}{2\pi + 8}$ da un mínimo para A (no sirve). Como r está limitado al intervalo $0 \leq r \leq \dfrac{L}{2\pi}$ examinemos los valores de r en los extremos del intervalo. Cuando $r = 0 \Rightarrow x = \dfrac{L}{4},\ A = \dfrac{L^2}{16}$; cuando $r = \dfrac{L}{2\pi},\ x = 0,\ A = \dfrac{L^2}{4\pi}$. En el mínimo $r = \dfrac{L}{2(\pi + 4)},\ x = \dfrac{L}{\pi + 4},\ A = \dfrac{L^2}{4\pi + 16}$ luego el máximo de A está en $r = \dfrac{1}{2\pi}$, lo cual quiere decir que el alambre no se debe cortar, sino que todo debe ser doblado en un círculo de área total máxima. Si se adopta desde el punto de vista de que el alambre debe ser cortado no existe respuesta.

36. Dos rectas paralelas se cortan por un recta AB. Desde el punto C se traza una recta que corta a AB.¿Cómo se debe elegir esta recta para que la suma de las áreas de los triángulos ACP y QPB sea mínima?

Solución.

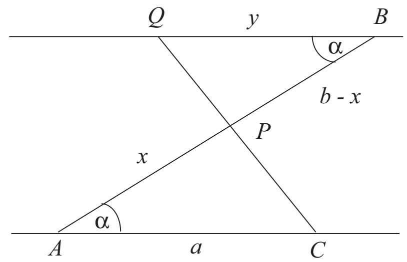

Figura 9.42: Ejercicio 36

Supongamos que las longitudes de AC y AB son a y b respectívamente. Sean x e y las longitudes de AP y QB. Por semejanza de triángulos: $\dfrac{a}{x} = \dfrac{y}{b-x} \Rightarrow y = \dfrac{a(b-x)}{x}$, siendo α el ángulo en A, la suma de las áreas es:$\dfrac{1}{2}ax\,sen\,\alpha + \dfrac{1}{2}(b-x)ysen\,\alpha$ reemplazando el valor de y se obtiene la función: $f(x) = x + \dfrac{(b-x)^2}{x}$, la cual se quiere minimizar$f'(x) = 1 - \left(\dfrac{b-x}{x}\right)^2 - 2\dfrac{b-x}{x^2} = 2 - \dfrac{b^2}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}b$ y como $f''(x) > 0$ el cual de el área mínima.

37. Se desea construir una caja rectángular de base cuadrada y de volumen fijo. El costo del material empleado en la base y la parte superior vale a centavos por cm^2 y el de las partes laterales cuesta b centavos el cm^2.¿Cuáles deben ser las dimensiones del prisma para que el costo total sea mínimo?

    Solución. Sea $y =$ altura, $x =$ lado de la base. El volumen está dado por $V = x^2y$, el costo de la base y la cara superior es $2ax^2$, el de los 4 lados $4bxy$. El costo total C está dado por: $C = 2ax^2 + 4bxy = 2ax^2 + \dfrac{4bV}{x}$, $\dfrac{dC}{dx} = 4ax - \dfrac{4bV}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \left(\dfrac{bV}{a}\right)^{1/3}$, como $\dfrac{d^2C}{dx^2} = 4a + \dfrac{8bV}{x^3} > 0$ el valor crítico corresponde a un mínimo luego $y = \dfrac{a}{b}\left(\dfrac{bV}{a}\right)^3$, obsérvese que $y/x = a/b$.

38. Dos carreteras se cruzan en ángulo recto. El automóvil A está situado en P a $r\,kms.$ de la intersección sobre una de las carreteras; el automóvil B está situado en Q sobre la otra carretera a $5\,Kms$ de la intersección, a una velocidad de v_1 y v_2 kms. por hora. Después de haber partido. ¿Cuál es la distancia mínima que los separa?

    Solución. Sea z la distancia que los separa en un tiempo t $x^2+y^2 = z^2$, el automóvil A, en un tiempo t ha recorrido $r-x \wedge B,\ s-y$, por tanto: $(s-y)/v_1 = (r-x)/v_2 = t$,

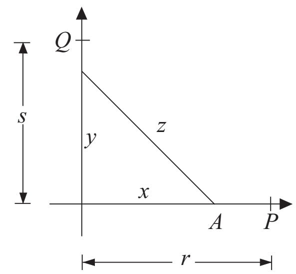

Figura 9.43: Ejercicio 38

de donde obtenemos:

$$x^2+\left[\frac{v_2 s - v_1(r-x)^2}{v_2}\right]=z^2 \Rightarrow \frac{d(z^2)}{dx}=2x+2\left[\frac{v_2 s - v_1(r-x)}{v_2}\right]\frac{v_1}{v_2}=0$$

$$\Rightarrow xv_2^2+v_1v_2 s - v_1^2 r + v_1^2 r + v_1^2 x = 0 \Rightarrow x=\frac{v_1(v_1 r - v_2 s)}{v_1^2+v_2^2},$$

ahora: $\dfrac{d^2(z^2)}{dx^2} = 2+\dfrac{2v_1^2}{v_2^2} > 0$ también obtenemos: $y = \dfrac{v_2(v_2 s - v_1 r)}{v_1^2+v_2^2}$, luego $t = \dfrac{s-y}{v_1} = \dfrac{r-x}{v_2} = \dfrac{rv_2+sv_1}{v_2^2+v_1^2}$. Es interesante observar que los signos de x e y son en general opuestos; por tanto, la intersección es alcanzada por uno de los automóviles antes que se obtenga la distancia mínima. El caso excepcional se presenta cuando $v_1 r - v_2 s = 0$, pues los dos automóviles llegan a la intersección simultáneamente, por tanto, la distancia mínima es cero.

39. Sea un nicho formado por una superficie semicilíndrica recta circular y un cuarto de superficie esférica de radio igual al de la superficie cilíndrica. Determinar el volumen máximo del nicho sabiendo que su superficie es $\dfrac{\pi a^2}{2}$.

Solución.

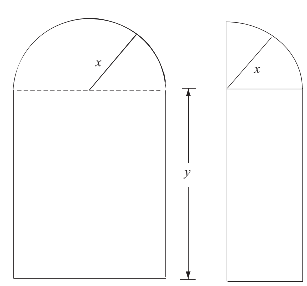

Figura 9.44: Ejercicio 39

Sea x el radio del cilindro e y su altura, el volumen del nicho es:

$$v = \frac{1}{2}\pi x^2 y + \frac{1}{3}\pi x^3 \qquad (1),$$

el área de la superficie del nicho está dada por:

$$S = \pi xy + \frac{1}{2}x^2\pi + \pi x^2,$$

y como según el problema $S = \frac{1}{2}\pi a^2$ puede escribirse $\pi xy + \frac{1}{2}\pi x^2 + \pi x^2 = \frac{1}{2}\pi a^2 \Rightarrow$ $y = \dfrac{a^2 - 3x^2}{2x}$, en (1)

$$V = \frac{\pi}{12}(3a^2x - 5x^3) \Rightarrow V' = \frac{\pi}{12}(3a^2 - 15x^2);\ V'' = -\frac{5\pi x}{2};$$

haciendo $V' = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$, para este valor de x, $V'' < 0$, luego él corresponde, al máximo de la función V, luego $V_{max} = \dfrac{\sqrt{5}\pi a^3}{30}$, ahora encontrando el valor de y, tenemos $y = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$ luego $x = y$.

40. Se dobla una página de manera que la esquina derecha inferior llegue a coincidir con el lado izquierdo de la misma. Si la anchura de la página es $l(= 15{,}24cms.)$. Hallar la longitud mínima del pliegue.¿Cuál es el ángulo que forma este pliegue mínimo con el lado derecho de la página? Se supone la página suficientemente larga para evitar que el pliegue alcance la cabecera de ésta.

Solución.

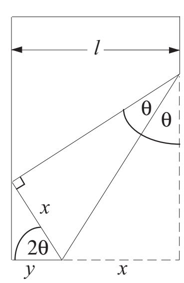

Figura 9.45: Ejercicio 40

$x + y = l$

$y = x\cos 2\theta,\ x + x\cos 2\theta = l$

$$\Rightarrow x = \frac{l}{1+cos\,2\theta} \text{ pero } z = xcosec\,\theta \text{ así la función a minimizar resulta:}$$

$$z = \frac{l}{1+cos\,2\theta}cosec\,\theta = \frac{lcosec\,\theta}{2cos^2\,\theta}$$

$$z' = \frac{l}{2}\frac{cos^2\,\theta(-cosec\,\theta\;cotg\,\theta) - 2cos\,\theta(-sen\,\theta)cosec\,\theta}{cos^4\,\theta} = 0,$$

de donde se llega a : $tg^2\,\theta = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow tg\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = Arctg\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, para asegurar el mínimo:

$$\begin{array}{ccc} - & \bullet & + \\ \hline & Arctg\;\frac{1}{\sqrt{2}} & \end{array}$$ z' ; y la longitud mínima resulta:

$$z = \frac{l\,cosec\,(Arctg\,\frac{1}{\sqrt{2}})}{2\,cos^2\,(Arctg\,\frac{1}{\sqrt{2}})} \cong 19{,}797cms.$$

41. Una barra AB, articulada a una pared en su extremo A, debe soportar, en posición horizontal, un peso de 10kgs. colgado a una distancia de 3m. de la articulación. Para ello se aplicará en el extremo B una fuerza vertical, hacia arriba, de magnitud F. Determinar la longitud que debe tener la barra para que F sea mínima.

    a) Si la barra pesa $5kgs/m$.

    b) Si la barra pesa $7kgs/m$. Calcular el mínimo valor de F en cada caso.

Solución.

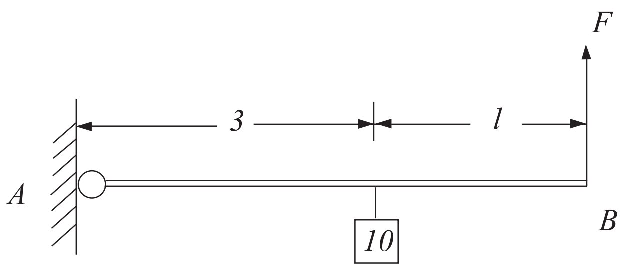

Figura 9.46: Ejercicio 41

a) La barra pesa $5kgs/m$, equilibrio de fuerzas nos indica: $F(l+3) = 10\cdot 3 + \frac{5}{2}(l+3)^2;\; l \geq 0 \Rightarrow$

$F = \frac{30}{l+3} + \frac{5}{2}(l+3) \Rightarrow \frac{dF}{dl} = \frac{-30}{(l+3)^2} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{12} - 3$ solo sirve $l = \sqrt{12} - 3 \Rightarrow F \cong 17{,}32kgs.$, nótese que $\frac{d^2F}{dl^2} = \frac{60}{(l+3)^3} > 0$, luego asegura la existencia de un mínimo.

b) Para $7kgs/m$ $F = \frac{30}{l+3} + \frac{7}{2}(l+3) \Leftrightarrow F' = -\frac{30}{(l+3)^2} + \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{\frac{60}{7}} - 3;$ ambos valores negativos, luego como $l \geq 0$ y

$$\underset{\quad -5{,}92 \qquad -0{,}072}{\overline{+ \quad \bullet \quad - \quad \bullet \quad +}}\ F'$$

F' es creciente en $[0,\infty)$ el valor mínimo para F se produce, en $l = 0$ y vale $F(0) = 20{,}50kg$.

42. Para $S = (3+x)[4+(3-x)^2]^{1/2}$, encontrar el valor máximo alcanzado por S y el valor mínimo de S cuando $0 \leq x \leq 3$.

Solución.

$\log(S) = \log(3+x) + \frac{1}{2}\log[4+(3-x)^2]$

$\frac{S'}{S} + \frac{1}{3+x} + \frac{3-x}{4+(3-x)^2} \Rightarrow S' = (3+x)[4+(3-x)^2]^{1/2}\left\{\frac{2x^2-6x+4}{(3+x)[4+(3-x)^2]}\right\}$

$S' = [4+(3-x)^2]^{1/2}\left(\frac{2x^2-6x+4}{4+(3-x)^2}\right) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1;\ x = 2$

$$\underset{0 \ \text{crece} \ 1 \ \text{decrece} \ 2 \ \text{crece} \ 3}{\overline{+ \quad \bullet \quad - \quad \bullet \quad +}}\ S'$$

puntos críticos a considerar: 0, 1, 2, y 3; de inmediato en $x = 1$ hay un máximo relativo cuyo valor es $S(1) = 8\sqrt{2} \cong 11{,}31$ y en $x = 2$ hay un mínimo relativo que vale $S(2) = 5\sqrt{5} \cong 11{,}18$ y para los extremos del intervalo $S(0) = 3\sqrt{13} \cong 10{,}81$ y $S(3) = 12$, con lo que el máximo absoluto se produce para $x = 3$ y el mínimo absoluto para $x = 0$.

43. Un tronco de árbol tiene la forma de un cono truncado de alto 30 mts. y diámetro de las bases 4 y 3 metros, respectivamente. Un poste de sección transversal cuadrada se corta del tronco. ¿Cuál debe ser el largo del poste para tener un volumen máximo?.

Solución.

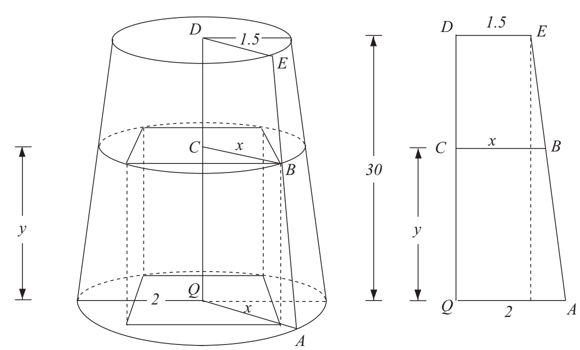

Figura 9.47: Ejercicio 43

De la figura $\frac{30}{0{,}5} = \frac{30-y}{x-1{,}5} \Rightarrow y = 120 - 60x$.

El volumen es: $V = 2x^2y = 2x^2(120 - 60x) = 120(2x^2 - x^3)$

$V' = 120(4x - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \veebar x = \frac{4}{3} \cong 1{,}33$, luego como estos puntos críticos no pertenecen a $[1{,}5, 2]$, además $\underset{\text{crece} \quad \frac{4}{3} \qquad 1{,}5 \qquad 2}{\overline{+ \quad \bullet \quad -}}$ decrece V' como V es decreciente en $[1{,}5, 2]$ en máximo se produce cuando $x = 1{,}5m$ e $y = 30m$. $V_{max} = 2(15)^2 30 = 135m^3$.

44. De un tronco redondo de diámetro "d" hay que cortar una viga de sección rectangular. ¿Qué anchura x y que altura y deberá tener esta sección para que la viga tenga una resistencia máxima posible?

 a) a la comprensión.

 b) a la flexión (se sabe que la resistencia a la comprensión es proporcional al área de la sección , mientras que la resistencia a la flexión lo es al producto del ancho por el cuadrado de su altura).

Solución.

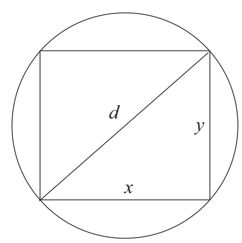

Figura 9.48: Ejercicio 44

a) $x^2 + y^2 = d^2$; $c = \alpha xy$ α constante de proporcionalidad.

 $c = \alpha x\sqrt{d^2 - x^2}, 0 < x < d$

 $0 < y < d.$

 $c' = \alpha \frac{d^2 - 2x^2}{\sqrt{d^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{d}{\sqrt{2}}$

 $\underset{\frac{d}{\sqrt{2}}}{\overline{+ \quad \bullet \quad -}}$ c' luego en $x = \frac{d}{\sqrt{2}}$ hay un máximo, esto implica $y = \frac{d}{\sqrt{2}}$.

b) $F = kxy^2$, k constante de proporcionalidad

$F = kx(d^2 - x^2) \Leftrightarrow F' = k(d^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ así: $\overset{+\quad \bullet \quad -}{\underset{\frac{d}{\sqrt{3}}}{\overline{\qquad\qquad}}}$ F' luego máximo en $x = \frac{d}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{2}{3}}d$

45. Se necesita diseñar un cajón sin tapa de fondo cuadrado y de capacidad V, cuyo fondo se hará de un material "m"veces más caro que el que se empleará en las paredes laterales $(m > 1)$, a un costo mínimo.

    a) Determinar los valores de m, para los cuales el cajón resulte más alto que ancho.

    b) Determinar las dimensiones del cajón si $V = 12\,dm^3$ y $m = 3$.

Solución.

$V = x^2y \Rightarrow y = \frac{V}{x^2}$; función de costo dado por $c = mkx^2 + 4kxy$; k costo de paredes laterales así $c = mkx^2 + 4k\frac{V}{x} \Leftrightarrow c' = 2mkx - \frac{4kV}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2V}{m}} \Rightarrow y = V\sqrt[3]{\frac{m^2}{4V^2}}$; ahora para $y > x \Leftrightarrow V\sqrt[3]{\frac{m^2}{4V^2}} > \sqrt[3]{\frac{2V}{m}}$ de donde $m^3 > 8 \Rightarrow m > 2$; además $c''(x) = 2mk + \frac{12kV}{x^3} > 0$ lo que asegura un costo mínimo.

b) Por a) se tiene $x = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 12}{3}} = 2dm \Rightarrow y = 3dm.$

46. Un espejo rectangular se rompe según se indica en la figura. Determinar el espejo rectangular de área máxima que se puede obtener del trozo mayor si:

    a) $A = 80cm. \qquad B = 90cms.$

    b) $A = 80cms. \qquad B = 112cms$

Solución.

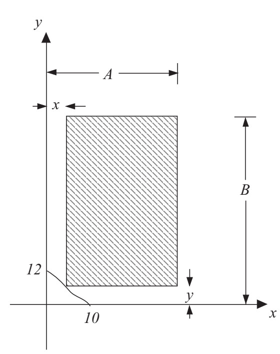

Figura 9.49: Ejercicio 46

Notemos previamente que:

$0 \leq x \leq 10;\ 0 \leq y \leq 12$

$\frac{x}{10} + \frac{y}{12} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{6}{5}(10 - x)$

$F(x) = (A - x)(B - y) = AB - Ay - Bx + xy$

$F(x) = AB - \frac{6}{5}A(10 - x) - Bx + x\frac{6}{5}(10 - x)$

$F'(x) = \frac{6}{5}A - B + 12 - \frac{12}{5}x = 0$

$\Leftrightarrow x = 5 - \frac{5}{12}B + \frac{1}{2}A \qquad (1)$

a) $A = 80cms,\ B = 90cms.$ en (1) $\Rightarrow x = 7{,}5cms.\ y = 3cms.$ y como $F''(x) = -\frac{12}{5} < 0$, seguramos un máximo, tal que $F(7{,}5) = 6307{,}5cms^2$

b) $A = 80cms.,\ B = 112cms$ en (1) $\Rightarrow x = -\frac{4}{3} \notin [0, 10]$, luego como F es decreciente en $[0, 10]$, hay un máximo en $x = 0$ es decir $F(0) = 8000cms^2$ (nótese que $f(10) = 7840cms^2$)

47. Una fábrica F, está a una distancia "a"de una línea ferrea que pasa por la ciudad C. La distancia CA es l, se necesita unir F a la línea ferrea mediante una carretera recta FP. ¿Cuál debe ser la ubicación de P, para que el costo total de los fletes de F a C sea mínimo. Si el costo de flete por carretera es m veces mayor que por tren $(m > 1)$.

Solución.

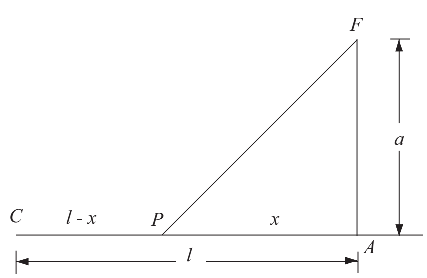

Figura 9.50: Ejercicio 47

Sea x la distancia AP, $0 \leq x \leq l$, y sean los gastos de transporte en ferrocarril (en Tn. - Km) k, entonces los gastos de transporte en carretera serán km, así la función de costo será:

$C(x) = k(l - x) + km\sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow C'(x) = -k + \frac{mkx}{\sqrt{a^2+x^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{m^2-1}};$

$\begin{array}{c} - \quad \bullet \quad + \\ \hline \frac{a}{\sqrt{m^2-1}} \end{array}$, asegura un costo mínimo siempre que: $0 \leq \frac{a}{\sqrt{m^2-1}} \leq l$. Si no se cumple la desigualdad indicada, como $C(x)$ decrece de 0 a l, el mínimo se obtiene para $x = l,\ C(l) = km\sqrt{a^2 + l^2}$.

48. Un pasillo de ancho "a" dobla en ángulo recto. Determinar el menor valor de "a" que permite que un ropero de $80cm$ de ancho por 2m. de largo pueda pasar por dicho recodo.

Solución.

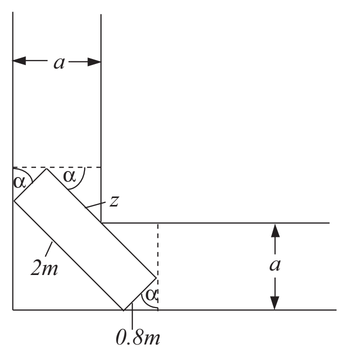

Figura 9.51: Ejercicio 48

De la figura tenemos:

$$0{,}8\ sen\alpha + zcos\alpha = a \tag{1}$$

$$(2 - z)sen\alpha + 0{,}8\ cos\alpha = \alpha \tag{2}$$

reemplazando el valor de z de (1) , en (2)

$$2sen\alpha - \frac{(a - 0{,}8\ sen\alpha)}{cos\alpha} sen\alpha + 0{,}8\ cos\alpha = a$$

de donde: $a = \frac{sen2\alpha + 0{,}8}{sen\alpha + cos\alpha}$

$\frac{da}{d\alpha} = \frac{2cos2\alpha(sen\alpha+cos\alpha)-(cos\alpha-sen\alpha)(sen2\alpha+0{,}8)}{(sen\alpha+cos\alpha)^2}$

$= 0 \Rightarrow 2(cos^3\alpha - sen^3\alpha) - 0{,}8(cos\alpha - sen\alpha) = (cos\alpha - sen\alpha)(2 + 2sen\alpha\ cos\alpha - 0{,}8) = 0$

de aquí $cos\alpha = sen\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \veebar sen2\alpha = -1{,}2$ (no da solución) $\begin{array}{c} + \quad \bullet \quad - \\ \hline \frac{\pi}{4} \end{array}\ a'$

luego $\alpha = \frac{\pi}{4}$ hay un máximo cuyo valor es $a\left(\frac{\pi}{4}\right) \cong 1,27\,mts.$

Nótese que la función tiene un máximo para $\alpha = \frac{\pi}{4}$, pero justamente este es el mayor (mínimo) valor de a que permite pasar el ropero.

49. En cierta compañía de bomberos hay una torre de planta cuadrada que mide (interiormente)a por $a\, mts.$

    a) Determinar la máxima longitud que pueda tener una escalera para que pueda guardarse en la torre, sabiendo que la puerta tiene $h\, mts.$ de altura.

    b) Determinar también la mínima altura que pueda tener la puerta para que se pueda guardar una escalera de longitud l.

Solución.

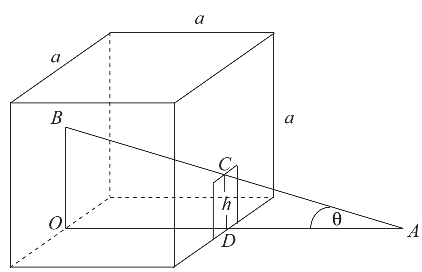

Figura 9.52: Ejercicio 49

a)

$$l\ cos\theta = a + DA \tag{1}$$

$$AD = \frac{l}{tg\theta} \tag{2}$$

De (1) y (2) obtenemos

$$l = \frac{a}{cos\theta} + \frac{h}{sen\theta} \tag{3}$$

$$\frac{dl}{d\theta} = \frac{asen\theta}{cos^2\theta} - \frac{hcos\theta}{sen^2\theta} = 0 \tag{4}$$

$$\Rightarrow asen^3\theta = hcos^3\theta \Rightarrow tg\theta = \sqrt[3]{\frac{h}{a}}$$

¿porqué, aseguramos que en $\theta = Arctg\sqrt[3]{\frac{h}{a}}$ hay un máximo l? de donde:

$$l = \frac{a\sqrt{a^{2/3}+h^{2/3}}}{\sqrt[3]{a}} + \frac{h\sqrt{a^{2/3}+h^{2/3}}}{\sqrt[3]{h}} = (a^{2/3}+h^{2/3})^{3/2}$$

b) De (3) $0 = \frac{a\,sen\theta}{cos^2\theta} + \frac{sen\theta h' - h\,cos\theta}{sen^2\theta}$, si $h'(\theta) = 0$

$0 = a\frac{sen\theta}{cos^2\theta} - \frac{h\cdot cos\theta}{sen^2\theta}$ igual a la ec. (4) así: $l^{2/3} = a^{2/3} + h^{2/3}$ de donde $h = (l^{2/3} - a^{2/3})^{3/2}$, altura mínima de la puerta.

50. Cuantas soluciones reales tiene la ecuación:

$$x = q\,senx + a, \qquad \text{con} \qquad 0 < q < 1$$

Solución.

Sea $f(x) = x - q\,senx - a \Leftrightarrow f'(x) = 1 - qcos\,x$ pero $-1 < q\,cosx < 1$ luego $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ es estríctamente creciente y corta el eje x a lo más en un punto, por lo tanto existe a lo más una raíz.

Como $f(k\pi) = k\pi - a \wedge f[(k+1)\pi] = (k+1)\pi - a,\ k \in Z$ si $k\pi < a < (k+1)\pi$ entonces $f(k\pi) < 0 \wedge f(k+1)\pi > 0$ luego existe una raíz entre $k\pi$ y $(k+1)\pi$.

51. Estudiar las curvas definidas paramétricamente y graficarlas:

a) $x = \dfrac{3t}{1+t^3}; \qquad y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$

b) $x = 2t - \dfrac{t^2}{3}; \qquad y = \dfrac{3}{4}t^2 - \dfrac{1}{8}t^3$

Solución.

a) $x = \frac{3t}{1+t^3},\ y = \frac{3t^2}{1+t^3}$

1) $x(t)$ e $y(t)$ están definidas para todo $t \neq -1$

2) $x = 0$ e $y = 0 \Leftrightarrow t = 0$ signos $\underset{\quad -1 \qquad 0}{\overline{+ \quad \circ \quad - \quad \bullet \quad +}}\ x$; $\underset{\quad -1}{\overline{- \quad \circ \quad +}}\ y$ así, para : $t < -1 \Rightarrow$ la función se encuentra en el IV cuadrante para $-1 < t < 0 \Rightarrow$ función en el II cuadrante y para $t > 0 \Rightarrow$I cuadrante.

3)

$$\lim_{t\to -1^-} x = \lim_{t\to -1^-} \frac{3t}{1+t^3} \to \infty^+$$

$$\lim_{t\to -1^-} y = \lim_{t\to -1^-} \frac{3t^2}{1+t^3} \to \infty^-$$

$$\lim_{t\to -1^+} x \to \infty^- \text{ y } \lim_{t\to -1^-} y = \infty^+$$

y también que si $t \to \infty^{\pm} \Rightarrow x \to 0$ e $y \to 0$ asíntotas oblicuas $m = \lim\limits_{x\to\infty^{\pm}} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty\pm} t = -1$ y

$$n = \lim_{x\to\infty\pm}(y+x) = \lim_{x\to\infty\pm} \frac{3t^2+3t}{1+t^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6t+3}{3t^2} = -1$$

luego $y = -x-1$ es una asíntota de las dos ramas de la curva

4) $\frac{dy}{dt} = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}; \frac{dx}{dt} = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$, de aquí obtenemos para t los siguientes puntos críticos: $t = -1; t = 0; t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ y $t = \sqrt[3]{2}$, además $\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$ con lo que confeccionamos la siguiente tabla

t	x	y	signo $\frac{dy}{dx}$	crece o decrece
$-\infty < t < -1$	$0 < x < \infty^+$	$\infty^- < y < 0$	-	decrece
$-1 < t < 0$	$-\infty < x < 0$	$0 < y < \infty^+$	-	decrece
$0 < t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$0 < x < \sqrt[3]{4}$	$0 < y < \sqrt[3]{2}$	+	crece
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t < \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{2} < y < \sqrt[3]{4}$	-	decrece
$\sqrt[3]{2} < t < \infty$	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$0 < y < \sqrt[3]{4}$	+	crece

Nótese que :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0\\ x=0;\, y=0}} = 0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\sqrt[3]{2}\\ x=\sqrt[3]{2};\, y=\sqrt[3]{4}}}$$

la tangente a la curva en estos puntos, es tangente al eje x (en el primer caso coincide), también,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\\ x=\sqrt[3]{4};\ y=\sqrt[3]{2}}} = \infty = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\infty\\ x=0;\ y=0}}$$

a su vez estas tangentes, son paralelas al eje y.

b) $x = 2t - \frac{t^2}{3}; \quad y = \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{8}t^3$

1) $x(t)$ e $y(t)$ están definida para todo t real.

2) $x = 0 \Leftrightarrow t = 0;\ t = 6$ e $y = 0 \Leftrightarrow t = 0;\ t = 6$

además:
$$t \to +\infty \Rightarrow x \to -\infty \quad \text{e} \quad y \to -\infty$$
$$t \to -\infty \Rightarrow x \to -\infty \quad \text{e} \quad y \to +\infty$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty^-} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty^-} \dfrac{3}{8}\, t \to \pm\infty$ luego no hay asíntotas, oblicuas.

4) $x'(t) = 2 - \frac{2}{3}t; \quad y'(t) = \frac{3}{2}t\left(1 - \frac{t}{4}\right)$ de donde obtenemos; $t = 0$; $t = 3$; $t = 4$, como puntos críticos, además:

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\frac{t\left(1-\frac{1}{4}t\right)}{\left(1-\frac{1}{3}t\right)}$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t^2-6t+12}{4\left(2-\frac{2}{3}t\right)^3} = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (para la concavidad) luego:

t	x	y	signo f'	crec. o decrec.	concavidad
$-\infty < t < 0$	$-\infty > x < 0$	$0 < y < \infty$	-	decrece	$\smile$
$0 < t < 3$	$0 < x < 3$	$0 < y < \frac{27}{8}$	+	crece	$\smile$
$3 < t < 4$	$\frac{8}{3} < x < 3$	$\frac{27}{8} < y < 4$	-	decrece	$\frown$
$4 < t < \infty$	$-\infty < x < \frac{8}{3}$	$-\infty < y < 4$	+	crece	$\frown$

Notemos que: $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0\\ x=0;\ y=0}} = 0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=4\\ x=\frac{8}{3};\ y=4}}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=3\\ x=3;\ y=\frac{27}{8}}} = \infty$

9.7. Problemas Propuestos

1. Demostrar las siguientes desigualdades

a) $x - \dfrac{x^3}{3} < Arctg\, x < x - \dfrac{x^3}{6}$ para $0 < x \leq 1$

b) $x - \dfrac{x^3}{6} < senx < x$ para $x \geq 0$

c) $tgx > x - \dfrac{x^3}{3}$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

d) $e^x \geq 1 + x$ para todo x

e) $e^x > ex$ para $x > 1$

2. *a*) Si $x > 0$, sea $f(x) = x - 1 - log(x), g(x) = logx - 1 + \dfrac{1}{x}$ estudiar los signos de f' y g' para demostrar $1 - \dfrac{1}{x} < logx < x - 1,\ x \neq 1$. Cuando $x = 1$ se cumple la igualdad.

   b) Trazar los gráficos de $h_1(x) = x - 1$ y $h_2(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ para $x > 0$, e interpretar geométricamente las desigualdades de la parte a).

3. Si $\alpha > 1,\ x > 0,\ y > 0$ y $x + y = 1$, demostrar que:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{\alpha} + \left(y + \frac{1}{y}\right)^{\alpha} \geq \frac{5^{\alpha}}{2^{\alpha-1}}$$

4. Demostrar que $tg(senx) > sen(tgx)$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

   Indicación: Haga ver que $f(x) = tg(senx) - sen(tgx) > 0$

5. Demostrar para todo n entero positivo, que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} < e^x < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \qquad (x > 0)$$

   Indicación: Usar la desigualdad del problema resuelto 9.2, 3 a).

6. Demostrar que:

$$\frac{d}{dx}\left[-e^{-x}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n}\right] \leq \frac{x}{n} \qquad (x > 0)$$

   y por integración deduzca

$$1 - e^{-x}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n} \leq \frac{x^2}{2n} \text{ ó } \quad e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} \leq \frac{x^2}{2n}\, e^x$$

   Indicación: Usar la desigualdad del problema anterior.

7. *a*) Demostrar que las funciones $f(x) = x\,logx$ y $g(x) = x^x$ son estrictamente cóncavas hacia arriba en $(0, \infty)$

   b) Si x, y, a, b son positivos, demostrar que:

$$xlog\left(\frac{x}{a}\right) + y\,log\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y)log\left(\frac{x+y}{a+b}\right)$$

   y que la igualdad se verifica para $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$

8. Demostrar que:

   a) $2x\,Arctg^{-1}x \geq log(1+x^2)$

   b) $log(1+x) > \dfrac{Arctgx}{1+x} \quad (x > 0)$

9. Determinar los intervalos de monotonía de las funciones siguientes:

   a) $f(x) = x^3 - 3x + 5$ b) $f(x) = e^x + 5x$

   c) $f(x) = log(1-x^2)$ d) $f(x) = \dfrac{2x}{logx}$

   e) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ f)$f(x) = 2senx + cos2x$

   Respuesta.

   a) $\begin{array}{ccccc} + & \bullet & - & \bullet & + \\ \hline \text{crece} & -1 & \text{decrece} & 1 & \text{crece} \end{array}$

   b) siempre creciente.

   c) $\begin{array}{ccccc} \circ & + & \bullet & - & \circ \\ \hline -1 & \text{crece} & 0 & \text{decrece} & 1 \end{array}$

   d) $\begin{array}{ccccccc} \circ & - & \circ & - & \bullet & + & \\ \hline 0 & & 1 & & & e & \\ & & \text{decrece} & & & \text{crece} & \end{array}$

   e) $\begin{array}{ccccc} - & \bullet & + & \bullet & - \\ \hline \text{decrece} & -1 & \text{crece} & 1 & \text{decrece} \end{array}$

   f) $\begin{array}{ccccccccccc} & + & \bullet & - & \bullet & + & \bullet & - & \bullet & + & \\ \hline 0 & \text{crece} & \frac{\pi}{6} & \text{decrece} & \frac{\pi}{2} & \text{crece} & \frac{5\pi}{6} & \text{decrece} & \frac{3\pi}{2} & \text{crece} & 2\pi \end{array}$

   f periódica, de período 2π.

10. Para que valores de a la función $f(x) = senx + ax + b$ es decreciente en todo el eje real.

    Respuesta.

    $a \geq 1$

11. Hallar los máximos y mínimos de las funciones:

    a) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ b) $f(x) = -x^2\sqrt[5]{(x-2)^2}$

    c) $f(x) = xlog^2(x)$ d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

    e) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-2}{x^2+x+1}$ f) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

    g) $f(x) = x\ e^{-x^2/2}$ h) $f(x) = x\sqrt{2-x}$

    Respuesta.

    a) mínimo $f(-2) = -1$, máximo $f(2) = 1$

    b) máximo $f(0) = 0$, mínimo $f\left(\frac{5}{3}\right) \cong -1{,}78$

    c) máximo $f(e^{-2}) = \frac{4}{e^2}$ mínimo $f(1) = 0$

    d) máximo $f(0) = 1$

    e) máximo $f(-2) = 2$, mínimo $f(0) = -2$

    f) mínimo $f(1-\sqrt{2}) \cong -1{,}32$, máximo $f(1+\sqrt{2}) = -0{,}108$

    g) máximo $f(1) = e^{-1/2}$, mínimo $f(-1) = -e^{-1/2}$

    h) máximo $f\left(\frac{4}{3}\right) \cong 1{,}09$

12. Hallar los valores máximo y mínimo absoluto de las funciones siguientes en los intervalos indicados.

    a) $f(x) = x + \sqrt{x}$ en $[0, 4]$

b) $f(x) = Arc\cos x^2$ en $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

c) $f(x) = x^2 log(x)$ en $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, e^3\right]$

d) $f(x) = Arctgx - \frac{1}{2}logx$ en $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$

e) $f(x) = 2senx + sen2x$ en $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$

f) $f(x) = x^3 - 27x + 10$ en $\left[\frac{5}{2}, 6\right]$

g) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $[-2, 2]$

Respuesta.

a) Máximo absoluto $f(4) = 6$ y el mínimo absoluto $f(0) = 0$

b) Máximo absoluto $f(0) = \frac{\pi}{2}$ y mínimo absoluto $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

c) Máximo absoluto $f(e^3) = 3e^6$ no hay mínimo absoluto.

d) Máximo absoluto $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cong 0{,}798$ y mínimo absoluto $f(\sqrt{3}) \cong 0{,}772$

e) Máximo absoluto $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ y mínimo absoluto $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$

f) Máximo absoluto $f(6) = 64$ y mínimo absoluto $f(3) = -44$

13. Hallar los extremos absolutos y relativos de

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si} \quad -4 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^3 - 9x^2 + 24x & \text{si} \quad 0 < x \leq 5 \\ 25 - x & \text{si} \quad 5 < x \leq 12 \end{cases}$$

Respuesta.

Máximo absoluto $f(2) = f(5) = 20$, mínimo absoluto no tiene .

Máximo relativo $f(-4), f(2), f(5)$, mínimo relativo $f(4)$ y $f(12)$

14. Demostrar que la función $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ no tiene valores extremos para $ad \neq bc$.

15. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\left(2-sen\dfrac{1}{x}\right)|x| & \text{si} \quad x\neq 0\\ \\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

demostrar que f tiene un mínimo en $x=0$, pero no es monótona ni a la izquierda ni a la derecha de $x=0$.

16. Demostrar que la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x>0\\ \\ 3x^2 & \text{si} \quad x\leq 0\end{cases}$$

tiene un mínimo en el $x=0$, aunque su primera derivada no cambie de signo al pasar por este punto.

17. *a*) Demostrar que la función $f(x)=x+cosx-a$ es creciente.
    b) Deducir que la ecuación $x+cosx=a$ no tiene raíces positivas para $a<1$ y tiene una raíz positiva para $a>1$.

18. Demostrar que la función $f(x)=x^n+px+q$ no puede tener más de dos raíces reales para n par y más de tres para n impar.

19. Resolver las ecuaciones (por el método de Newton o cualquier otro método de aproximación) con tres cifras decimales correctas.

    a) $1-xlogx=0$ b) $x^3-5x+1=0$

    c) $(x-1)^2-2senx=0$ d) $\dfrac{e^x}{(1-x)^2}=2$

    Respuesta.

    a) $x\cong 1{,}7632$ b) $\cong -2,330;\ 0{,}202;\ 2{,}128$

    c) $\cong 0{,}270;\ 2{,}2485$ d) $0{,}2135$

20. Hallar las concavidades y los puntos de inflexión de las curvas:

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ b) $f(x) = x^{-1}log^2x \ (x>0)$

c) $f(x) = 2 - |x^2-1|$ d) $f(x) = x - \sqrt[5]{(x-3)^2}$

e) $f(x) = log(1+x^2)$ f) $f(x) = x + senx$

Respuesta.

a) $\begin{array}{ccccccc} - & \bullet & + & \bullet & - & \bullet & + \\ \hline \frown & -\sqrt{3} & \smile & 0 & \frown & \sqrt{3} & \smile \end{array}$ puntos de inflexión en $0, \pm\sqrt{3}$

b) $\begin{array}{ccccc} + & \bullet & - & \bullet & + \\ \hline \smile & 1{,}47 & \frown & 13{,}71 & \smile \end{array}$ puntos de inflexión en 1,47, 13,71

c) $\begin{array}{ccccc} - & \circ & + & \circ & - \\ \hline \frown & -1 & \smile & 1 & \frown \end{array}$ no hay puntos de inflexión.

d) $\begin{array}{ccc} - & \bullet & + \\ \hline \frown & 3 & \smile \end{array}$ punto de inflexión en $x = 3$.

e) $\begin{array}{ccccc} - & \bullet & + & \bullet & - \\ \hline \frown & -1 & \smile & 1 & \frown \end{array}$ puntos de inflexión en $x = \pm 1$

f) Para $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ la concavidad es hacia abajo, para $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ la concavidad es hacia arriba, $x = k\pi$ son puntos de inflexión $k \in Z$.

21. Demostrar que los puntos de inflexión de la curva $y = xsenx$ están sobre la curva $y^2(4+x^2) = 4x^2$.

22. Para que valor de μ la curva de probabilidades

$$f(x) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\mu^2x^2} \quad (\mu > 0)$$

tiene puntos de inflexión $x = \pm\sigma$?

Respuesta.

$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$

23. Sea $f''(x) \geq 0$ para todo $a \leq x \leq b$ demostrar que: $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ para cualquier $x_1, x_2 \in [a,b]$

24. Demostrar las siguientes desigualdades:

a) $\frac{2\pi}{x} < senx < x$ si $0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$

c) $(x^{\alpha}+y^{\alpha})^{1/\alpha} > (x^{\beta}+y^{\beta})^{1/\beta} \quad x>0,\ y>0,\ 0<\alpha<\beta.$

25. Estudiar las curvas y construir su gráfica:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ b)$y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$

c)$y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ d) $y = (x-3)\sqrt{x}$

e)$y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ f) $y = 5\sqrt[3]{x^2} - x^3\sqrt{x^2}$

g)$y = 1 - e^{-x^2}$ h)$y = \frac{log|x|}{\sqrt{x}}$

i) $y = x\left[\frac{2x}{3(x+3)}\right]^2$ j) $y = (x+2)e^{1/x}$

k) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

l) $y = Arc\,cos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

m)$y = x^{1/x}$

n) $y = \dfrac{senx}{\sqrt{x}}$

o) $y = senx + cos^2x$

p)$y = sen^4x + cos^4x$

q) $y = \dfrac{cosx}{cos2x}$

r)$y = \dfrac{e^x}{1+x}$

s) $y = (1+x)^{1/x}$

t)$y = \sqrt[x]{\dfrac{x}{1-x}}$

u) $y = Arcsen\dfrac{\sqrt{2}x^2}{2\sqrt{x^4-2x^2+2}}$

v) $y = 2Arctg\dfrac{1-x}{1+x} + \dfrac{2x+1}{x^2+1}$

w)$y = x^2e^x$

x)$y = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$

y)$y = x^2logx$

z)$y = xsenlog(x)$

α) $y = xe^{1/x^2}$

β) $y = x\,e^{-1/x}$

γ) $y = x + \dfrac{logx}{x}$

δ)$y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$

Respuesta.

a) raíces $x=-1$, $x=2$;mínimo $f(2)=0$, máximo $f(0)=4$; inflexión $f(1)=2$

c) raíces $x=\pm 1$; discontinuidades $x=2, x=3$ mínimo $\cong f(0{,}42)=-0{,}2$. máximo $\cong f(2{,}38)=-19{,}80$. Inflexión para $\cong f(-0{,}58)=-0{,}07$, asíntotas $x=2, x=3$ e $y=1$

e) raíz $x=2$ mínimo $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{5}$. Inflexiones $\cong f(-1{,}18)=-2{,}06$; $\cong f(0{,}42)=-1{,}46$, asíntotas $y=-1$ para $x\to-\infty, y=1$ para $x\to+\infty$.

g) raíz $x=0$, mínimo $f(0)=0$. Inflexiones $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{e}}$ asíntota $y=1$

i) raíz $x=0$, discontinuidad $x=-3$; máximo $f(-9)=-9$. Inflexión $f(0)=0$ asíntotas: $y=\frac{4}{9}x-\frac{8}{3}$ para $x\to\pm\infty$ y $x=-3$

k) raíz $x=0$, discontinuidad $x=1$; máximo $f(0)=0$, mínimo $f(2)=4$; no hay inflexiones. Asíntotas $y=x+1$ para $x\to\pm\infty$ y $x=1$

m) Dom $f(x)>0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ máximo $f(e)=e^{1/e}$ Asíntota: $y=1$

o) Período 2π luego para $0\le x\le 2\pi$: raíces $\cong 1{,}21\pi$; $1{,}79\pi$; mínimos $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f\left(3\frac{\pi}{2}\right)=-1$; máximo $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5}{4}$; inflexiones $\cong f(0{,}32\pi)=1{,}13=f(0{,}68\pi)$; $f(1{,}20\pi)=0{,}055=f(1{,}80\pi)$

q) Período 2π luego para $-\pi \leq x \leq \pi$. Simetría respecto eje y. Raíces $x = \pm\frac{\pi}{2}$; mínimo $f(0) = 1$,máximo $f(\pm\pi) = -1$. Inflexiones $f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Asíntotas $x = \pm\frac{\pi}{4}$, $x = \pm\frac{3\pi}{4}$

s) Dom $f : x > -1, x \neq 0$; $f(x) > 0$ discontinuidad evitable en $x = 0$. No hay puntos de extremos; siempre decreciente. Concavidad hacia arriba. Asíntotas:$x = -1$ e $y = 1$.

u) Función para Dom$f = (-\infty, \infty)$ y continua raíz $x = 0$. Máximo $f(\pm\sqrt{2}) \cong 1{,}57$. No tiene inflexiones, siempre cóncava hacia arriba $f''(x) > 0$, asíntotas $y = \frac{\pi}{4}$

w) Dom$f = (-\infty, \infty)$, raíz $x = 0, f(x) \geq 0$; máximo $f(-2) \cong 0{,}54$, mínimo $f(0) = 0$. Inflexiones $f(-2-\sqrt{2}) \cong 0{,}38$, $f(-2+\sqrt{2}) \cong 0{,}19$. Asíntota $y = 0$ para $x \to -\infty$.

y) Dom $f = (0, \infty)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$; raíz $x = 1$, mínimo $f(e^{-1/2} \cong -0{,}18$ siempre cóncava hacia arriba. No tiene asíntotas.

γ) Dom $f = (0, \infty)$, raíz $x \cong 0{,}655$. Siempre creciente. Inflexión $f(e^{3/2} \cong 4{,}816$. Asíntota $y = x$ para $x \to +\infty$. En $x = 1$ la curva corta a su asíntota.

26. Sabiendo que $f(1) = f(3) = f(-2) = 0$ y que $f'(x)$ tiene el siguiente gráfico:

    Bosquejar el gráfico de la función, señalando: máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sentido de la concavidad y puntos de inflexión.

27. Dado el gráfico de $y = f(x)$ en el intervalo $[0, a]$. Hallar la forma del gráfico de la antiderivada

$$\int_0^x f(t)dt$$

28. Estudiar las curvas dadas en forma paramétrica.

a) $x = 2t - t^2,\ y = 3t - t^3$ b) $x = \dfrac{t^2}{1-t^2},\ y = \dfrac{1}{1+t^2}$

c) $x = \dfrac{t^2}{t-1},\ y = \dfrac{1}{t^2-1}$ d) $x = 2sen2t,\ y = cos^3t$

e) $x = t + e^{-t},\ y = 2t + e^{-2t}$ f) $x = \dfrac{a}{cos^3t},\ y = a\,tg^3t\ (a > 0)$

g) $x = tlog(t),\ y = \dfrac{1}{t}log(t)$

Respuesta.

a) Puntos de intersección con los ejes coordenados para $t = 0$, $t = \pm\sqrt{3}$ y $t = 2$
$x_{max} = 1$ e $y_{max} = 2$ para $t = 1$ $\quad y_{min} = -2$ para $t = -1$

Concavidad hacia arriba para $t < 1$ y concavidad hacia abajo para $t > 1$.

(c) Punto de intersección con $(0, 0)$ para $t = 0$. $x_{max} = 0$ para $t = 0$, $x_{min} = 4$ para $t = 2$; y decrece cuando t crece. Punto de inflexión $\cong (-0{,}08,\ 0{,}3)$ para $t \cong 0{,}32$.

(e) Las funciones x e y son positivas: $x_{min} = 1$ e $y_{min} = 1$ para $t = 0$. Concavidad hacia arriba para $t < 0$, concavidad hacia abajo para $t > 0$. Asíntota $y = 2x$ para $t \to +\infty$.

(g) $t > 0$. Simetría respecto a la recta $y = -x$; $x_{min} = -\frac{1}{e}$, $y = -e$ para $t = \frac{1}{e}$; $y_{max} = \frac{1}{e}$; $x = e$ para $t = e$.
Puntos de inflexión $x_1 \cong -0{,}34$, $y_1 \cong -5{,}82$ para $t \cong 0{,}24$ y $x_2 \cong 5{,}82$, $y_2 \cong 0{,}34$ para $t \cong 4{,}10$. Cuando $t = \frac{1}{e}$ cambia el sentido de la concavidad. Asíntotas $x = 0$ e $y = 0$.

29. Expresando las ecuaciones en forma paramétrica, estudiar las curvas:

a) $x^3 + y^3 = 3axy (a > 0)$

b) $x^2y^2 = x^3 - y^3$

c) $y^x = x^y \quad (x > 0,\ y > 0)$

Respuesta.

a) $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ estudio análogo al problema resuelto N°51 a) con $a = 1$

b) Hacer $y = tx$, $x = \frac{1-t^3}{t^2}$; $y = \frac{1-t^3}{t}$. La curva tiene dos ramas. Simetría con respecto a $y = -x$. $x_{min} \cong 1{,}89$ $\quad y = -2{,}38$ para $t \cong -1{,}26$; $\quad y_{max} \cong -1{,}89$, $x \cong 2{,}38$ para $t \cong -0{,}79$. Puntos de inflexión: $x_1 \cong 2{,}18$, $y_1 \cong -4{,}14$ para $t \cong -1{,}90$; $x_2 \cong 4{,}14$, $y_2 \cong -2{,}18$ para $t \cong -0{,}53$. Para $t = -\sqrt[3]{2}$ la concavidad cambia de sentido.

c) La curva consta de la recta $y = x$ y de la rama hiperbólica $x = (1+t)^{1/t}$, $y = (1+t)^{1+1/t} (-1 < t < \infty)$, (e, e) es un punto doble concavidad hacia arriba para $x = y$. Asíntotas $x = 1$; $y = 1$.

30. Muestre que f es cóncava hacia arriba en un intervalo si y solamente si, para todo x e y se tiene que:

$$f[tx + (1-t)y] < tf(x) + (1-t)f(y);\ 0 < t < 1.$$

31. Determine los valores de a, b, c para que el gráfico de $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tenga a $(-1, 1)$ como punto de inflexión de f, si la pendiente es 2.

    Respuesta.

    $a = -\frac{2}{3},\ b = -2,\ c = 7/3$

32. Halle las dimensiones de un cilindro recto circular, de máximo volumen, que puede ser inscrito en un cono circular de radio $r = 5cm$ y altura $h = 12cms$.

    Respuesta.

    $h_c = 4;\ r_c = \frac{10}{3}$

33. Halle las dimensiones del máximo cilindro recto circular que se puede inscribir en una esfera de radio $12cms$

    Respuesta.

    $r = 4\sqrt{6}cms.;\ h = 8\sqrt{3}cms$

34. Entre todos los cilindros circulares rectos de área lateral dada, pruebe que la esfera circunscrita más pequeña tiene un radio $\sqrt{2}$ veces el del cilindro.

35. Encuentre el trapezoide de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, siendo la base inferior al diámetro.

    Respuesta.

    Trapezoíde isósceles, base superior igual al radio.

36. Muestre que entre todos los rectángulos que tienen un perímetro dado, el cuadrado es el de área máxima; entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el de perímetro mínimo.

37. Muestre que para cualquier par de números reales a y b la función $f(x) = (x - a)(x - b)$ tiene un mínimo (absoluto) en $\frac{1}{2}(a + b)$ y es $-\frac{(a-b)^2}{4}$.

38. En la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ inscribir un rectángulo con los lados paralelos a los ejes de la elipse, de modo que su área sea máxima.

    Respuesta.

Rectángulo de lados $a\sqrt{2}$ y $b\sqrt{2}$

39. En un triángulo de base b y de altura h inscribir un rectángulo de perímetro máximo.

    Respuesta.

    Si $h > b$, el perímetro P del rectángulo inscrito de base x y altura y tiene un máximo en $y = h$; si $h < b$, el perímetro P tiene un mínimo en $y = 0$; si $h = b$, P es constante.

40. Un alambre de $400mts.$ de largo, se divide en 2 partes una de las cuales sirve de perímetro de un triángulo equilatero y la otra de perímetro de un cuadrado. ¿Cuál es la longitud de cada una de las partes, para que la suma de las áreas de las figuras sea: mínima, máxima?

    Respuesta.

    Mínimo absoluto $A(75{,}38) \cong 4349{,}64mts^2$

    Máximo absoluto $A(0) = 10{,}000mts^2$

41. Se desea construir un recipiente de hojalata de $1lt.$, formado por un cilindro recto y una semiesfera en el fondo. Encontrar las dimensiones del recipiente de modo que se ocupe una mínima cantidad de lata.

    Respuesta.

    Radio de la esfera $=$ radio del cilindro $= \sqrt[3]{\dfrac{3}{2\pi}}$

42. Inscribir en una semiesfera de radio r un paralelepípedo rectángular con la base cuadrada de volumen máximo.

    Respuesta.

    Paralelepípedo, lado de la base $\dfrac{2r}{\sqrt{3}}$ y altura $\dfrac{r}{\sqrt{3}}$.

43. Hallar las distancias mínima y máxima del punto $A(2,0)$ a la circunferencia $x^2+y^2 = 1$

    Respuesta.

    Mínimo 1, máximo 3

44. Trazar por el punto $P(x,y)$ de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ una tangente que forme con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

    Respuesta.

    $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$; $y=\frac{b}{\sqrt{2}}$

45. Una ventana normanda tiene forma de rectángulo coronado por un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. La porción rectangular es de cristal transparente y la parte circular es de cristal de color que admite sólo la mitad de luz por metro cuadrado que el cristal transparente. Si el perímetro de la ventana es 20m. determine sus dimensiones de manera que deje pasar el máximo de luz posible.

    Respuesta.

    Radio del semicírculo $\cong 2{,}30m$ altura del rectángulo $\cong 4{,}10m$.

46. La sección transversal de un corral abierto tiene la forma de un trapecio isósceles. ¿Cuál debe ser la inclinación de los costados para que el perímetro mojado de la sección sea mínimo, si el área de la sección del agua en el corral es igual a S y el nivel del agua es igual a h?

    Respuesta.

    $60°$

47. A un río de ancho a, se le ha construído un canal de ancho b, que forma con el mismo un ángulo recto. ¿Cuál es la longitud máxima de los barcos que pueden navegar por este canal?

    Respuesta.

    $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ ver problema resuelto N 49.

48. Se dispone de $120m$. de malla metálica con la que se pretende cercar un huerto rectangular, aprovechando para ello una pirca existente que mide $50m$. de largo. ¿Cuál es la máxima área que podrá darse a tal huerto?

    Respuesta.

    A máxima $1750m^2$.

49. Se desea determinar las dimensiones para un estanque cilíndrico refrigerado de capacidad $1000m^3$ de modo que su costo sea mínimo. Las componentes del costo son: Metales de los extremos \$1 por m^2. Metal de la pared cilíndrica \$0,5 por m^2. Costo de refrigeración (sobre la vida útil del estanque) \$5 por m^2 de superficie. Por razones de diseño el diámetro del cilindro no puede exceder I) de 10 m. II) de 8 m.

    a) Formule el modelo matemático correspondiente empleando el largo L y el diámetro D como variables.

    b) Solucione el problema e indique si su óptimo es absoluto o relativo.

    c) Dé una estimación de cuánto se podría reducir el costo, si el diámetro no estuviera restringido en cada caso.

50. Se necesita mover una carga de peso w, situado en un plano horizontal áspero, mediante la aplicación de una fuerza. ¿Cuál debe ser la inclinación de esta fuerza respecto del horizonte, para que su magnitud sea mínima, si el coeficiente de roce de la carga es μ?

    Respuesta.

    $Arctg\ \mu$

51. Un trozo de madera de $12m.$ de largo tiene forma de un tronco de cono circular recto de diámetros $4m.$ y $(4+h)$ en sus bases, donde $h \geq 0$. Determinar en función de h el volumen del mayor cilindro circular recto que se puede cortar de este trozo de madera, de manera que su eje coincida con el del tronco de cono.

    Respuesta.

    $V = 48\pi$ para $0 \leq h < 2$; $V = 4\pi\frac{(4+h)^3}{9h}$ para $h \geq 2$. Ver problema resuelto N°43.

52. Si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 1. Hallar el mayor valor de $2a+b$.

    Respuesta.

    $\sqrt{5}$

53. Un cilindro se ha obtenido haciendo girar un rectángulo alrededor del eje x, tal que su base está en el eje x, y todo el rectángulo está comprendido en la región comprendida entre la curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ y el eje x. Hallar el cilindro de volumen máximo.

    Respuesta.

    $\frac{\pi}{4}$