Capítulo 8

Las Técnicas del Cálculo Derivación

8.1. Derivación de Funciones Compuestas (Regla de la Cadena)

Sean f y g dos funciones, g diferenciable en x_0 y f diferenciable en $u_0 = g(x_0)$, $u = g(x)$, la función compuesta $f\ o\ g$ es diferenciable en x_0, y:

$[f\,o\,g]'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$ ó también si

$y = F(x) = f(g(x))$ entonces $\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$ en $x = x_0$ o bien $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

De igual forma: $(f\,o\,g\,o\,h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x) \cdot h'(x)$ y así sucesivamente.

8.2. Derivada de la Función Inversa

Sea $y = f(x)$ continuas y monótona, en un intervalo, que es diferenciable en un punto x_0 del intervalo, siendo $\dfrac{dy}{dx} = f'(x_0) \neq 0$.

Si $\triangle x$ y $\triangle y$ representan los incrementos correspondientes de las dos variables en el punto x_0, tenemos

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0).$$

De lo anterior se sigue que existe una función inversa $x = f^{-1}(y)$ que es continua, a lo menos en el punto $y_0 = f(x_0)$ y $\displaystyle\lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle y} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{\frac{\triangle y}{\triangle x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$ ya que cuando

$\triangle y \to 0$ también $\triangle x \to 0$.

8.3. Fórmulas de Derivación de las Funciones Básicas

Sea u y v funciones de x derivables en un punto.

1. $(u^n)' = n\, u^{n-1}u'$
2. $(senu)' = (cos\, u)u'$
3. $(cosu)' = (-senu)u'$
4. $(tgu)' = (sec^2 u)u'$
5. $(cotgu)' = (-cosec^2 u)u'$
6. $(secu)' = (sec\, u\, tg\, u)u'$
7. $(cosecu)' = (-cosec\, u\, cotgu)u'$
8. $(\log\, u)' = \dfrac{1}{u}u'$
9. $(a^u)' = a^u \log\, a \cdot u'$
10. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
11. $(senh\, u)' = (cos\, h\, u)u'$
12. $(cos\, h\, u)' = (sen\, h\, u)u'$
13. $(Arc\, senu)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = -(Arcos\, u)',\ |u| < 1$
14. $(Arc\, tg\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2} = -(Arc\, cotg\, u)'$
15. $(Arc\, sec\, u)' = \dfrac{u'}{|u|\,\sqrt{u^2-1}} = -(Arc\, cosec\, u)',\ |u| > 1$

8.4. Derivadas de Orden Superior

Si la derivada de orden $(n-1)$ de una función $y = f(x)$ existe entonces la derivada de orden n se determina mediante:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

En particular $f''(x) = [f'(x)]';\ f'''(x) = [f''(x)]'$ y así sucesivamente.

Si u y v son funciones derivables n veces, entonces

$$(c_1 u + c_2 v)^{(n)} = c_1\, u^{(n)} + c_2\, v^{(n)} \text{ donde } c_1 \text{ y } c_2$$

son constantes arbitrarias.

Regla de Leibniz.

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}, \quad \text{donde}$$

$$\tbinom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \text{y } u^{(0)} = u;\ v^{(0)} = v.$$

8.5. Derivada de una Función Implícita

Si una función derivable $y = f(x)$ satisface la ecuación $F(x, y) = 0$ entonces derivamos la ecuación respecto de x, considerando que y es función de x, es decir $\dfrac{d}{dx}F(x, y) = 0$ y despejamos $y' = f'(x)$.

Para hallar $f''(x)$ se vuelve a derivar respecto de x, la ecuación obtenida y así sucesivamente.

8.6. Derivada de una Función Representada Paramétricamente

Si el sistema de ecuaciones:

$$x = \phi(t);\ y = \psi(t), \alpha < t < \beta$$

donde $\phi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones derivables y $\phi'(t) \neq 0$, define a $y = f(x)$ como una función continua de x, entonces existe una derivada

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

las derivadas de ordenes superiores, se obtiene mediante

$$f''(x) = \frac{[f'(x)]'_t}{\phi'(t)};\ f'''(x) = \frac{[f''(x)]'_t}{\phi'(t)}; \cdots$$

en particular para $f''(x)$ se obtiene la fórmula

$$f''(x) = \frac{\phi'(t)\ \psi''(t) - \phi''(t)\ \psi'(t)}{[\phi'(t)]^3}$$

8.7. Problemas Resueltos

1. Sea $f(x) = x^r;\ r \in \mathbb{R}$ entonces $f'(x) = rx^{r-1} \quad (x \neq 0)$

   Demostración.

   Sea $x^r = e^{r \log x}$, en virtud a la regla de la cadena $(x^r)' = e^{r \log x}(r \log x)' = x^r r \frac{1}{x} = rx^{r-1}$

2. Obtenga fórmulas para:

   a) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$
   b) $1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + n^2x^n$

   Solución.

   a) Considerando la P.G. de razón x, se tiene:

   $$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = (x^{n+1} - 1)/(x - 1),$$

   para $x \neq 1$, derivando:

   $$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} =$$

   $$\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

   b) Multiplicando la relación encontrada en (a), por x, se obtiene:

   $$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2},$$

   derivando nuevamente, multiplicando por x, y ordenando:

   $$1^2x + 2^2x^2 + \cdots + n^2x^n =$$

   $$\frac{n^2x^{n+3} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+2} + (n+1)^2x^{n+1} - x^2 - x}{(x-1)^3}$$

3. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables con $f(x) \neq 0$, considerando la función $h(x) = f(x)seng(x)$, probar que en los puntos donde las gráficas de $h(x)$ y $f(x)$ se tocan, ellas tienen la misma tangente.

   Prueba: Cuando las gráficas se tocan $\Longrightarrow f(x) = h(x) \Longrightarrow f(x) = f(x)\, seng(x)$ como $f(x) \neq 0 \Longrightarrow seng(x_0) = 1 \Longrightarrow g(x_0) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; (k \in Z)$ pendiente de $h(x)$, $m_1 = h'(x) = f'(x)seng(x) + sen'\, g(x) \cdot g'(x) \cdot f(x)$ pendiente de $f(x)$, $m_2 = f'(x)$, por mostrar que: $h'(x_0) = f'(x_0)$ en efecto: $h'(x_0) = f'(x_0) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot f(x_0) = f'(x_0)$

4. Determine $f'(x)$ si:

   a) $f(x) = |x|^3$

   b) $f(x) = \log \left(\dfrac{1 + senx}{1 - senx}\right)^{1/2}$

   c) $f(x) = (x + \sqrt{1 + x^2})^{1/2}$

   d) $f(x) = (tgx + senx)/cosx$

   Solución.

   a) Como $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$ es inmediato:

   $$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases}$$

   b) Como $f(x) = \dfrac{1}{2} \log \left(\dfrac{1 + senx}{1 - senx}\right) \Longrightarrow$

   $$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1 - senx}{1 + senx} \cdot \frac{(1 - senx)cosx - (1 + senx)(-cosx)}{(1 - senx)^2}$$

   $$= \frac{1}{2}\frac{2\,cosx}{(1 - sen^2x)} = 1/cosx$$

   c)

   $$f'(x) = \frac{1}{2(x + \sqrt{1 + x^2})^{1/2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x\right) = \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})^{1/2}}{2\sqrt{1 + x^2}}$$

   d)

   $$f'(x) = \frac{cosx(tgx + senx)' - (tgx + senx)(cosx)'}{cos^2x} =$$

   $$\frac{cosx(sec^2x + cosx) - (tgx - senx)(-senx)}{cos^2x}$$

5. Hallar y'', y''' de $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Solución.

$$D(x^2+y^2-1)=0 \Longrightarrow 2x+2yy'=0 \Longrightarrow y'=-\frac{x}{y} \Longrightarrow y''=\left(-\frac{x}{y}\right)'$$

$$\Longrightarrow y''=-\frac{y-xu'}{y^2}=-\frac{y-x(-x/y)}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3} \Longrightarrow y'''$$

$$=\left(-\frac{1}{y^3}\right)' \Longrightarrow y'''=\frac{3y'}{y^4} \Longrightarrow y'''=\frac{3}{y^4}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{3x}{y^5}$$

6. *a)* $y=t^3+1;\ x=t^2+3$, hallar y'''

   b) Si $y=\dfrac{1}{u-1},\ x=\dfrac{u}{u^2-1}$ encuentre y''.

Solución.

a)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t;\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}t\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t}=\frac{3}{4t}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4}t^{-1}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}=-\frac{3}{4}t^{-2}\frac{1}{2t}=\frac{3}{8t^3}$$

b) $\dfrac{dy}{du}=-(u-1)^{-2};\ \dfrac{dx}{du}=\dfrac{(u^2-1)\cdot 1-u\cdot 2u}{(u^2-1)^2}=-\dfrac{u^2+1}{(u^2-1)^2}$

luego: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(u+1)^2}{u^2+1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{du}\frac{(u+1)^2}{u^2+1}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{(u^2+1)2(u+1)-(u+1)^2 2u}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{1}{dx/du}$$

$$=-2\frac{u^2-1}{(u^2+1)^2}\left(-\frac{(u^2-1)^2}{u^2+1}\right)=2\frac{(u^2-1)^3}{(u^2+1)^3}$$

7. Sea $f'(x)=x^2\, sen\dfrac{1}{x}$ para $x\neq 0$, y sea $f(0)=0$, suponga que h y k son dos funciones tales que:

$$k'(x)=f(x+1);\ k(0)=0;\ h'(x)=sen^2[sen(x+1)];\ h(0)=3$$

Encuentre

a) $(f\,o\,h)'(0)$

b) $(k\,o\,f)'(0)$

c) $\alpha'(x^2)$ donde $\alpha(x) = h(x^2)$.

Solución.

a) $(f\,o\,h)'(0) = f'(h(0)) \cdot h'(0) = f'(3)sen^2(sen1) = 9sen\dfrac{1}{3} \cdot sen^2(sen1)$

b) $(k\,o\,f)'(0) = k'(f(0)) \cdot f'(0) = k'(0) \cdot f'(0) = f(1) \cdot 0 = 0$

c) $\alpha'(x^2) = h'(x^4)4x^3 = sen^2[sen(x^4+1)]4x^3$

8. Si $y = f(u) \wedge u = g(x)$, pruebe que:

   a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2y}{du^2} \cdot \left(\dfrac{du}{dx}\right)^2$

   b) $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{d^3u}{dx^3} + 3\dfrac{d^2y}{du^2} \cdot \dfrac{d^2u}{dx^2} \cdot \dfrac{du}{dx} + \dfrac{d^3y}{du^3} \cdot \left(\dfrac{du}{dx}\right)^3$

Solución.

a)
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\right) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

b)
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right] =$$

$$\frac{dy}{du}\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{du^2}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 +$$

$$2\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dy}{du}\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^3y}{du^3}\frac{du}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

$$+2\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dy}{du}\frac{d^3u}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{du^2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{du}{dx} + \frac{d^3y}{du^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3$$

9. Si $f(x) = \dfrac{senx}{2cos^2x} - \log\sqrt{tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)}$; $g(x) = -3cosx$, pruebe que:

$$f'(x) + 1/cos^3x = 2cosx\, f''(x)/g'(x)$$

Prueba.
De inmediato: $g'(x) = -3(-senx) = 3senx$ como $f(x) =$

$senx/2cos^2x - \dfrac{1}{2}\log\left(tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)\right)$, luego:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{cos^2x\, cosx + senx\, 2cosx\, senx}{cos^4x}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$$

$$\cdot sec^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{(1 + sen^2x)}{cos^3x} + \frac{1}{4}\frac{1}{sen(\pi/4 - x/2)cos(\pi/4 - x/2)} =$$

$$\frac{1 + sen^2x}{2\,cos^3x} + \frac{1}{2\,sen2(\pi/4 - x/2)}$$

$$f'(x) = \frac{1 + sen^2x}{2cos^3x} + \frac{1}{2sen(\pi/2 - x)} = \frac{1 + sen^2x}{2cos^3x} + \frac{1}{2cosx} =$$

$$\frac{1 + sen^2x + cos^2x}{2cos^3x} = \frac{1}{cos^3x}$$

$$f''(x) = \frac{3\,cos^2x\ senx}{cos^6x} = \frac{3senx}{cos^4x} \text{ con lo que:}$$

$$f'(x) + \frac{1}{cos^3x} = \frac{2}{cos^3x}, \text{ y } \quad 2\,cosx\, f''(x)/g'(x)$$

$$= 2\,cosx\ 3senx/3senx\ cos^4x = 2/cos^3x$$

10. Siendo $(a - bx)e^{y/x} = x$; probar que: $x^3y'' = (xy' - y)^2$

Prueba.
Tomando $\log(a - bx) + y/x = \log\, x$, derivando implícitamente

$$\frac{1}{a - bx}(-b) + \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{1}{x} \Longrightarrow xy' - y = \frac{ax}{a - bx} \Longrightarrow (xy' - y)^2 = \frac{a^2x^2}{(a - bx)^2} \quad (1)$$

derivando nuevamente:

$$xy'' + y' - y' = \frac{(a-bx)a - ax(-b)}{(a-bx)^2} = \frac{a^2}{(a-bx)^2}, \text{ de donde:}$$

$$x^3y'' = \frac{a^2x^2}{(a-bx)^2} \text{ (2) finalmente por } \quad (1)y(2);$$

$$x^3y'' = (xy' - y)^2.$$

11. Si $y = sen(senx)$ pruebe que: $y'' + tgx\ y' + ycos^2x = 0$

 Prueba.
 $y' = cos(senx)\, cosx$; $y'' = -sen(senx)cos^2x + cos(senx)(-senx)$ luego: $y'' + tgxy' + ycos^2x = -cos^2x\, sen(senx) - senx\, cos(senx) + (senx/cosx) \cdot cos(senx)\, cosx + cos^2x\, sen(senx) = 0$

12. Si $x = tg\sqrt{y}$, pruebe que: $(x^2+1)^2y'' + 2x(x^2+1)y' = 2$

 Prueba.

 $$x = tg\sqrt{y} \Longrightarrow y = (arctg\, x)^2 \Longrightarrow y' = 2\, arctgx \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

 $$\Longrightarrow y'' = 2\left[\frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^2+1} + arctgx \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right]$$

 con lo que:

 $$(x^2+1)^2(2/(x^2+1)^2)(1 - 2x\, arctgx) + 2x(x^2+1)2\, arctg\, x(1/(x^2+1)) = 2$$

13. Encuentre $F'(x)$, siendo:

 a) $F(x) = \displaystyle\int_x^{sen^2x} \frac{sent}{1+e^t}\, dt$

 b) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{secx} te^{t^2}\, dt$

 Solución.

 a) Por teorema fundamental del cálculo: $F(x) = \phi(sen^2x) - \phi(x)$; tal que: $\phi'(x) = \dfrac{senx}{1+e^x}$, luego: $F'(x) = \phi'(sen^2x) \cdot 2senx \cdot cosx - \phi'(x) = \dfrac{sen(sen^2x)}{1+e^{sen^2x}}\, sen\, 2x - senx/(1+e^x)$ Análogamente:

 b) $F(x) = \phi(secx) - \phi(x^2)$, tal que:

 $$\phi'(x) = xe^{x^2}, \text{ luego : } \quad F'(x) = \phi'(secx)secx\, tgx - \phi'(x^2)2x$$

 $$= secx\, e^{sec^2x} secx\, tgx - x^2\, e^{x^4} \cdot 2x = sec^2xtg\, xe^{sec^2x} - 2x^3e^{x^4}.$$

14. Asumiendo que la siguiente ecuación define implícitamente una función y de x, ecuentre y'.

$$x\,sen\,xy + \int_{\sqrt{y}}^{x^2 seny} \frac{sent}{t}dt = 1$$

Solución.

Sea $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{x^2 seny} \frac{sent}{t}dt = \phi(x^2 seny)$

$-\phi(\sqrt{y})$, tal que $\phi'(t) = \dfrac{sent}{t}$ luego:

$$F'(x) = \phi'(x^2 seny)(x^2 seny)' - \phi(\sqrt{y})(\sqrt{y})' = \frac{sen(x^2 seny)}{x^2 seny}$$

$$(2xseny + x^2 cosy \cdot y') - \frac{sen\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\frac{1}{2\sqrt{y}}y' = \left[sen(x^2 seny)cotgy - \frac{sen\sqrt{y}}{2y}\right]$$

$$y' + \frac{2\,sen(x^2 seny)}{x}$$

entonces derivando implícitamente en la ecuación dada, obtenemos: $sen(xy) + xcos(xy)(y + xy') + F'(x) = 0$ finalmente despejando y', y ordenando queda:

$$y' = \frac{2sen(xy) + 2xycos(xy) + 4x^{-1}sen(x^2 seny)}{y^{-1}sen\sqrt{y} - 2x^2 cos(xy) - 2cotgy\,sen(x^2 seny)}$$

15. Encuentre $F'(x)$, si : $F(x) = \displaystyle\int_3^{\int_a^x sen^3 tdt} (1 + e^{sent} + tcost)dt$

Solución.

$$F(x) = \phi\left(\int_a^x sen^3 tdt\right)\left(\int_0^x sen^3 tdt\right)' - \phi'(3)\cdot 0$$

$$= \left(1 + e^{sen\int_a^x sen^3 tdt} + \left(\int_a^x sen^3 tdt\right)\cdot cos\int_0^x sen^3 tdt\right)\cdot sen^3 x$$

16. Hallar la derivada n-ésima de:

   a) $f(x) = \dfrac{a-x}{a+x}$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}$

   c) $f(x) = senx$

Solución.

a)

$$f'(x) = \frac{-(a+x)-(a-x)}{(a+x)^2} = \frac{-2a}{(a+x)^2} = -2a(a+x)^{-2};$$

$f''(x) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 2!a(a+x)^{-3}$

$f'''(x) = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3!a(a+x)^{-4}$ e inductivamente se llega

$y^{(n)} = (-1)^n \cdot 2a \cdot n!(a+x)^{-(n+1)}$

b) Descomponiendo en fracciones parciales:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-2)}$$

$1 = A(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)^2 \Longrightarrow$

$A = -1;\ C = 1;\ B = -1$

y derivando n-veces cada sumando por separado obtenemos:

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}; \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}};$$

$$\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n(n+1)}{(x-1)^{n+2}},$$

sumando las tres expresiones obtenemos $y^{(n)}$.

c)

$f'(x) = cosx; f''(x) = -senx; f'''(x) = -cosx;$

$f^{iv}(x) = senx; \cdots ; f^{(n)}(x) = sen\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right)\ (k \in Z)$

A modo de prueba, verifique estas fórmulas por Inducción Matemática.

17. Empleando la fórmula de Leibniz, halle $y^{(n)}$ si:

$$y = (1-x^2)cosx$$

Solución.

$$y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos^{(n-k)}x(1-x^2)^{(k)} = \binom{n}{0} cos^{(n)}x(1-x^2)^{(0)}$$

$$+\tbinom{n}{1}cos^{(n-1}x(-2x) + \tbinom{n}{2}cos^{(n-2)}x(-2) + \tbinom{n}{3}cos^{(n-3)}x \cdot 0 + 0 + \cdots ,$$

de donde obtenemos:

$$y^{(n)} = (1-x^2)cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - 2nxcos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

$$-n(n-1)cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$

18. Derive con respecto a x:

a) $y = (x^2+1)^{e^x}$

b) $y = (cosx)^{2x}\, e^x$ en $x = 0$

Solución.

a)

$$\log y = e^x \log(x^2+1) \Longleftrightarrow \frac{1}{y}y' = e^x \log(x^2+1) + e^x \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$

$$\Longleftrightarrow y' = e^x (x^2+1)^{e^x}\left[\log(x^2+1) + \frac{2x}{x^2+1}\right]$$

análogamente

b)

$$\log y = 2x\log(cosx) + \log(e^x) = 2x\log(cosx) + x$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{y}y' = 2\left[\log(cosx) + x\frac{1}{cosx}\cdot(-senx)\right] + 1 \Longleftrightarrow$$

$$y' = (cosx)^{2x}e^x\{2[\log(cosx) - xtgx] + 1\} \Longrightarrow y'_{x=0} = 1$$

19. Derivar respecto a x:

a) $y = x^{cos^2x}\log(tg\, e^{\sqrt{x}})$

b) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\, e^{Arctgx}$

Solución.

a)

$$\log(y) = cos^2x\ \log x + \log(\log(tg\ e^{\sqrt{x}}))$$

$$\frac{1}{y}y' = -2cosx\, senx \log x + (cos^2x)\frac{1}{x} + \frac{1}{\log(tge^{\sqrt{x}})} \cdot \frac{1}{tge^{\sqrt{x}}}$$

$$\cdot sec^2 e^{\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b)

$$\log y = \log\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + Arctgx = \log(1+x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + Arctgx$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow y' = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}e^{Arctgx}$$

$$\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2}\right)$$

20. Siendo $f(x) = \displaystyle\int_0^x (1 + sen(sent))dt$, calcular $(f^{-1})'(0)$

Solución.

$$\frac{df}{dx} = (1 + sen(senx)) \Longleftrightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{df}{dx}}$$

$$\Longrightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{1 + sen(senx)} \Longleftrightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{1 + sen(sen0)} = 1$$

21. Muestre que la derivada de $f(x) = 2Arc\,tg\dfrac{1}{x} + Arctg\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x}\right)$ es 0 en todo el dominio de f. Sin embargo, $f(x)$ no es constante. ¿Contradicción?

Solución.

$$f'(x) = 2\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} + \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x^2}}{1 + (\frac{x}{2} - \frac{1}{2x})^2} = \frac{-2}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} = 0$$

pero f no es constante porque $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$ y $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ esto no contradice el teorema en cuestión puesto que f no está definida en un intervalo sino que en una unión de intervalos $(x \neq 0)$.

22. Demostrar que: $sen^2x < senx^2$ para $0 < x < \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Demostración.

Consideremos $1 < x < \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ aquí se tiene que $x < x^2 \Longrightarrow senx < senx^2$; además $0 < senx < 1 \Longrightarrow sen^2x < senx$ así se obtiene: $sen^2x < senx^2$ ahora para $0 < x \leq 1$ sea $f(x) = sen^2x - senx^2 \Longrightarrow f'(x) = 2senx\,cosx - 2xcosx^2$ pero $senx < x$ y $x^2 \leq x$

luego: $cosx \leq cosx^2$ así $f'(x) < 0$ luego f es decreciente en $0 < x \leq 1$ y $f(0) = 0$; $x > 0 \Longrightarrow f(0) > f(x) \Longleftrightarrow 0 > sen^2x - senx^2 \Longleftrightarrow sen^2x < senx^2$

23. Sea $f(x)$ con dominio $-\pi < x < \pi$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-cosx}}{senx} & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ \left(\dfrac{x^2-\sqrt{2}}{\pi}\right) Arccos\left(\dfrac{x}{\pi}\right) + \dfrac{x}{2}\sqrt{10-x^2} & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

a) ¿$f(x)$ es continua en todo su dominio?

b) ¿Tiene derivada en todo su dominio? Calcule la derivada donde sea posible.

Solución.

a) Punto crítico a estudiar $x = 0$, obsérvese que $f(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, ahora calculemos el

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-cosx}}{senx} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-cos^2x}}{senx\sqrt{1+cosx}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{|senx|}{senx\sqrt{1+cosx}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-senx}{senx\sqrt{1+cosx}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

luego f es continua en todo su dominio.

b) Si $-\pi < x < 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\frac{sen^2x}{\sqrt{1-cosx}} - \sqrt{1-cosx}cosx}{sen^2x}$

$$\text{Si } 0 < x < \pi,\ f'(x) = \tfrac{2x}{\pi}\, Arc\cos\left(\frac{x}{\pi}\right) + \left(\frac{x^2-\sqrt{2}}{\pi}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\pi^2}}}\cdot\frac{1}{\pi}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{10-x^2}+\frac{x}{2}\frac{1}{2}\frac{(-2x)}{\sqrt{10-x^2}}$$

de inmediato $f'_+(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi^2} + \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ determinemos

$$f'_-(0) = \lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{f(0+\triangle x)-f(0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{\frac{\sqrt{1-cos\triangle x}}{sen\triangle x}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\triangle x}$$

por lo anterior

$$f'_-(0) = \lim_{\triangle x\to 0^-}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{1+cos\triangle x}}}{\triangle x}\right) = \lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{1+cos\triangle x}}{\triangle x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\triangle x}}\right)}$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{cos\triangle x-1}{\triangle x}\cdot\frac{1}{2(1+cos\triangle x)}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{1+cos\triangle x}}\right)}$$

$$= 0\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

así entonces: $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, luego no existe la derivada de f en $x = 0$.

24. Un auto se mueve en una carretera recta dada por la ecuación $3x-2y+12 = 0$ a razón de $80Km/hr$. Una cámara de televisión colocada en el origen enfoca al auto. Calcular la velocidad del ángulo de giro de la cámara con respecto al eje X.

Solución.

Daremos dos maneras de encaminar la solución.

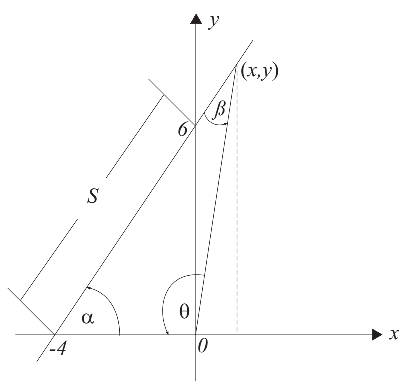

Figura 8.1: Problema 24

a)

$$tg(180-\theta)=\frac{y}{x}\Longleftrightarrow -tg\theta=\frac{y}{x}$$

$$\theta=Arctg\left(-\frac{y}{x}\right)=Arctg\left(-\frac{3x+12}{2x}\right)$$

pero $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{d\theta}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}$ donde

$\dfrac{dx}{dt}=80cos\alpha=80\dfrac{4}{\sqrt{52}}$, así

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{1+\left(\frac{3x+12}{2x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{3\cdot 2x-(3x+12)\cdot 2}{4x^2}\right)\cdot 80\cdot\frac{4}{\sqrt{52}}$$

$$=\frac{3840}{\sqrt{13}}\frac{1}{13x^2+72x+144}$$

Por ejemplo para $x=0, y=6, tg\alpha=\dfrac{3}{2}, \dfrac{d\theta}{dt}=7.396Km/hr.$

b) $S=80t$; $tg\alpha=\dfrac{3}{2}\Longrightarrow\alpha=Arctg\dfrac{3}{2}$; $\beta=\pi-(\theta+\alpha)$ luego por el teorema del seno $\dfrac{4}{sen\beta}=\dfrac{S}{sen\theta}\Longleftrightarrow\dfrac{4}{sen(\theta+\alpha)}=\dfrac{S}{sen\theta}$

de donde $S=\dfrac{4sen\theta}{sen(\theta+\alpha)}\Longleftrightarrow 80t=\dfrac{4sen\theta}{sen(\theta+\alpha)}$ derivando respecto de $t\Longrightarrow 80=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{4sen\theta}{sen(\theta+\alpha)}\right)\cdot\dfrac{d\theta}{dt}\Longleftrightarrow\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{20sen^2(\theta+\alpha)}{sen\alpha}$

Por ejemplo para $x=0, y=6\Longrightarrow\theta=90°$, $tg\alpha=\dfrac{3}{2}\Longrightarrow\dfrac{d\theta}{dt}=$ $7.396km/hr.$ como era de esperar.

25. En una pista circular de $200mts.$ de diámetro, un hombre corre con velocidad uniforme de $5m/seg$ Un foco que se encuentra en la simetral del diámetro de la pista, proyecta la sombra del hombre sobre un muro situado a lo largo del mencionado diámetro. Calcular la velocidad con que se mueve esta sombra en el instante en que el hombre completa $1/3$ de su recorrido, si la distancia del foco al muro es de $200mts.$

Solución.

De inmediato, tenemos:

$$\frac{dS}{dt}=5m/seg.;\ \frac{dx}{dt}=?$$

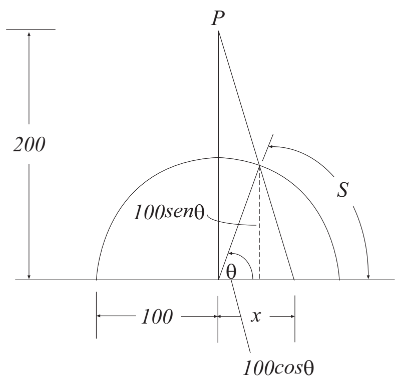

Figura 8.2: Problema 25

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{200}{x} = \frac{100sen\theta}{x - 100cos\theta} \Longrightarrow$$

$$x = \frac{200cos\theta}{2 - sen\theta}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \text{ y } S = 100\theta \Longrightarrow$$

$$\frac{dS}{dt} = 100\frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{100}\frac{dS}{dt} = 0.05\frac{mts.}{seg.}$$

$$\text{ahora : } \frac{dx}{d\theta} = 200\frac{-sen\theta(2 - sen\theta) - cos\theta(-cos\theta)}{(2 - sen\theta)^2} = 200\frac{1 - 2sen\theta}{(2 - sen\theta)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = 200\frac{1 - 2sen\frac{\pi}{3}}{(2 - sen\frac{\pi}{3})^2} \cdot 0.05 \ \cong -\ 5.69\ mts/seg.$$

26. Un automóvil corre con velocidad constante, igual a $180 km/hr.$, por una pista circular. Un espectador lo observa desde el punto de partida. ¿Con qué velocidad se aleja el auto de la vista del espectador, en el instante que completa 1/3 del recorrido total de la pista?

Solución.

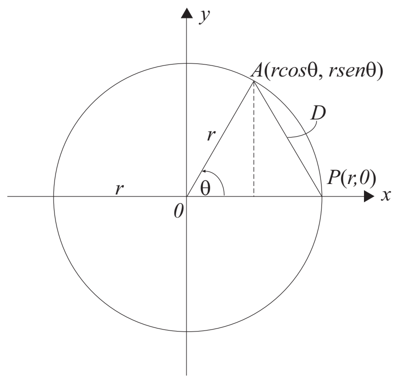

Figura 8.3: Problema 26

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \text{ pero } \theta \cdot r = S = arcoAP$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dS}{dt} = \frac{1}{r}180\frac{km}{hr.} \text{ por otra parte}$$

$$D = \sqrt{(r\,cos\theta - r)^2 + sen^2\theta r^2} = r\sqrt{2 - 2cos\theta}$$

$$\frac{dD}{d\theta} = r\,\frac{1}{2}\frac{2sen\theta}{\sqrt{2-2cos\theta}} = \frac{r\,sen\theta}{\sqrt{2-2cos\theta}}$$

$$\left(\frac{dD}{d\theta}\right)(\theta = 120°) = \frac{r\,sen120°}{\sqrt{2-2cos\,120°}} = \frac{r}{2}, \text{ finalmente}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{r}{2}\cdot\frac{180}{r} = 90Km/hr.$$

27. Sea:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{sen^2\frac{2}{3}x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2\,sen^2\dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{9}x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcule la derivada de g en todos los puntos donde sea posible.

Solución.

De inmediato

$$g'(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}x\,sen\dfrac{4}{3}x - sen^2\dfrac{2}{3}x\right)x^{-2} & \text{si } x < 0 \\ 2x\,sen^2\dfrac{1}{x} - sen\dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{9} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Punto crítico en $x = 0$, previamente estudiamos la continuidad de $g(x)$ en este punto:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{sen\frac{2}{3}x}{\frac{2}{3}x} \cdot \frac{2}{3} \cdot sen\frac{2}{3}x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 sen^2\frac{1}{x} + \frac{4}{9}x \right) = 0$$

(porque $sen^2\dfrac{1}{x}$ está acotado), así podemos definir, $g(0) = 0$, ahora estudiemos su derivabilidad en $x = 0$ usando la definición se tiene:

$$g'_-(0) = \lim_{\triangle x\to 0^-} \frac{\frac{sen^2\frac{2}{3}\triangle x}{\triangle x} - 0}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0^-} \left(\frac{sen\frac{2}{3}\triangle x}{\frac{2}{3}\triangle x} \right)^2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

$$g'_+(0) = \lim_{\triangle x\to 0^+} \frac{\triangle x^2 sen^2\frac{1}{\triangle x} + \frac{4}{9}\triangle x - 0}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0^+} \left(\triangle x\, sen^2\frac{1}{\triangle x} + \frac{4}{9} \right) = \frac{4}{9}$$

luego la función $g(x)$ es diferenciable en $x = 0$ y $g'(0) = \dfrac{4}{9}$.

28. Desde un mismo puerto salieron simultáneamente un barco A en dirección Norte y un barco B en dirección Este. ¿Con qué velocidad crece la distancia entre ellos, si la velocidad del barco A es igual a $30km/hr$ y la del barco B es igual $40km/hr$.?

Solución.

De inmediato $\dfrac{dy}{dt} = 30Km/hr.$ $\quad \dfrac{dx}{dt} = 40Km/hr.$

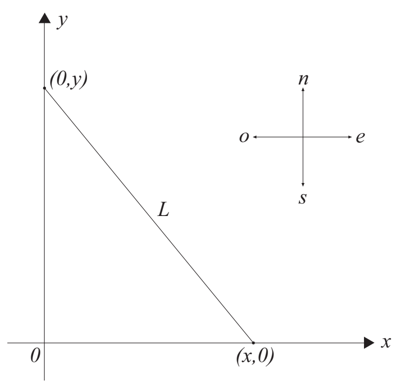

Figura 8.4: Problema 28

$$L=\sqrt{x^2+y^2} \Longleftrightarrow \frac{dL}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\left(2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(40x+30y)$$

Km/hr. al cabo de 1 hr. $\dfrac{dL}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{40^2+30^2}}(40^2+30^2)=50Km/hr.$

29. Una escalera de $5mts.$ de largo descansa en una pared vertical, si el extremo suoperior se desliza a una razón de 0.6 m/seg. Encuentre la razón de cambio del ángulo de elevación de la escalera en el instante que el extremo inferior esta a 3 mts. de la pared.

Solución.

De inmediato $\sqrt{x^2+y^2}=5$

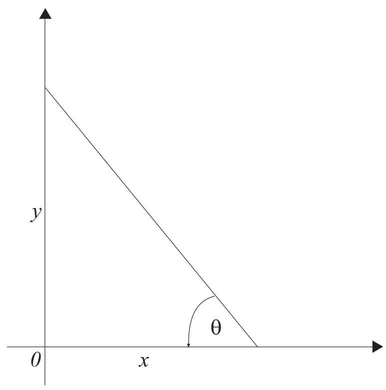

Figura 8.5: Problema 29

$$tg\,\theta=\frac{y}{x} \Longleftrightarrow \theta=Arc\,tg\frac{y}{x}$$

nos piden $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)_{x=3}=?;\ \dfrac{dy}{dt}=0.6m/seg.$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dy}\left(Arctg\frac{y}{\sqrt{25-y^2}}\right)\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{25-y^2}}\cdot\frac{\sqrt{25-y^2}-\frac{y(-2y)}{2\sqrt{25-y^2}}}{25-y^2}\cdot 0.6 \quad \text{si } x=3 \Longrightarrow y=4; \text{ así}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{25}\left(3+\frac{16}{3}\right)\cdot\ 0.6=0.2mts/seg.$$

30. Un punto móvil M recorre la parábola $y^2 = 2x$ con rapidéz de $5cm/seg$. desplazándose desde el origen hasta el punto $A(2,2)$. En $F(6,0)$ hay un foco luminoso, determine con que rapidez se moverá sobre el eje Y, la sombra S de M, cuando M pasa por A.

Solución.

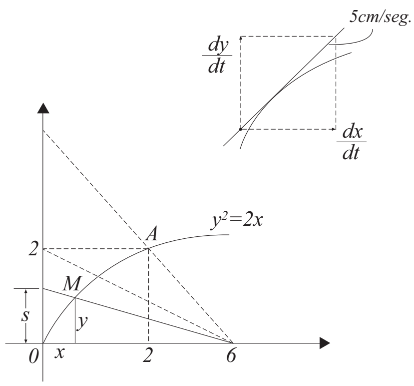

Figura 8.6: Problema 30

De inmediato:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 25 \tag{1}$$

ahora de

$$y^2 = 2x \Longrightarrow y\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \tag{2}$$

De la figura y por semejanza de triángulos

$$\frac{S}{y} = \frac{6}{6-x} \Longrightarrow S = \frac{6y}{6-x} \Longrightarrow \frac{dS}{dt} = 6\frac{(6-x)\frac{dy}{dt} - y(-\frac{dx}{dt})}{(6-x)^2} \tag{3}$$

En (1) reemplazamos (2) y obtenemos $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{5}{\sqrt{1+y^2}}$ finalmente (3) queda:

$$\frac{dS}{dt} = 6\frac{(6-x)\frac{5}{\sqrt{1+y^2}} + y^2\frac{5}{\sqrt{1+y^2}}}{(6-x)^2} \text{ y para } x = 2 \text{ e } y = 2,\ \frac{dS}{dt} = 6.708cm/seg.$$

31. Un triángulo rectángulo variable ABC en el plano xy tiene su ángulo recto en el vértice B y un vértice A fijo en el origen y el tercer vértice C sobre la parábola $y = 1 + \dfrac{7}{36}x^2$, el vértice B parte del punto $(0,1)$ en el tiempo $t = 0$ y se desplaza hacia arriba siguiendo el eje Y a una velocidad constante de $2cm/seg$. ¿Con qué rapidez crece el área del triángulo cuando $t = \dfrac{7}{2}seg$.

Solución. De

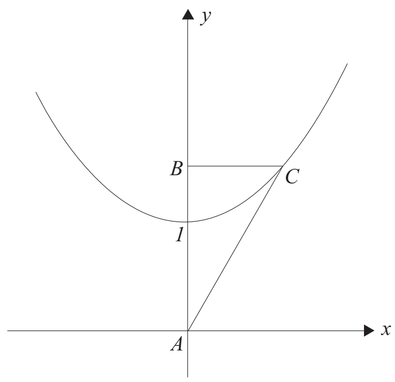

Figura 8.7: Problema 31

$$y = 2t + 1 \Longleftrightarrow \frac{dy}{dt} = 2cm/seg.\ A = \frac{1}{2}yx = \frac{3}{\sqrt{7}}y\sqrt{y-1}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{3}{\sqrt{7}}\left(\sqrt{y-1} + \frac{y}{2\sqrt{y-1}}\right)\frac{dy}{dt}$$

ahora para $t = \frac{7}{2} \Longrightarrow y = 8$ así

$$\frac{dA}{dt} = \frac{3}{\sqrt{7}}\left(\sqrt{7} + \frac{4}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{66}{7}cm/seg.$$

32. Un depósito de agua tiene la forma de un cono circular recto con su vértice hacia abajo. Su altura es de 10m. y el radio de la base 15m. El agua sale por el fondo de modo constante a razón de $1m^3$ por seg. Se vierte agua en el depósito a razón de $c \quad m^3$ por seg. Calcular c de modo que el nivel del agua ascienda a razón de $4m$. por seg. en el instante en que el agua alcance la altura de $8m$.

Solución.

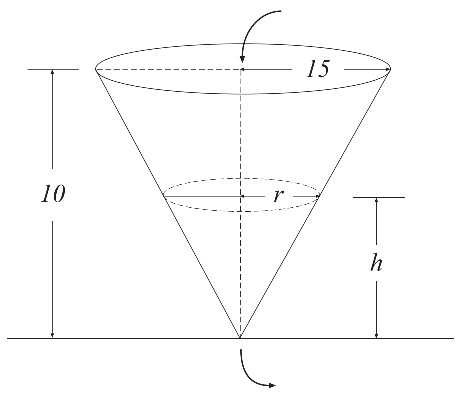

Figura 8.8: Problema 32

$$\frac{dh}{dt} = 4m/seg.; \frac{dV}{dt} = (c-1)m^3/seg.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h \text{ además } \quad \frac{15}{10} = \frac{r}{h} \Longrightarrow r = \frac{3}{2}h$$

$$\text{así } V = \frac{3}{4}\pi\, h^3 \Longrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{9}{4}\pi\, h^2 \frac{dh}{dt} = 576\pi \text{ finalmente :}$$

$$c - 1 = 576\pi \Longrightarrow c = 576\pi + 1(m^3/seg.)$$

33. Empezando en el origen, un punto P se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ de manera que su coordenada x aumenta 3 unidades por seg. Sea Q el punto que determina sobre el eje X la recta que pasa por $(0, -4)$ y P.

   a) Halla la velocidad de Q cuando P está en $(1, 1)$.

   b) Halla la velocidad de Q cuando P está en $(3, 9)$.

   Solución.

   Sea $P(x(t),\, y(t)) \wedge Q(z(t), 0)$, expresamos $z(t)$ en función de $x(t)$, luego la recta que pasa por $(0, -4) \wedge P \Longrightarrow y + 4 = \dfrac{y(t)+4}{x(t)}x \Longrightarrow 0 + 4 = \dfrac{y(t)+4}{x(t)}z(t) \Longrightarrow$ $z(t) = \dfrac{4x(t)}{y(t)+4}$ pero como P se mueve según $y = x^2 \Longrightarrow y(t) = x^2(t) \Longrightarrow$ $z(t) = \dfrac{4x(t)}{x^2(t)+4} \Longrightarrow z'(t) = \dfrac{4(4 - x^2(t))}{(x^2(t)+4)^2}x'(t)$, como $x'(t) = 3,\ \forall t \Longrightarrow z'(t) =$ $[12(4 - x^2(t))]/[x^2(t) + 4]^2$, luego:

   a) Cuando P está en $(1, 1)$, $x(t) = 1 \Longrightarrow z'(t) = 36/25$ (unidades por seg.).

   b) Cuando P está en $(3, 9)$, $x(t) = 3 \Longrightarrow z'(t) = -60/169$ (unidades por seg.).

   ¿Qué puede decir de estas velocidades una positiva y la otra negativa, porqué?

34. Un balón esférico pierde aire a razón constante de $2cm^3/seg$. ¿Con qué rapidez decrece el radio del balón cuando su diámetro es de 1m?

   Solución.

   Sea r el radio y V el volumen del balón $\Longrightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, derivando con respecto a t;

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Longrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt} cm^3/seg.; \left(\frac{dV}{dt} = -2\frac{cm^3}{seg}\right)$$

luego: $\dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{1}{2\pi r^2} = -\dfrac{1}{5000\pi} \cong -0.00006 cm/seg.$, r disminuye a 0.00006 cm/seg.

35. Dos lados paralelos de un rectángulo se alargan a razón de $2cm/seg.$, mientras que los otros dos lados se acortan de tal manera que la figura permanece constante como rectángulo de área $50cm^2$.

    a) ¿Cuál es la velocidad de cambio del perímetro P cuando la longitud del lado que aumenta es de $5cm$?

    b) De $10cm$

    c) Cuáles son las dimensiones cuando el perímetro deja de crecer?

    Solución.

    Sea x la longitud de los lados que se alargan e y la longitud de los que se acortan, luego

    $$P = 2(x+y) \Longrightarrow \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right), \text{ además como:}$$

    $$A = xy = 50 \Longrightarrow x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$$

    a) Cuando $x = 5, y = 10;\ \dfrac{dx}{dt} = 2 \Longrightarrow 5\dfrac{dy}{dt} + 10(2) = 0$

    $\Longrightarrow \dfrac{dy}{dt} = -4$ con lo que $\dfrac{dP}{dt} = 2(2-4) = -4cm/seg.$(decrece).

    b) Cuando $x = 10,\ y = 5 \wedge \dfrac{dx}{dt} = 2 \Longrightarrow 10\dfrac{dy}{dt} + 5(2) = 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dt} = -1,$

    $\dfrac{dP}{dt} = 2(2-1) = 2cm/seg.$ (crece)

    c) El perímetro deja de crecer cuando $\dfrac{dP}{dt} = 0$, es decir cuando $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{dx}{dt} = -2 \Longrightarrow x(-2) + y(2) = 0$, y el rectángulo resulta una cuadrado de lado $x = y = 5\sqrt{2}cm.$

36. Se tiene un reloj de arena de 3 cm. de radio y 6 cm de altura. Se pasa la arena a un solo lado y se voltea para que la arena empiece a fluír a razón de $2cm^3/seg.$, suponga que la arena en la parte inferior forma un tronco de cono. ¿Cuál es la velocidad de aumento de h para una altura dada?

Solución.

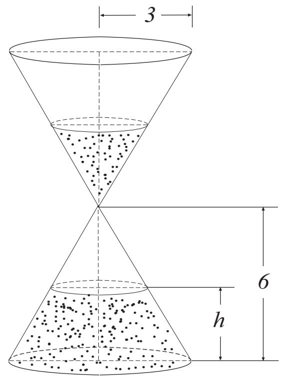

Figura 8.9: Problema 36

Sea r el radio del cono que se indica en la fig. Por regla de la cadena:

$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$, como se conoce $\frac{dV}{dt} = 2cm^3/seg$;

por determinar $\frac{dV}{dh}$, para lo cual tenemos:

$V = \frac{1}{3}\pi(3^2)6 - \frac{1}{3}\pi r^2(6-h)$ y además por semejanza de triángulos:

$\frac{r}{3} = \frac{6-h}{6} \Longrightarrow r = \frac{6-h}{2}$, por lo tanto:

$V = 18\pi - \frac{1}{3}\pi\frac{(6-h)^2}{4}(6-h) = 18\pi - \frac{1}{12}\pi(6-h)^3 \Longrightarrow \frac{dV}{dh} = 0 - \frac{1}{12}\pi$

$[3(6-h)^2(-1)] = \frac{1}{4}\pi(6-h)^2$ con lo que: $\frac{dV}{dt} = \frac{(6-h)^2\pi}{4} \cdot \frac{dh}{dt}$

finalmente remplazando datos se obtiene: $\frac{dh}{dt} = \frac{8}{\pi(6-h)^2}(cm/seg.)$

37. Un móvil describe una trayectoria elíptica de semiejes a y b con velocidad tangencial constante $(v, m/seg.)$ Un foco luminoso situado en el centro de la curva le sigue determine la velocidad angular del foco luminoso para que el vehículo este constante iluminado.

Solución.

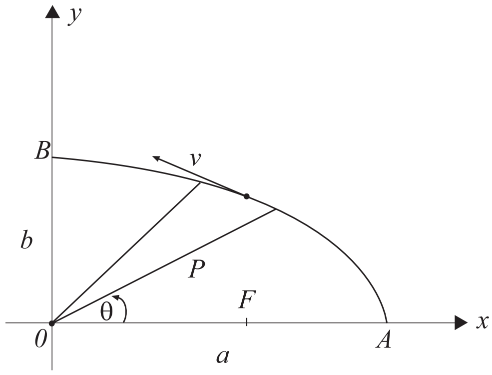

Figura 8.10: Problema 36

La ecuación de la elipse en coordenadas polares la obtenemos mediante el sistema;

$$\left.\begin{array}{r} x = \rho cos\theta \\ \\ y = \rho sen\theta \\ \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{array}\right] \Longrightarrow \rho = \frac{1}{ab}\sqrt{a^2sen^2\theta + b^2cos^2\theta}$$

la velocidad angular del foco es $\dfrac{d\theta}{dt}$, luego como:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{(a^2-b^2)sen^2\theta}{2ab\sqrt{a^2sen^2\theta + b^2cos^2\theta}} \cdot \frac{d\theta}{dt} \qquad (1), \text{ por comodidad sea}$$

$\alpha = \sqrt{a^2sen^2\theta + b^2cos^2\theta}$ la velocidad tangencial del móvil es:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \text{ además:}$$

$$\frac{dx}{dt} = cos\theta\frac{d\rho}{dt} - \rho sen\theta\frac{d\theta}{dt}, \text{ remplazando (1):}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{ab}\left[cos\theta\frac{c^2sen2\theta}{2\alpha} - sen\theta \cdot \alpha\right] \cdot \frac{d\theta}{dt} \text{ análogamente se obtiene:}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{ab}\left[sen\theta\frac{c^2sen2\theta}{2\alpha} + cos\theta \cdot \alpha\right]\frac{d\theta}{dt}, \text{ de donde:}$$

$$v^2 = \frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left[\frac{c^4sen2\theta + 4(b^2cos^2\theta + a^2sen^2\theta)}{4(b^2cos^2\theta + a^2sen^2\theta)}\right], \text{ de aquí finalmente}$$

se deduce: $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2v\,ab\sqrt{b^2cos^2\theta + a^2sen^2\theta}}{\sqrt{c^4sen^22\theta + 4(b^2cos^2\theta + a^2sen^2\theta)}}$$

38. Sea $y = f(x);\quad x = \displaystyle\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ y si $z = g(k) = arctg\dfrac{2k}{1-k^2}$

    Demostrar que: $2\dfrac{dk}{dz}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0} + (y-k^2)\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} + \left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} = 0.\ (\alpha)$

    Demostración.

    $\dfrac{dz}{dk} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{2k}{1-k^2}\right)^2}\cdot\dfrac{2(1-k^2)-2k(-2k)}{(1-k^2)^2} = \dfrac{2}{1+k^2}$, de donde $\dfrac{dk}{dz}$, resulta: $\dfrac{dk}{dz} = \dfrac{1}{2}(1+k^2)$.

    Como $F(y) = ø(y) - ø(0);\quad ø'(\lambda) = 1/\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}$, luego $F'(y) = ø'(y)\cdot 1 - ø'(0)\cdot 0 = ø'(y) \Longrightarrow \dfrac{dx}{dy} = 1/\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$, es inmediato que si $x = 0 \Longrightarrow y = 0$ (¿porqué?) luego:

    $$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \sqrt{(1-o^2)(1-k^2 0^2)} = 1$$

    $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2(1+k^2)yy' + 4k^2y^3y'}{2\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = -(1+k^2)y + 2k^2y^3 \Longrightarrow \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$$

    $$-(1+k^2)\cdot 0 + 2k^2\cdot 0 = 0$$

    $$\frac{d^3y}{dx^3} = -(1+k^2)y' + 6k^2y^2y' \Longrightarrow \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} = -(1+k^2)\cdot 1 = -(1+k^2)$$

    con lo que reemplazando estos resultados en (α) resulta:

    $$2\cdot\frac{1}{2}(1+k^2) + (y-k^2)\cdot 0 - (1+k^2) = 0$$

39. Cambiar la variable x en la ecuación:

    $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0,$$

    por la variable t dada por $x = cost$.

    Solución.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}(-sent)\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{sent}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}sen^2t+cotgt\frac{dy}{dt}\Longrightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}-cotgt\frac{dy}{dt}}{sen^2t}\qquad \text{luego:}$$

$$(1-cos^2t)\frac{\frac{d^2y}{dt^2}-cotgt\frac{dy}{dt}}{sen^2t}-cost\left(-\frac{1}{sent}\right)\frac{dy}{dt}=0$$

$$\Longrightarrow\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

40. Dada la ecuación:

$$x^3y'''+3x^2y''+(a+1)xy'-y=0,$$

cambiar x por t ligadas por $t=\log x$.

Solución.

Como $t=\log\,x$; $x=e^t$; $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{d^3x}{dt^3}=e^t\,\therefore\, y'=\dfrac{dy}{dt}e^t$,

$y''\equiv\dfrac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=e^{-2t}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)$ y además

$y'''=e^{-3t}\left(\dfrac{d^3y}{dt^3}-3\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}\right)$ finalmente sustituyendo estos valores en la ecuación, resulta:

$$\frac{d^3y}{dt^3}+a\frac{dy}{dt}-y=0$$

41. Transformar la ecuación dada tomando a y como variable independiente y a x como función

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\frac{dy}{dx}=0$$

Solución.

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-\frac{d^2x}{dy^2}\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, reemplazando en la ecuación dada, queda: $x\dfrac{d^2x}{dy^2}+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2=1$

42. Si $t = \log(a + x)$, transformar la ecuación:

$$(a+x)^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3(a+x)^2\frac{d^2y}{dx^2} + (a+x)\frac{dy}{dx} + by = 0$$

en términos de y y t (a y b constantes).

Solución.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a+x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{(a+x)^2} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{(a+x)^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3}\frac{1}{(a+x)^3} - \frac{3}{(a+x)^3}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{(a+x)^3}\frac{dy}{dt}$$

de donde reemplanzando y simplificando en la ecuación dada, resulta:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + by = 0.$$

43. Transformar la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ usando el cambio: $x = r\,cos\theta$ e $y = rsen\theta$; r función de θ.

Solución.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}; \quad \frac{dy}{d\theta} = r'(\theta)sen\theta + r(\theta)cos\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = r'(\theta)cos\theta - r(\theta)sen\theta$$

de donde: $\frac{r'(\theta)sen\theta + rcos\theta}{r'(\theta)cos\theta - rsen\theta} = \frac{rcos\theta + rsen\theta}{rcos\theta - rsen\theta}$ de donde simplificando se llega a : $r'(\theta) = r(\theta)$.

44. Hallar la derivada n-ésima de:

   a) $y = \frac{2x+1}{3x-2}$

   b) generalice para $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Solución.

a) Observése que $y = \dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{3}(3x-2)^{-1}$ de donde

$$y' = (-1)\frac{7}{3}(3x-2)^{-2}(3)$$

$$y'' = (-1)(-2)\frac{7}{3}(3x-2)^{-3}(3)^2;$$

$$y''' = (-1)(-2)(-3)\frac{7}{3}(3x-2)^{-4}(3)^3; \cdots$$

$$y^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)\frac{7}{3}(3x-2)^{-n-1}\,3^n = (-1)^n 7n!(3x-2)^{-(n+1)}3^{n-1}$$

b) De inmediato $y^{(n)} = (-1)^n\, n!\dfrac{c^{n-1}(bc-ad)}{(cx+d)^{n+1}}$

45. Calcular el valor de la derivada n-ésima de la función $y = \dfrac{2x+3}{x^2-3x+6}$ en el punto $x = 0$.

Solución.

De inmediato $y(x^2-3x+6) = 2x+3$, derivando n veces y usando la fórmula de Leibniz se tiene, para $n \geq 2$:

$$y^n(x)(x^2-3x+6) + n\,y^{(n-1)}(x)(2x-3) + \frac{1}{2}n(n-1)y^{(n-2)}(x)\cdot 2 = 0$$

Haciendo $x = 0$; $6y^n(0) - 3ny^{(n-1)}(0) + n(n-1)y^{(n-2)}(0) = 0$ de donde : $y^n(0) = \dfrac{1}{2}ny^{(n-1)}(0) - \dfrac{1}{6}n(n-1)y^{(n-2)}(0)$ para $(n \geq 2)$ nos faltaría determinar $y(0) = \dfrac{1}{2}$ y como $y'(x) = \dfrac{-2x-6x+21}{(x^2-3x+6)^2}$ así $y'(0) = \dfrac{7}{12}$

46. Demostrar que la función:

$$y = x^5\,[cos\log x + sen\log x]$$

satisface la ecuación: $x^2y'' - 9xy' + 26y = 0$

Demostración.

Encontrando y' e y'' obtenemos

$$y' = x^4(6cos\log x + 4sen\log x)$$

$y'' = x^3(28cos\log x + 10sen\log x)$, y reemplazando en la ecuación se tiene lo pedido.

47. Hallar y''_{xx} de las funciones implícitas siguientes:

    a) $y = x + Arc\,tg\,y$

    b) $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$ en el punto $(1,1)$

Solución.

a)

$$y' = 1 + \frac{1}{1+y^2}y' \Longleftrightarrow y' = 1 + y^{-2} \Longleftrightarrow$$

$$y'' = -2y^{-3}y' \Longleftrightarrow y'' = -2y^{-3}(1 + y^{-2})$$

b)

$$2x + 5y + 5xy' + 2yy' - 2 + y' = 0 \Longleftrightarrow y'(1,1) = -\frac{5}{8}$$

$$2 + 5y' + 5y' + 5xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' + y'' = 0 \Longleftrightarrow$$

$$y''(1,1) = \frac{111}{256}$$

48. Ocupando $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = x\,cos(\pi x)$ calcule $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+3)^2\,sen(\pi x)dx$

Solución.

$\displaystyle\int_{-1}^1 (x+3)^2\,sen(\pi x)dx = \int_{-1}^1 x^2\,sen(\pi x)dx + 6\int_{-1}^1 x\,sen(\pi x)dx + 9\int_{-1}^1 sen(\pi x)dx.$
Como: $x^2 sen(\pi x)$ y $sen(\pi x)$ son funciones impares y $x\,sen(\pi x)$ es par entonces $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+3)^2 sen(\pi x)dx = 12\int_0^1 x\,sen(\pi x)dx$, (1), por otra parte, si $\displaystyle\int_0^x f(t)dt =$ $x\,cos(\pi x) \Longrightarrow f(x) = cos(\pi x) - x\,sen(\pi x)\cdot\pi$ luego $\displaystyle\int_0^x [cos(\pi t) - \pi t\,sen(\pi t)]dt =$ $\displaystyle\int_0^x cos(\pi t)dt - \pi\int_0^x t\,sen(\pi t)dt = x\,cos(\pi x) \Longrightarrow \int_0^x t\,sen(\pi t)dt = \frac{1}{\pi^2}sen(\pi x) -$ $\displaystyle\frac{1}{\pi}xcos(\pi x) \Longrightarrow \int_0^1 tsen(\pi t)dt = \frac{1}{\pi}$ por tanto de (1) resulta $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+3)^2\,sen(\pi x)dx =$ $\displaystyle\frac{12}{\pi}$

49. Demostrar que la función $y = f(x)$ definida mediante las ecuaciones paramétricas $x = sent$ e $y = ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}$ satisface la relación:

$$(1 - x^2)y'' - xy' = 2y$$

Demostración.

$y' = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\sqrt{2}}{cost}(ae^t\sqrt{2} - be^{-t\sqrt{2}})$ ahora para obtener y'' aplicamos la fórmula

dada en 8.6 y obtenemos:

$$y'' = \frac{\sqrt{2}}{cos^3 t}[cost(ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}})\sqrt{2} + sent(ae^{t\sqrt{2}} - b^{-t\sqrt{2}})]$$

de donde remplazando y simplificando en la ecuación dada se obtiene la pedido.

50. Sea y dada en función de x mediante la fórmula:

$$x = \int_0^{Arcseny} \sqrt{1 - k^2 sen^2\theta} d\theta;$$

Calcular $y''(0)$, donde k es constante, $0 < |k| < 1$.

Solución.

Notemos previamente que si $x = 0 \iff Arc\, sen y = 0$ y por lo tanto $y = 0$, así entonces:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - k^2\, sen^2\,(Arc\, sen\, y)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

hemos aplicado el teorema fundamental. De aquí:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{\sqrt{1 - k^2y^2}}; \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 1$$

Así pues: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\sqrt{1 - k^2y^2}\frac{1}{2}\frac{(-2y)y'}{2\sqrt{1-y^2}} - \sqrt{1 - y^2}\frac{1}{2}\frac{(-2k^2yy')}{\sqrt{1-k^2y^2}}}{1 - k^2y^2}$

de donde $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0$

51. Demostrar que la función $y = f(x)$ definida mediante $x = e^t\, sent$ e $y = e^t\, cost$ satisface la ecuación

$$y''(x + y)^2 = 2(xy' - y)$$

Demostración.

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{cost - sent}{cost + sent};$$

$$y'' = \frac{1}{[x'_t]^3}(y''_t\, x'_t - x''_t\, y'_t)$$

$$\text{así : } y'' = \frac{1}{e^{3t}(cost + sent)^3}[e^{2t}(-2sent)(cost + sent)$$

$$-e^{2t}(2cost)(cost - sent)]$$

$$y'' = \frac{-2}{e^t(cost + sent)^3} \quad \text{además } (x + y)^2 = e^2 t(cost + sent)^2,$$

$$\text{luego } y''(x + y)^2 = \frac{-2}{e^t(cost + sent)}; \text{ por otra parte}$$

$$2(xy' - y) = 2e^t\, sent\left(\frac{cost - sent}{cost + sent}\right) - e^t\, cost$$

$$= 2\, e^t\left(\frac{sent\, cost - sen^2 t - cos^2 t - sent\, cost}{cost + sent}\right)$$

$$-\frac{2}{e^t(cost + sent)}; \text{ quedando así lo pedido}$$

52. Dadas las funciones : $f(x) = Arc\, cos\dfrac{a\, cosx + b}{a + b\, cosx}$

$$g(x) = 2\, Arc\, tg\left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}}\, tg\frac{x}{2}\right) \; (0 < b \leq a;\; 0 \leq x < \pi)$$

Calcular $f'(x)$ y $g'(x)$, ¿existe alguna relación entre $f(x)$ y $g(x)$?

Solución.

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{acosx + b}{a + bcosx}\right)^2}} \cdot \frac{-a\, senx(a + b\, cosx) - (a\, cosx + b)(-b\, senx)}{(a + b\, cosx)^2}$$

de donde simplificando se llega a: $f'(x) = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\, cosx}$, ahora

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b}tg^2\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \cdot sec^2\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \Longrightarrow g'(x) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\, cosx}$$

Como $f'(x)$ y $g'(x)$ son iguales $f(x)$ y $g(x)$ difieren en una constante c. Así $f(x) = g(x) + c$. Para calcular dicha constante sea por ejemplo, $x = 0$, entonces obtenemos

$$f(0) = 0 = g(0) \Longleftrightarrow c = 0.$$

53. Sabemos que $(e^x)' = e^x$. ¿Existem más funciones que coinciden con sus derivadas en todos los puntos?

Solución.

Sea la función $f(x)$ tal que $f(x) = f'(x)$, $\forall x$ y sea la función $g(x) = f(x)\, e^{-x}$ de donde derivando $g'(x) = f'(x)e^{-x} - e^{-x}f(x) = 0$ dado que $f(x) = f'(x)$, así entonces $g(x) = c \iff f(x)e^{-x} = c \iff f(x) = ce^x$. Así hemos demostrado que el conjunto de funciones para los que $f'(x) = f(x)$ queda cubierto por la fórmula $f(x) = ce^x$, donde $c = constante$.

54. Si $Arctg\dfrac{x}{y} + \log(\sqrt{x^2+y^2}) = 0$ demostrar, que:

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Demostración.

$$\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

de donde: $\dfrac{1}{x^2+y^2}(y - xy' + x + yy') = 0$ de donde $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

55. Demostrar que si $y = \dfrac{senx}{\sqrt{x}}$ se cumple la relación

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

Demostración.

Por comodidad ponemos $y = x^{-\frac{1}{2}}senx$; así : $y' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}senx + x^{-\frac{1}{2}}cosx$

$$y'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}senx - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}cosx - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}cosx - x^{-\frac{1}{2}}senx$$

y reemplazando en la relación se obtiene la identidad pedida.

56. Hallar la curvatura ρ de la línea definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x = a\sqrt{\pi}\int_0^t cos\frac{\pi u^2}{2}\, du$$

$$y = a\sqrt{\pi}\int_0^t sen\frac{\pi u^2}{2};\, du \qquad \text{espiral de Cornú}$$

Solución.

Sabemos que $\rho = \dfrac{|y''_{xx}|}{[1+(y'_x)^2]^{3/2}}$ luego se tiene:

$x'_t = a\sqrt{\pi}\, cos\dfrac{\pi t^2}{2}$; $y'_t = a\sqrt{\pi} sen\dfrac{\pi t^2}{2}$; así: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = tg\dfrac{\pi t^2}{2}$

y por fórmula de 8.6 : $\frac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\sqrt{\pi t}}{a\, cos^3 \frac{\pi t^2}{2}}$, de donde la curvatura $\rho = \dfrac{\sqrt{\pi}t}{a}$.

57. Si f es derivable y satisface $f(xy) = f(x) + f(y)$. Demostrar $f(x) = \alpha \log(x)$; donde $\alpha = constante$.

Demostración.

Considerando a x como constante, y

$$\frac{d}{dy} f(xy) = f'(y) \Longleftrightarrow f'(xy) \cdot x = f'(y)$$

ahora hacemos $y = 1$, $f'(x) = f'(1)\dfrac{1}{x}$; pero $f'(1) = \alpha = constante, f'(x) = \alpha\dfrac{1}{x} \Longleftrightarrow f(x) = \alpha\ \log x$

58. Un recipiente lleno de agua tiene la forma dada por la rotación de $y = x^4,\ 0 \leq y \leq a$ alrededor del eje OY. Demostrar que si el agua sale por un pequeño agujero en el fondo del recipiente de acuerdo a la ley de Torricelli esto es, con velocidad $(lts/hr.)$ proporcional $\sqrt{h}$, siendo h el nivel del líquido medido desde el fondo, entonces h disminuye con velocidad constante.

Solución.

$v = \alpha\sqrt{y},\ \alpha = constante\ de\ proporcionalidad, (l/hr.)$.

de inmediato: $v = \dfrac{dV}{dt}$ (variación de volumen respecto del tiempo) por demostrar $\dfrac{dy}{dt} = constante$. (Variación de altura respecto del tiempo). Volumen de rotación del elemento diferencial (ver figura).

$$dV = \pi x^2 dy \Longleftrightarrow dV = \pi\sqrt{y}\, dy \Longrightarrow \frac{dV}{dt} = \pi\sqrt{y}\,\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

por otra parte: $\dfrac{dV}{dt} = v = \alpha\sqrt{y}$, reemplanzando en (1) $\quad \alpha\sqrt{y} = \pi\sqrt{y}\dfrac{dy}{dt} \Longleftrightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\alpha}{\pi} = constante$, como se quería.

8.8. Problemas Propuestos

1. Calcular la derivada $f'(x)$, de:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + x^5\, cosx$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}(x > 0)$

c) $f(x) = \dfrac{x\, senx}{1+x^2}$

d) $f(x) = (tgx\, secx)^2$

e) $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{senx+cosx}$

f) $f(x) = tgx + \dfrac{1}{3}tg^3x + \dfrac{1}{3}tg^5x$

g) $f(x) = -\dfrac{1}{6(1-3cosx)^2}$

h) $f(x) = \left(\dfrac{1}{5}(3senx - 2cosx)\right)^{1/2}$

i) $f(x) = sen(x^2-5x+1) + tg\dfrac{a}{x}$

j) $f(x) = \left(\dfrac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^m$

ll k) $f(x) = (2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}$

l) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

ll) $f(x) = \dfrac{tg\frac{x}{2} + ctg\frac{x}{2}}{x}$

m) $f(x) = a(1 - cos^2\frac{x}{2})$

n) $f(x) = \log\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}+x}$

ñ) $f(x) = [a^{\log x}\, e^{senx}]^{5/2}$

o) $f(x) = \log(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$

p) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\dfrac{a+b+\sqrt{b^2-a^2}tg\frac{x}{2}}{a+b-\sqrt{b^2-a^2}tg\frac{x}{2}}$

q) $f(x) = \dfrac{1}{n\sqrt{ab}}arc\, tg\left(e^{nx}\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$

r) $f(x) = (1+tg(1+\sqrt{x}))^{1/3}$

s) $f(x) = cos(x\sqrt{1+tg^5(3xsenx)})$

t) $f(x) = arc\, cos(arctg\sqrt{\log(sec\sqrt{x})})$

u) $f(x) = \sqrt{x + \left(Arcsen\left\{\dfrac{x}{x^2+1}\right\}\right)^3}$

Respuesta.

a) $-2x/(x^2+1)^2+5x^4cosx-x^5senx$

c) $\dfrac{senx+xcosx}{1+x^2}-\dfrac{2x^2senx}{(1+x^2)^2}$

e) $\dfrac{(2ax+b)(senx+cosx)+(ax^2+bx+c)(senx-cosx)}{1+sen2x}$

g) $\dfrac{senx}{(1-3cosx)^3}$

i) $(2x-5)cos(x^2-5x+1)-(sec^2\frac{a}{x})\frac{a}{x^2}$

k) $\dfrac{2abmnx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m+1}}$

ll) $-\dfrac{2xcosx+sen^2x(tg\frac{x}{2}+cotg\frac{x}{2})}{x^2sen^2x}$

n) $-2/\sqrt{1+x^2}$

o) $\sqrt{x^2+a^2}/x^2$

q) $1/(ae^{nx}+be^{-nx})$

s) $-sen(x\sqrt{1+tg^5(3xsenx)})$

$\cdot[\sqrt{1+tg^5(3xsenx)}+\frac{5}{2}x\,tg^4(3xsenx)\cdot sec^2(3xsenx)$

$\cdot(3senx+3xcosx)\cdot(1+tg^5(3xsenx))^{-\frac{1}{2}}]$

u) $\dfrac{1}{2\sqrt{x+(Arcsen\{\frac{x}{x^2+1}\})^3}}[1+3(Arcsen\left\{\dfrac{x}{x^2+1}\right\}]^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\cdot\dfrac{1-x^2}{1+x^2}]$

2. Pruebe que la función dada por $\begin{cases} x=2t+3t^2 \\ y=t^2+2t^3 \end{cases}$ satisface a la ecuación: $y=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3$.

3. Si $u=2\log cotgx \wedge v=tgx+cotgx$, pruebe que: $\dfrac{du}{dx}=tg2x$.

4. Si $x=3at/(1+t^2)$; $y=3at^2/(1+t^2)$, pruebe que:

$$\frac{dy}{dx}=2t/(1-t^2)$$

5. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ de:

a) $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$
b) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
c) $cos(xy) = x$
d) $acos^2(x + y) = b$
e) $tgy = xy$
f) $xcosy = sen(x + y)$

Respuesta.

a) $-\sqrt{y/x}$ b) $\dfrac{x^2 - ay}{ax - y^2}$ c) $[1 + ysen(xy)]/x\, sen(xy)$

d) -1 e) $(y\, cos^2y)/(1 - x\, cos^2y)$ f) $(cosy - cos(x+y))/(xseny + cos(x+y))$

6. Determine y'' de las funciones:

a) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$
b) $y^2 = 4ax$
c) $x = a\cos 2t \; y = b\, sen^2t$
d) $secx\; cosy = c$
e) $e^x + x = e^y + y$
f) $y^3 - x^3 = 3axy$

Respuesta.

a) $-a^2/\sqrt{(a^2 - x^2)^3}$ c) 0 e) $(1 - e^{x+y})(e^x - e^y)/(e^y + 1)^3$

7. Determine y''' de las funciones:

a) $y^2 - 2xy = 0$
b) $y = tg(x + y)$
c) $y = ln\; senx$
d) $y = (x^2 + a^2)arctg\dfrac{x}{a}$
e) $x = a\, cost,\; y = a\, sent$
f) $x = sec\theta,\; y = tg\theta$

Respuesta.

a) 0 c) $2cosec^2x\; cotgx$ e) $\frac{3}{a^2}\frac{cost}{sen^5t}$

8. Determine $y^{(n)}$ de las funciones:

   a) $y = cos\, ax$
   b) $y = 1/(1+x)$
   c) $y = sen^2 x$
   d) $y = xe^x$
   e) $y = \log(1+x)$
   f) $y = a^x$

   Respuesta.

   a) $a^n cos(ax + n\pi/2)$ c) $-2^{n-1} cos(2x + n\pi/2)$

   e) $(-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

9. Empleando la fórmula de Leibniz, halle $y^{(n)}$ de:

   a) $y = (1+x)/\sqrt{x}$
   b) $y = 1/(1+x^2)$
   c) $y = x\, senx$
   d) $y = x^{n-1} \log x$

   Respuesta.

   a) $\dfrac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n x^{(2n+1)/2}} (x - (2n-1)), \quad n \geq 2$

   c) $x\, sen(x + n\pi/2) - n\, cos(x + n\pi/2)$

10. Demuestre que la función:

    a) $y = e^x\, senx$, satisface; $y'' - 2y' + 2y = 0$
    b) $y = \dfrac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)$, satisface $1 + (y')^2 = 2yy''$
    c) $y = 5^{t arc\, senx} + 2e^{-t\, arc\, senx}$, satisface $(1-x^2)y'' - xy' - t^2 y = 0$

11. Demuestre que la función:

    a) $y = 2e^{-2x} + \left(c + \dfrac{x}{3}\right) e^x$, satisface

    $$y'' + y' - 2y = e^x$$

b) $y = 5senx + (cosx + \log \mid cosecx + cotgx|)cosx - 2$, satisface

$$y'' + y = cotg^2x)$$

c) $y = 4senx + 2cosx + \frac{1}{40}e^{2x}(3sen3x - cos3x)$, satisface

$$y'' + y = e^{2x}cos\,3x$$

d) $y = 8(x-1)e^x$, satisface $(x-1)y' = xy$

e) $arctgy + arcsenx = c$, satisface $(1-x^2)^{1/2}y' + 1 + y^2 = 0$

f) $y = Ax + B/x + c$, satisface $y''' + \frac{3}{x}y'' = 0$

g) $y^2 = cx^2 - a^2c/(1+c)$, satisface

$$xy(1-(y')^2) = (x^2 - y^2 - a^2)y'$$

h) $x^2 + y^2 = a^2$, satisface

$$(1+(y')^2)y''' - 3y'y''^2 = 0$$

i) $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left[Acos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Bsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$, satisface

$$y'' + y' + y = 0$$

j) $xe^{sen(y/x)} = c$, satisface

$$y'\,x\,cos(\frac{y}{x}) = ycos\,\frac{y}{x} - x$$

k) $y = Ae^{-2x} + Be^{2x} - \frac{1}{20}e^{2x}(sen2x + 2cos\,ex)$, satisface

$$y'' - 4y = e^{2x}sen2x$$

l) $y = A\,cosx + Bsenx + cosx\,ln\,cosx$, satisface

$$y'' + y = secx$$

m) $xy/(x-y) = c$, satisface

$$[x^2dy - y^2dx] = 0$$

n) $y = 10cosx + 3senx - \sqrt{cos2x}$, satisface

$$y'' + y = 1/cos2x\sqrt{cos2x}$$

12. *a*) Suponiendo que $y = e^x senx,\ z = e^x cosx$, probar que:

$$y'' = 2z,\ z'' = -2y$$

b) Probar que la función $y = sen(a\, arcsenx)$, satisface,

$$(1-x^2)y'' - xy + a^2y = 0$$

13. Formando la n-ésima derivada de x^{2n}, de dos diferentes formas probar que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = (2n)!/(n!)^2$$

14. Si $g(x) = (ax^2 + bx + c)senx + (dx^2 + ex + f)cosx$, determinar valores de las constantes a, b, c, d, e, f tales que $g'(x) = x^2senx$

Respuesta.

$a = c = e = 0; \qquad b = f = 2; \qquad d = -1$

15. Si $x = A\, cos\, wt + B\, sen\, wt + (E/2w)t\ sen\, wt$, demuestre que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = E\ cos\ wt$$

16. Si $\sqrt[m]{y} + 1/\sqrt[m]{y} = 2x$ demuestre que:

$$(x^2-1)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + (2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + (n^2-m^2)\frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

Indicación: use inducción.

17. Calcular $F'(x)$, si F está definida por la fórmula:

a) $F(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}dt$

b) $F(x) = sen\left(\displaystyle\int_0^x sen\left(\int_0^y sen^3t\ dt\right)dy\right)$

c) $F(x) = \displaystyle\int_{tgx}^{x} t\sqrt{e^t}dt$

Respuesta.

a) $2x^{13}/(1+x^8) - 3x^{20}/(1+x^{12})$

c) $x\sqrt{e^x} - sec^2x \cdot tgx\sqrt{e^{tgx}}$

18. Una función g definida para todo número real positivo satisface las 2 condiciones siguientes: $g(1) = 1$ y $g'(x^2) = x^3$ para todo $x > 0$. Calcular $g(4)$.

    Respuesta.

    67/5.

19. Si $y = \displaystyle\int_{x^3}^{cosx} (x-t)sent^2\, dt$ calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

    Respuesta.

    $$\int_{x^3}^{cosx} sent^2\, dt - x[senx\, sen(cos^2 x) + 3x^2 senx^6]$$

    $$+\frac{1}{2}sen2x\ sen(cos^2 x) + 3x^5\ senx^6$$

20. Dejando en la forma más simple posible, calcular:

    a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ de $x^3 - 3axy + y^3 = b^3$

    b) $\dfrac{dy}{dx}$ de $y = \dfrac{1}{3}x^3\ Arctgx + \dfrac{1}{6}\log(x^2+1) - \dfrac{1}{6}x^2$

    Respuesta.

    a) $\dfrac{2xy[3axy - (a^3 + x^3)]}{(y^2 - ax)^3}$ b) $x^2 Arctgx$

21. Tomando a y como variable independiente transformar la ecuación

    $$\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$

    Respuesta.

    $$\frac{d^3x}{dy^3} = 0$$

22. Cambiar la variable x por θ, en la ecuación:

    $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0$$

    mediante la relación $x = tg\theta$

Respuesta.

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0$$

23. Transformar la ecuación:

$$(y^2 - 4y + 5)\frac{d^2y}{dx^2} - (y-2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (y^2 - 4y + 5)^{3/2}\log(y - 2 + \sqrt{y^2 - 4y + 5})$$

mediante la relación $y = senh\, z + 2$

Respuesta.

$$\frac{d^2z}{dx^2} - z = 0$$

24. Pasar a coordenadas polares ($x = rcos\,\theta$; $y = rsen\theta$) la expresión en coordenadas cartesianas: $y'' = [1 + (y')^2]^{3/2}$

Respuesta.

$r^2 + 2(r')^2 - r\, r'' = [r^2 + (r')^2]^{3/2}$

25. Si $(1 + 2\sqrt{2}\, cos\; 2x)y^2 = 1$ demostrar que:

$$y'' = y(3y^2 + 1)(7y^2 - 1))$$

26. Demostrar que la ecuación $(1 - x^2)y' - xy + 1 = 0$ se satisface tanto para $y = \dfrac{Arc\; cosx}{\sqrt{1-x^2}}$ como para $y = \dfrac{\log(x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$

27. Dadas las funciones:

   a) $f(x) = \log\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}\right)$; $\qquad g(x) = 2\log(\sqrt{x^2+1} - x))$

   b) $f(x) = Arc\, cos\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$; $\qquad g(x) = 2Arctgx$ para $0 \leq x < \infty$.
   Calcule $f'(x)$ y $g'(x)$. ¿Existe alguna relación en $f(x)$ y $g(x)$?

Respuesta.

a) y b) si existe, difieren entre si en una constante real arbitraria.

28. Encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ si:

a) $x^y = y^x$

b) $tgy = xy$

c) $y = \int_1^{x^2+1} \frac{sent}{t} dt$

d) $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 2$

e) $y = \int_{2x-3}^{4x+1} e^{t^2}\ dt$

Respuesta.

a) $\frac{\log(y)^{xy} - y^2}{\log(x)^{xy} - x^2}$

b) $\frac{2x}{x^2+1} sen(x^2+1)$

c) $4e^{(4x+1)^2} - 2e^{(2x-3)^2}$

d) $\frac{y}{x}$

e) $e^{(4x+1)^2} - 2e^{(2x-3)^2}$

29. Demostrar que en toda circunferencia la curvatura es constante e igual al valor recíproco del radio.

30. Dada la función:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x^2} - sen\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + sen\frac{1}{x^2}}$$

Calcule la derivada de f en todos los puntos donde sea posible.

31. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} \left[cos\left(\frac{3}{2}x\right) - 1\right]\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \\ x^2 cos^2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{9}{8}x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Es posible definir $f(0)$ tal que f resulte continua en todo $\mathbb{R}$? ¿y derivable en todo $\mathbb{R}$?. Calcule la derivada donde sea posible.

32. El agua entra en un tanque hemisférico de $10m$ de radio (la parte plana hacia arriba). En un instante dado, se h la altura del agua medida desde el fondo, r el radio de la superficie libre del agua, y V el volumen del agua en el tanque. Calcular $\dfrac{dV}{dh}$ en el instante en que $h = 5m$. Si el agua entra a razón constante de $5\sqrt{3}m^3$ por seg. Calcular $\dfrac{dr}{dt}$, el coeficiente de variación de r, el el instante t en que $h = 5m$.

    Respuesta.

    $\dfrac{dV}{dh} = 75\pi\ m^3/seg.$; $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{15\pi} m/seg.$

33. Sea $x^3 + y^3 = 1$

    a) Suponiendo que existe y' demostrar que y' satisface la ecuación $x^2+y^2y' = 0$

    b) Suponiendo que existe y'' demostrar que $y'' = -2xy^{-5}$ siempre que $y \neq 0$.

34. A un cono recto circular invertido le entra agua a razón de $2cm^3$. por minuto. La altura del cono es dos veces su diámetro. ¿A qué rapidez sube la superficie del agua cuando la misma alcanza una profundidad de $10cm$ en el cono?

    Respuesta.

    0.102 cm/min.

35. Un hombre está parado en un muelle y jala un bote por medio de una cuerda. Sus manos están a $3m$ por encima del amarre del bote. El bote está a 3.6m, del muelle. Si el hombre jala la cuerda a una velocidad de $90cm/seg.$, ¿a qué velocidad se aproxima el bote al muelle?

    Respuesta.

    1.17m/seg.

36. En una fábrica de cemento se deposita arena de tal manera que forma una pila cónica cuya altura siempre es igual a los 4/3 del radio de la base.

    a) ¿Con qué rapidez aumenta el volumen cuando el radio de la base es de 90cm. y el cual aumenta a su vez a una velocidad de $1/8cm/min.$?

    b) ¿Con qué rapidez aumenta el radio cuando tiene 1.80m. y su volumen aumenta a una razón de $3m^3/min$?

    Respuesta.

a) $1350\pi\, cm^3/min$ b)$1/1{,}44\pi\, m/min$

37. Un punto se mueve sobre la parábola $y^2 = 12x$, de manera que la abscisa aumenta unifórmemente $2cm/seg$. ¿En qué punto aumenta la abscisa y la ordenada a la misma razón?

    Respuesta.

    (3,6)

38. Un coche de carreras viaja a una velocidad constante de 90 millas por hora sobre una pista circular. Suponga que hay una fuente de luz en el centro de la pista y una valla tangente a la pista en un punto P. ¿Con qué rapidez se mueve la sombra del coche sobre la valla cuando el coche ha recorrido 1/8 de la pista desde P?

    Respuesta.

    180 millas por hora.

39. Una línea recta paralela al eje de las Y se mueve de la posición $x = -1$ a la posición $x = 1$ a una razón constante v, intersectando el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ y dividiéndola en un área a la izquierda S y un área a la derecha $\pi - S$. ¿Con qué rapidez crece S cuando la recta está en posición $x = 1/2$?

    Respuesta.

    $\sqrt{3}v$.

40. *a*) Un pistón el cual es libre de deslizar a lo largo de una línea recta está unido mediante una barra a un punto fijo en el borde de una rueda (fig) el largo de la barraa es l y el radio de la rueda es r, relacionar la velocidad del pistón con la velocidad de rotación de la rueda.

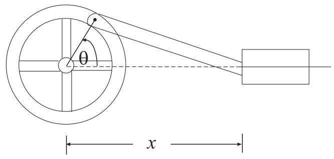

Figura 8.11: Problema 40 a

b) Si la rueda rota con una velocidad angular constante de $wrad/seg.$, encontrar la velocidad del pistón cuando el punto de unión se encuentre en la posición más alta de la rueda.

Respuesta.

a) $dx/dt = -rx\,sen\theta/(x - rcos\theta)\frac{d\theta}{dt}$ b) rw

41. Una partícula se mueve alrededor de la elipse $16x^2+9y^2 = 400$ en el sentido de las manecillas del reloj, sobre que punto (S) de la elipse la ordenada decrece al mismo ritmo que la abscisa crece.

Respuesta.

$(-3, -16/3)$.

42. Un punto se mueve a lo largo de la parábola $y^2 = x$ de forma que su abscisa aumenta de una manera uniforme k unidades por seg. La proyección de P sobre el eje de las x es M. ¿Con qué rapidez aumenta el área del triángulo OMP cuando P está en el punto de abscisa $x = a$.

Respuesta.

$\frac{3}{4}\,k\sqrt{a}$ unidades por seg.

43. Si $f(x) = e^4 \displaystyle\int_2^{e^{2x-4}} \frac{1}{\log\, t}dt - e^2 \int_2^{e^{2x-2}} \frac{1}{\log\, t}dt$. Determine el valor de x, tal que:

$$f''(x) = 2\,f'(x)$$

Respuesta.

$x = 3/2$.

44. Cambiar la variable x en la ecuación:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2}y = 0,$$

por la variable t dada por $t = \dfrac{1}{x}$.

Respuesta.

$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0$.

45. Calcular d^2y/dx^2 si $y = Arc\,senx\,/\,\sqrt{1-x^2}$ para $|x| < 1$.

Respuesta.

$(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\ Arcsenx + 3x(1-x^2)^{-5/2} \cdot (\sqrt{1-x^2} + x\ Arcsenx).$

46. Sea $f(x) = arctgx - x + \dfrac{1}{3}x^3$. Examinar el signo de f' para demostrar que $x - \dfrac{1}{3}x^3 < arctgx$ si $x > 0$.

47. Demuestre que si una bola de nieve puesta al sol disminuye su volumen con velocidad proporcional a su superficie, su diámetro disminuye con velocidad constante.

48. Sea $y = f(u)$, donde $u = g(x)$. Demostrar

$$d^3y = f'''(u)du^3 + 3f''(u)du\ d^2u + f'(u)d^3u$$

49. Demostrar que si un móvil se desplaza con una rapidez dada por $V(t) = \frac{1}{(7t+4)^2}$ entonces la rapidez media en cualquier intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es igual al medio geométrico entre la rapidez inicial y la rapidez final del móvil en ese intervalo.

50. Demostrar que las curvas $y = f(x)$ $(f(x) > 0)$ e $y = f(x) sen\, ax$ $a =$ *constante*, donde $f(x)$ es una función derivable, son tangentes una a otra en los puntos comunes.

51. Si $y = \dfrac{Arg\, sen\, hx}{\sqrt{1+x^2}}$, demostrar que: $(1+x^2)y' + xy = 1$.

52. *a*) Sea P un punto en la curva $x^2 = 2y + 1$. $\mathcal{Q}$ el punto donde la tangente en P corta al eje Y. Demostrar que el $\triangle \mathcal{Q}OP$ es siempre isósceles (O: origen de coordenadas).

    b) Un espejo tiene la forma dada por la curva $x^2 = 2x + 1$. Dado que el ángulo de incidencia es igual ángulo de reflexión, mostrar que los rayos luminosos que salen del origen se reflejan paralelos al eje X.

53. Demostrar que la función

$$f(x) = x^n[A\ cos\ \log x + B\ sen\ \log x]$$

donde A y B son constantes arbitrarias satisface la ecuación:

$$x^2y'' + (1-2n)xy' + (1+n^2)y = 0$$

54. Comprobar que la función:

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(5cos\frac{x}{\sqrt{2}} + 2sen\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(4cos\frac{x}{\sqrt{2}} + 3sen\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

satisface la ecuación: $y^4 + y = 0$.

55. Demostrar que:

$$(x^{n-1}\, e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$$

Indicación: Use inducción.

56. Determinar el ángulo formado por las tangentes a la izquierda y a la derecha a la curva:

 a) $y = \sqrt{1 - e^{-k^2x^2}}$ en el punto $x = 0$

 b) $y = Arcsen\dfrac{2x}{1+x^2}$ en el punto $x = 1$.

Respuesta.

a)$2\ Arc\,tan\frac{1}{|k|}$ b) $\frac{\pi}{2}$

57. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva:

$$x = \frac{2t+t^2}{1+t^3} \quad y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}$$

en los puntos:

 a) $t = 0$

 b) $t = 1$

 c) $t = \infty$

Respuesta.

a) $y = x;\ y = -x$ b) $y = 3x - 4;\ y = 1 - \frac{x}{3}$ c)$y = -x;\ y = x$

58. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva:

$$y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$$

en los puntos:

 a) $(-1, 0)$

 b) $(2, 3)$

 c) $(3, 0)$

Respuesta.

a) $y = \sqrt[3]{4}(x+1)$ $y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$ b) $y = 3;\ x = 2$ c) $x = 3,\ y = 0$

59. Si $f(x) = x^2\, e^{-\frac{x}{a}}$, demostrar que

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n(n-1)}{a^{n-2}};\ (n \geq 2)$$

Indicación: Use la fórmula de Leibniz.

60. Demostrar, para $n \in \mathbb{N};\ n > 1$, que:

$$\left[\frac{x^3}{x^2-1}\right]^{(n)}_{x=0} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -n! & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

61. Una lámpara dista $10m$ de una pared y está colgada a una altura de $3m$. respecto al eje de un sendero perpendicular a la pared. Un hombre de $1{,}75m$ de altura camina por el sendero hacia la pared a razón de $1m/seg$. ¿Con qué rapidez sube la sombra de la cabeza por la pared cuando está a $3m$ de ésta?

Respuesta.

0.255 m/seg.

62. Un avión se desplaza en vuelo horizontal a $8km$. de altura. (Se supone la tierra llana). La ruta de vuelo pasa por encima de un punto P del suelo. La distancia entre el avión y el punto P disminuye a razón de $4Km./min$. en el instante en el que esta distancia es de $10Km.$. Calcular la velocidad del avión en Km/hr.

Respuesta.

$400Km/hr$.

63. Encuentre $f'(x)$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (\log x - 1)(xArcsenx + \sqrt{1-x^2}) - \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right);$ $(0 < x \leq 1)$.

b) $f(x) = x + 2\log x + 2\sqrt{x+1} - \log(\sqrt{x+1}+1) + \log(\sqrt{x+1}-1)$

c) $f(x) = tg\ (Arcsecx) + \frac{1}{3}tg^3\ (Arc\, sec\, x)$

d) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(Arc\, sen\, \sqrt{x}) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}[\log(1+\sqrt{2}\; sen(Arc\,tg\, senx)) - \log(1-\sqrt{2}sen(Arctg\, senx)]$

Respuesta.

a) $\log x\; Arc\; senx$ b) $\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$ c) $\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}$

d) $Arc\, sen\sqrt{x}$ e) $(1-sen^4x)^{-1/2}$

64. Encontrar el polinomio: $y = x^8 + a_1x^7 + a_2x^6 + \cdots + a_0$ tal que satisfaga la ecuación $y'' + xy' - 8y = 0$

Respuesta.

$y = x^8 + 28x^6 + 210x^4 + 420x^2 + 105$

65. Un móvil se desplaza en línea recta con aceleración creciente en el intervalo de tiempo $[O, T](T > 0\; constante)$. Demostrar que la velocidad media en este intervalo es mayor que la velocidad en el punto medio del intervalo.

8.9. Funciones Hiperbólicas

Así como otras funciones las hemos estado utilizando aunque no en profundidad, por lo que es conveniente que las estudiemos un poco.

Frecuéntemente en análisis matemático se presentan ciertas combinaciones de funciones exponenciales que merecen se les dé nombres especiales y que se estudien como ejemplos de nuevas funciones. Estas combinaciones se denominan: **seno hiperbólico** (*senh*)**, coseno hiperbólico**(*cosh*)**, tangente hiperbólica** (*tgh*), etc., y se definen como sigue:

$$senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\; cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, tgh\, x = \frac{senh\, x}{cosh\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$coshx = \frac{1}{senh\, x}, \quad sech\, x = \frac{1}{cosh\, x},\; cotgh\, x = \frac{1}{tgh\; x}$$

Se llaman funciones hiperbólicas porque se pueden referir a una hipérbola de la misma manera que las funciones trigonométricas están referidas a la circunferencia. Las gráficas de *senh*, *cosh*, *cotgh* se dan en las figuras precedentes, además podemos decir que sus propiedades algebraicas son similares a las de las funciones trigonométricas.

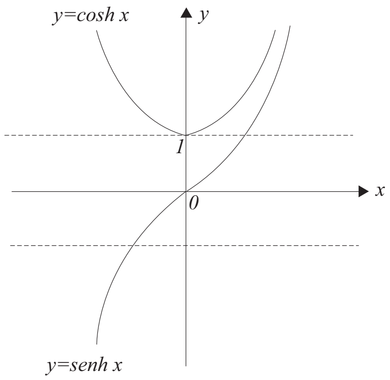

Figura 8.12: y=cosh(x),y=senh(x)

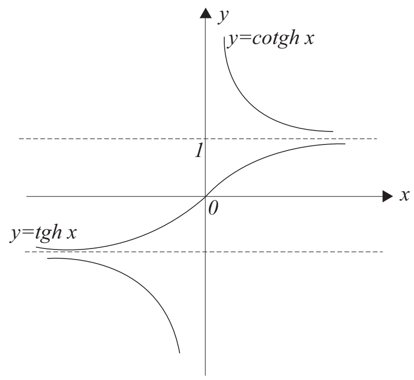

Figura 8.13: y=cotgh(x),y=tgh(x)

8.10. Ejercicios Resueltos

1. Pruebe que las derivadas de las funciones hiperbólicas están dadas por:

   $(cosh\, x)' = senh\, x;\ (senh\, x)' = cosh\, x;\ (tgh\, x)' = sech^2 x;$

   $(sech\, x)' = -sech\, x \cdot tgh\, x;\ (cotghx)' = -csch^2 x;$

   $(cschx)' = -cschx \cdot cotghx$

   Prueba:

   $(cosh\, x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) = senhx$

   $(senhx)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = coshx$

   En forma análoga Ud. puede verficar las derivadas restantes.

2. Resolver $cosh\, x = 2$

   Solución.

   $cosh\, x = 2 \Longrightarrow \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 2 \Longrightarrow$

   $\Longrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \Longrightarrow (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0 \Longrightarrow$

   $\Longrightarrow e^x = \frac{1}{2}(4 \pm \sqrt{12}) \Longrightarrow x = \log(2 \pm \sqrt{3})$

3. Analice la función coseno hiperbólico ($cosh$).

   Solución.

   $coshx$ tiene las siguienes propiedades:

a) es positivo

b) su dominio es $\mathbb{R}$

c) su recorrido es $[1, +\infty)$, porque $cosh0 = 1,\ coshx > 1 \wedge\ coshx \geq \frac{1}{2}e^x$

d) es una función par porque $e^{-x} + e^{-(-x)} = e^x + e^{-x}$, es decir, su gráfico es simétrico al eje Y(fig) además de este se puede observar que el punto (0,1) es un punto mínimo.

4. Probar:

a) $-senh^2x + cosh^2x = 1$

b) $cosh^2x + senh^2x = cosh\,2x$

c) $senh\,2x = 2senh\,x\ coshx$

d) $senh(x \pm y) = senh\,x\ cosh\,y \pm cosh\,x\ senh\,y$

e) $cosh(x \pm y) = cosh\,x\ coshy \pm senhx\ senhy$

f) $tgh^2x + sech^2x = 1$

g) $cotgh^2 - cosech^2x = 1$

h) $(cosh\,x + senh\,y)^n = cosh(nx) + senh\,(nx),\ n \in \mathbb{N}$

Prueba: Como $cosh + senh\,x = e^x \wedge coshx - senhx = e^{-x}$, multiplicándolas miembro a miembro resulta: $cosh^2x - senh^2x = 1$.

b) $cosh^2x + senh^2x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = cosh\,2x$

e)

$$cosh(x+y) = \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

$+\frac{e^x-e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y-e^{-y}}{2} = coshx\ coshy + senhx\ senhy.$

Nota: c), d), f), g) y h) quedan propuestos, por se análoga su solución.

5. Hallar dy/dx en:

a) $y = \dfrac{1}{4}senh\,2x - \dfrac{1}{2}x$

b) $y = \log\ tgh\ 2x$

Solución.

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(cosh\ 2x) \cdot 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(cosh\ 2x - 1) = senh^2x$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{tgh\ 2x} 2\ sech^2 x = \frac{2}{senh\ 2x\ cosh\ 2x} = 4cosh\ 4x$

6. Defina y explique la inversa de la función seno hiperbólico análogamente para las funciones: coseno hiperbólico y tangente hiperbólica.

Solución.

La aplicación $senh\, y$, es estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ la aplicación inversa tiene las mismas propiedades.

Definición

La aplicación inversa de $senh\ y$ se llama argumento seno hiperbólico y se escribe $arg\ senh\ x; x,\ y \in \mathbb{R}$; por tanto $x = senh\ y \Longleftrightarrow y = arg\, senhx$. Su gráfico se deduce a partir del gráfico de $senhx$, como es sabido por simetría con respecto a la bisectriz $y = x$

Derivada.

De la propiedad $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'}$ resulta

$$\frac{1}{(senhy)'} = \frac{1}{coshy} = \frac{1}{\sqrt{1+senh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ (coshy > 0)$$

pues: $y = Argsenhx \Longleftrightarrow x = senhy$

Entonces

$$(Argsenhx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{análogamente se obtienen}$$

$$(Argcoshx)' = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}};\ |x| > 1;\ (+) \quad \text{si} \quad x > 1 \quad \text{y} \quad (-) \quad \text{si} \quad x < 1$$

$$(Argtghx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ |x| < 1$$

7. Si $x = senh\, t$ e $y = senh\, pt$, pruebe que:

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = p^2 y \qquad (*)$$

Solución.

Como $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Longrightarrow p\, cosh\ pt = \frac{dy}{dx}\, cosht \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{p\, cosh\ pt}{cos\ ht}$

$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} \Longrightarrow p^2 senh\, pt = \frac{d^2y}{dx^2}(cosht)^2 + \frac{pcosh\, pt}{cosh\, t}\ senh\ t$

de donde: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p^2 senh\, pt - pcosh\ pt\ tght}{cosh^2 t}$, luego reemplazando en (*)

$cosh^2 t \cdot \frac{p^2 senh\ pt - pcosh\ pt\ tgh\ t}{cos\ h^2\ t} + sen\ ht \frac{p\, cosh\ pt}{cosh\ t} = p^2\ senh\ pt = p^2 y$

8.11. Funciones Hiperbólicas Inversas y sus Fórmulas de Derivación

$$senh^{-1}u = \log(u + \sqrt{1+u^2});\ cosh^{-1}u = \log(u + \sqrt{u^2-1}), u \geq 1$$

$$tgh^{-1}u = \frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u},\ u^2 < 1;\ cotgh^{-1}u = \frac{1}{2}\log\frac{u+1}{u-1},\ u^2 > 1$$

$$sech^{-1}u = \log\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u},\ 0 < u \leq 1;\ cosech^{-1}u = \log\left(\frac{1}{u} + \frac{\sqrt{1+u^2}}{|u|}\right),\ (u \neq 0)$$

Si u es una función derivable de x,

$$(senh^{-1}u)' = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx};\ (cosh^{-1}u)' = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx},\ u > 1$$

$$(tgh^{-1}u)' = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx},\ u^2 < 1;\ (cotgh^{-1}u)' = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, u^2 > 1$$

$$(sech^{-1}u)' = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx},\ 0 < u < 1;\ (cosech^{-1}u)' = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}\ (u \neq 0)$$

8.12. Ejercicios Propuestos

1. Pruebe que:

   a) $\frac{1}{2}(e^{\log(x+\sqrt{x^2+1})} - e^{-\log(x+\sqrt{x^2+1})}) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

   b) $x = \log\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)\right)$ implica $tgh\frac{x}{2} = tgh\frac{y}{2} \wedge tghx = seny \wedge coshx = \frac{1}{cosy}$

2. Resolver los sistemas:

   a) $arg\, senh\, x = 2\, arg\, senh\, y$
   $3\ \log\ x = 2\ \log\ y$

   b) $cosh\, x + cosh\, y = a$
   $senh\, x + senh\, y = b$

3. Hallar y' en:

   a) $cotgh^{-1}\dfrac{1}{x} = y$
   b) $y = sech^{-1}\,(cosx)$
   c) $y = ln\sqrt{tgh\;2x}$
   d) $x = a\,sech^{-1}(y/a) - \sqrt{a^2 - y^2}$
   e) $y = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^3$
   f) $y = \dfrac{3^x}{3^{2x} - 1}$

4. Demostrar:

   a) $y = a\,cosh\dfrac{x}{a}$ verifica $y'' = \dfrac{1}{a}\sqrt{1 + y'^2}$
   b) Si $y = A\,cosh\,bx + B\,senh\,x$ se verifica $y'' = b^2 y\,(A, B, b\,ctes)$

5. Calcule la derivada n-ésima de $y = e^{-xcosha}cosh(xcosha)$

6. Encuentre y', si $y = ln(senh(x + cosh^2 x))$

7. Si $cosz = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $sen\,z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$. Probar:$cosz = cosx\;coshy - isenx\;senhy$ donde $z = x + iy$.

8.13. Integración Integrales inmediatas

1. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

2. $\displaystyle\int u^{-1}du = \log|u| + C$

3. $\displaystyle\int a^u du = \frac{1}{\log a}a^u + C; \int e^u du = e^u + C$

4. $\displaystyle\int sen\,u\,du = -cosu + c; \int cosu\,du = senu + c$

5. $\displaystyle\int senh\,u\,du = cosh\;u + c; \int cosh\,u\,du = senhu + c$

6. $\displaystyle\int sec^2\,u\,du = tg\,u + c; \int cosec^2 u\,du = -cotgu + c$

7. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\,Arctg\frac{u}{a} + c_1 = -\frac{1}{a}Arc\,cotg\frac{u}{a} + c_2;\ (a>0)$

8. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = Arcsen\frac{u}{a} + c_1 = -Arcsen\frac{u}{a} + c_2; (a>0)$

En todas estas fórmulas la variable u es una variable independiente o una función derivable de alguna variable.

Observación.

Si $\displaystyle\int f(u)du = F(u) + c$ entonces $\displaystyle\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$

Nota: Expondremos fundamentalmente 5 métodos de integración.

8.14. Integración por Sustitución

El método consiste en sustituir x por $g(t)$ donde $g(t)$ es una función contínuamente derivable, así se tiene:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'\,(t)\,dt$$

con el objeto de llevar la integral a una de las integrales inmediatas expuestas en 8.13 y después de integrar deshacemos el cambio de variable mediante la sustitución inversa $t = g^{-1}(x)$.

8.15. Ejercicios Resueltos

1. *a*) $\displaystyle I = \int \frac{6x^3+x^2-20x+1}{x-2}dx$

   b) $\displaystyle I = \int (2x+7)^{17}dx$

   c) $\displaystyle I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

   d) $\displaystyle I = \int sen^2 x dx$

Solución.

a)

$$I=\int\left(6x^2+13x-6-\frac{11}{x-2}\right)dx=6\int x^2dx+13\int xdx-6\int dx-11\int\frac{dx}{x-2}$$

$$I=2x^3+\tfrac{13}{2}x^2-6x-11\log|x-2|+c$$

b) Usando la nota de 8.13 tenemos de inmediato

$$\int(2x+7)^{17}dx=\frac{1}{2}\frac{(2x+7)^{18}}{18}+c=\frac{1}{36}(2x+7)^{18}+c$$

c) $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x}dx=\int(x+1)^{1/2}dx+\int x^{1/2}dx=\frac{2}{3}[(x+1)^{3/2}+x^{3/2}]+c$

d) Usando la fórmula trigonométrica $sen^2x=\dfrac{1-cos2x}{2}$, tenemos

$$I=\tfrac{1}{2}\left(\int dx-\int cos\,2x\,dx\right)=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}\,sen2x+c$$

2. *a)* $I=\displaystyle\int cosh^2(6x+4)dx$

b) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x+1}$

c) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$

d) $I=\displaystyle\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

e) $I=\displaystyle\int\frac{cos\,2x\,dx}{cosx-senx}$

f) $I=\displaystyle\int\frac{(2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$

Solución.

a) Como $cosh^2\theta=\frac{cosh\,2\theta+1}{2}$, tenemos

$$I=\tfrac{1}{2}\int[1+cosh(12x+8)]dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int cosh(12x+8)dx$$

$$I=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{24}senh(12x+8)+c$$

b) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x+\frac{1}{2})^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$

c) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = Arcsen\frac{x+2}{3} + c$

d) $I = \displaystyle\int x^{1/3}dx - \int x^{-2/3}dx = \frac{3}{4}x^{4/3} - 3x^{1/3} + c$

e) $I = \displaystyle\int \frac{cos^2x - sen^2x}{cosx - senx}dx = \int cosx\,dx + \int senx\,dx = senx - cosx + c$

f) $I = \displaystyle\int \frac{2^x \cdot 2}{2^x 5^x}dx - \int \frac{5^x 5^{-1}}{2^x 5^x}\,dx = 2\int 5^{-x}dx - \frac{1}{5}\int 2^{-x}dx$

$I = -\frac{2}{\log 5}5^{-x} + \frac{1}{5\log 2}2^{-x} + c$

3. Hallar:

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{sen\,e^{-x}\,dx}{e^x}$

b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{x(4 - ln^2x)^{1/2}}$

c) $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{sen\,2x\;lntgx}$

Solución.

a) Sea $u = e^{-x} \Longrightarrow du = -e^{-x}dx$ luego: $I_1 = -\displaystyle\int sen\,u\,du = cosu + c =$ $cos\,e^{-x} + c$

b) Sea $u = \log x \Longrightarrow du = \frac{dx}{x} \Longrightarrow I_2 = \displaystyle\int \frac{du}{(2^2 - u^2)^{1/2}} = arc\,sen\frac{u}{2} + c =$ $arc\,sen\dfrac{\log x}{2} + c$

c) Sea $\log\, tgx = u \Longrightarrow tgx = e^u,\ \frac{1}{cos^2x}dx = e^u du \Longrightarrow dx = tgx\ cos^2x\,du =$ $\frac{1}{2}sen\,2xdu$, luego

$$I_3 = \tfrac{1}{2}\int \frac{sen2x\,du}{u\,sen\,2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\log\,u = \frac{1}{2}\log(\log\,tgx) + c$$

4. Hallar:

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{\log(\log x)dx}{x\log\,x}$

b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{1 - cos\frac{x}{3}}{sen\frac{x}{2}}dx$

c) $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Solución.

a) Sea $\log x = u \Longrightarrow \frac{dx}{x} = du$, luego $I_1 = \displaystyle\int \frac{\log\, u\, du}{u}$, sea $\log\, u = v \rightarrow$ $\frac{du}{u} = dv \Longrightarrow I_1 = \displaystyle\int v\, dv = \frac{1}{2}v^2 + c = \frac{1}{2}(\log\, u)^2 + c = \frac{1}{2}[\log(\log x)]^2 + c$

b) Sea $x = 6t$, $dx = 6dt$ luego: $I_2 = \displaystyle\int \frac{1 - cos2t}{sen3t} 6dt$, como

$1 - cos2t = 2sen^2 t$ y $sen3t = 3\, sent - 4sen^3 t$ entonces

$$I_2 = 6\int \frac{2\, sen^2 tdt}{3sent - 4sen^3 t} = 12\int \frac{sentdt}{3 - 4sen^2 t} = 12\int \frac{sentdt}{-1 + 4cos^2 t}$$

y con el cambio $cost = u \Longrightarrow -sentdt = du \Longrightarrow I_2 = 12\displaystyle\int \frac{du}{1 - 4u^2}$

$\Longrightarrow I_2 = 6\, arc\, tgh\, 2u + c = 6\, arc\, tgh(2\, cos\frac{x}{6}) + c$

c) Sea $x = (u-1)^2 \Longrightarrow dx = 2(u-1)du, \Longrightarrow I_3 = \displaystyle\int \frac{(u-1)2du}{u}$

$= 2\displaystyle\int (1 - \frac{1}{u})du = 2u - 2\log(u) + c = 2(1 + \sqrt{x}) - 2\log(1 + \sqrt{x}) + c$

$= 2\sqrt{x} - 2\log(1 + \sqrt{x}) + c_1$

5. Calcular:

a) $\displaystyle\int secx\; dx$

b) $\displaystyle\int (x-a)^{n-1}(x-b)^{-(n+1)}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{a\, senx + b\, cosx}$

Solución.

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{secx(secx + tgx)dx}{secx + tgx} = \int \frac{(sec^2 x + secx\, tgx)dx}{secx + tgx}$

Sea $u = secx + tgx$; $du = (sec^2 x + secx\; tgx)dx$, luego:

$I_1 = \displaystyle\int \frac{du}{u} = \log\, |secx + tgx| + c$

b) Sea $u = \frac{x-a}{x-b} \Longrightarrow du = \frac{a-b}{(x-b)^2}dx$ luego como $I_2 = \displaystyle\int \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{n-1}.$

$$\frac{dx}{(x-b)^2} = \frac{1}{a-b}\int u^{n-1}du = \frac{u^n}{n(a-b)} + c = \frac{1}{n(a-n)}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n + c$$

c) Sea $a = k\,cos\alpha;\ b = k\,sen\alpha \Longrightarrow k = \sqrt{a^2+b^2}$, luego I_3 queda:

$$I_3 = \int \frac{dx}{k(senx\,cos\alpha + cosx\,sen\alpha)} = \int \frac{1}{ksen(x+\alpha)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{2\,sen(\frac{x+\alpha}{2})cos\frac{(x+\alpha)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{sec^2(\frac{x+\alpha}{2})dx}{2tg\frac{(x+\alpha)}{2}},$$

sea $\quad u = tg\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) \Longrightarrow du = sec^2\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$

luego: $I_3 = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\displaystyle\int \frac{du}{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log|tg\,|\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)|+c,$

con $\alpha = arc\,cos\,(a/\sqrt{a^2+b^2})$.

6. Hallar:

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^2-4)^{1/2}}$

b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}}$

c) $I_3 = \displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución.

a) Sea $x = 2\,sec\theta \Longrightarrow dx = 2sec\theta\,tg\theta\,d\theta$ entonces: $I_1 = \displaystyle\int \frac{2sec\theta\,tg\theta\,d\theta}{8sec^3\theta\,tg\theta\cdot 2}$

$$= \frac{1}{8}\int cos^2\theta d\theta = \frac{1}{16}\int(1+cos2\theta)d\theta = \frac{\theta}{16} + \frac{sen\theta\,cos\theta}{16} + c \Longrightarrow$$

$$I_1 = \frac{1}{16}(arc\,sec\tfrac{x}{2} + sen(arc\,sec\tfrac{x}{2})cos(arcsen\tfrac{x}{2})) + c$$

b) Sea $u^2 = x+1 \Longrightarrow 2\,u\,du = dx \Longrightarrow I_2 = \displaystyle\int \frac{(u^2-1)^2}{u}du = \int \frac{u^4-2u^2+1}{u}du \Longrightarrow$

$$I_2 = \int(u^3 - 2u + \frac{1}{u})du = \frac{u^4}{4} - u^2 + \log|u| + c = \frac{(x+1)^4}{4}$$

$$-(x+1)^2 + \log|x+1| + c$$

c) Sea $x = sec\theta \Longrightarrow dx = sec\theta\ tg\theta\, d\theta \Longrightarrow I_3 = \displaystyle\int \frac{sec^3\theta\ sec\theta\ tg\theta}{tg\theta} d\theta$

$$I_3 = \int sec^4\theta\ d\theta = \int sec^2\theta(1 + tg^2\theta)d\theta = \int sec^2\theta d\theta$$

$$+ \int sec^2\theta\ tg^2\theta\ d\theta = \int sec^2\theta\ d\theta + \int tg^2\theta\ d(tg\theta) = tg\theta + \frac{1}{3}tg^3\theta$$

$+c = tg(arc\, secx) + \frac{1}{3}tg^3(arc\, secx) + c$

7. Hallar:

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{1 - xsen\,\alpha}{1 - 2xsen\alpha + x^2}\ dx$

b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 4x - 1}}$

Solución.

a)

$$I_1 = \int \frac{cos^2\alpha - sen\alpha(x - sen\alpha)}{1 - 2x\ sen\alpha + x^2}dx$$

$$= cos^2\alpha \int \frac{dx}{cos^2\alpha + (x - sen\alpha)^2} - \frac{sen\alpha}{2} \cdot \int \frac{2x - 2sen\alpha}{1 - 2xsen\alpha + x^2}dx$$

$= cos\alpha\ arc\,tg\left(\frac{x - sen\alpha}{cos\alpha}\right) - \frac{sen\alpha}{2}\log|1 - 2x\ sen\alpha + x^2| + c$

b) Sea $x = 1/t \Rightarrow dx = -1/t^2$ luego:

$$I_2 = \int \frac{-dt}{\sqrt{8 - (t+2)^2}} = -arcsen\frac{2x+1}{2\sqrt{2}} + c$$

8. Hallar:

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{ae^x - b}{ae^x + b}dx$

b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{secx\, dx}{\sqrt{senx\ cosx}}$

c) $I_3 = \displaystyle\int a^x\ b^{2x}\ e^{3x}dx$

Solución.

$a)$ $I_1 = \displaystyle\int \frac{ae^{x/2} - be^{x/2}}{ae^{x/2} + be^{x/2}} dx$, sea $u = ae^{x/2} + be^{x/2}$; $du = \frac{1}{2}(ae^{x/2} - be^{-x/2})dx$

con lo que $I_1 = 2\displaystyle\int \frac{du}{u} = 2 \log |ae^{x/2} + be^{x/2}| + c$

$b)$ $I_2 = \displaystyle\int \frac{sec^2x\,dx}{\sqrt{tgx}}$, sea $u = tgx \Rightarrow du = sec^2x\,dx \Rightarrow$

$I_2 = \displaystyle\int u^{-1/2} du = 2(tgx)^{1/2} + c$

$c)$ $I_3 = \displaystyle\int e^{x\log a} e^{2x\log b} e^{3x}\, dx = \int e^{(\log a + 2\log b + 3)x}\, dx =$

$\frac{e^{(\log a + 2\log b + 3)x}}{\log a + \log b + 3} + c;\ \left(\begin{array}{c} a > 0 \\ b > 0 \end{array}\right)$

9. Hallar:

$a)$ $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - sen\,2x}}$

$b)$ $I_2 = \displaystyle\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$

$c)$ $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

Solución.

$a)$ $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - cos(\pi/2 - 2x)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dx}{sen(\pi/4 - x)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cdot \displaystyle\int cosec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left|tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right| + c$

$b)$

$$I_2 = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + (B - \frac{Ab}{2a})}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$$

$$+ \left(B - \tfrac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx$$

$$+ \left(B - \tfrac{Ab}{2a}\right)\frac{1}{a}\int \frac{dx}{[(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}]}$$; en la primera

$ax^2 + bx + c = t$ en la segunda $x + \frac{b}{2a} = u$; queda

$$\tfrac{A}{2a}\int \frac{dt}{t} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2+k^2} = \frac{A}{2a}\log|t| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\frac{1}{ak}arctg\frac{u}{k}$$

$+c = \frac{A}{2a}\log|ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\frac{1}{ak}arctg\frac{(x+\frac{b}{2a})}{k} + c$

en que $k = \sqrt{c - \frac{b^2}{4a^2}}$.

c) Sea $(x-a) = (b-a)sen^2u \Rightarrow dx = (b-a)\,2sen\,u\,cosu\,du \Rightarrow$

$$I_3 = \int \frac{(b-a)2sen\,u\,cosu\,du}{\sqrt{(b-a)sen^2u\,(b-a)(1-sen^2u)}} = 2\int \frac{senu\;cosu\;du}{\sqrt{sen^2u\;cos^2u}} =$$

$$2\int du = 2u + c = 2arc\,sen\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + c$$

10. *a*) $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

b) $I = \displaystyle\int cos^5x\sqrt{senx}\,dx$

c) $I = \displaystyle\int \frac{\log x dx}{x\sqrt{1+\log x}}$

Solución.

a) $I = \int \frac{x+2+2\sqrt{x+1}}{x}dx = \int dx + 2\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

Para la integral $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$ sea $x+1 = t^2 \iff dx = 2tdt$, así $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt = 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt = 2\int dt + 2\int \frac{1}{t^2-1}dt$

$= 2\int dt - \left(\int \frac{1}{t+1}dt - \int \frac{1}{t-1}dt\right) = 2t - \log|t+1| + \log|t-1|$, finalmente
$I = x + 2\log|x| + 2\sqrt{x+1} - \log|\sqrt{x+1}+1| + \log|\sqrt{x+1}-1| + c$

b) $I = \int(1-sen^2x)^2\sqrt{senx}cosx\,dx$; sea $t^2 = senx \iff 2t\,dt = cosx\,dx$

$I = \int(1-t^4)^2t\,2t\;dt = 2(\int t^2\,dt - 2\int t^6\,dt + \int t^{10}dt)$

$I = \frac{2}{3}(senx)^{3/2} - \frac{4}{7}(senx)^{7/2} + \frac{2}{11}(senx)^{11/2} + c$

c) Sea $u = \log x \iff du = \frac{1}{x}dx$ así: $I = \int \frac{u\,du}{\sqrt{1+u}}$

ahora $1+u = t^2 \iff du = 2t\,dt$; luego: $I = 2\int \frac{(t^2-1)t\,dt}{t}$

$I = 2(\int t^2dt - \int dt) = 2\frac{t^3}{3} - t + c = \frac{2}{3}(1+\log x)^{3/2} - 2\sqrt{1+\log x} + c$

11. Calcular:

$$I = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^4 x}}dx$$

Solución.

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+sen^2 x}\, cosx} = \int \frac{cosx\, dx}{\sqrt{1+sen^2 x cos^2 x}}$, sea

$u = senx \iff du = cosx\, dx \Rightarrow I = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2(1-u^2)}}$

ahora $u = tg\theta \iff du = sec^2\theta\, d\theta$ y queda

$I = \int \frac{sec\theta}{1-tg^2\theta} d\theta = \int \frac{cos\theta}{1-2sen^2\theta} d\theta$; finalmente hacemos $sen\theta = t$, luego:

$I = \int \frac{dt}{1-2t^2} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{1+\sqrt{2}t} + \int \frac{dt}{1-\sqrt{2}t}\right)$

$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}[\log(1+\sqrt{2}t) - \log(1-\sqrt{2}t)]$

$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}[\log(1+\sqrt{2}sen(Arctg\, senx)) - \log(1-\sqrt{2}sen(Arctg\, senx))] + c$

8.16. Ejercicios Propuestos

1.

a) $I = \displaystyle\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^4+3x^2+1)Arctg\frac{x^2+1}{x}}$ b) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(x+x^2)^3}}}$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^2+1-2x}}{1-x}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{senx + cosx}{(senx - cosx)^{1/3}}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x^2}}$ f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{6(\sqrt[3]{x}-1)}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{a\, senx + b\, cosx + c}$ h) $\displaystyle\int \sqrt{a+4x}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{(senxcosx)^2}$ j) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

k) $\displaystyle\int \frac{sen\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$ l) $\displaystyle\int \frac{cotgx\, dx}{cotg^2 x - 1}$

m) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x}}$ n) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x^2}$

ñ) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}$ o) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{1-x}}dx$

Respuesta.

a) $I = \log|u| + c = \log|Arctg\left(x+\frac{1}{x}\right)| + c$

b) $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + c$

c) $-\frac{5}{2}(x-1)^{2/5} + c$

g) Haga $\begin{cases} a = ksen\alpha \\ \\ b = kcos\alpha \\ \\ c = k \end{cases}$

j) $Arctge^x + c$

l) $\frac{1}{2}\log|sec2x| + c$

n) $arcsen\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c$

o) $-4arc\,sen\frac{1}{2}\sqrt{1-x} - \sqrt{3-2x-x^2} + c$

8.17. Integración por Partes

Sean g y h dos funciones definidas en el intervalo $[a,b]$ y que admiten derivadas contínuas g' y h' sobre $[a,b]$. Entonces para todo x tal que $a \leq x \leq b$ se tiene que:

$$\int_a^x g(t)h'(t)dt = g(x)h(x) - g(a)h(a) - \int_a^x g'(t)h(t)dt$$

en particular

$$\int_a^b g(t)h'(t)dt = g(t)h(t)|_a^b - \int_a^b g'(t)h(t)dt$$

poniendo $u = g(t)$ y $v = h(t)$ se tiene $du = g'(t)dt$ y $dv = h'(t)dt$ y la fórmula de integración por partes toma una forma abreviada que es más fácil recordar:

$$\int udv = uv - \int v\,du + c.$$

Nota: Para usar esta fórmula hay que reducir convenientemente el integrando a un producto de dos factores: una función y el diferencial de otra función.

8.18. Ejercicios Resueltos

1. Hallar:

   a) $\int x^2\, cosx\, dx$

   b) $\int \log\, x\, dx$

   c) $\int x^3\, arctgx\, dx$

   Solución.

   a) Sea $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \wedge dv = cosxdx \Rightarrow v = senx$ luego $\int x^2 cosx\, dx = x^2 senx - \int senx\, 2x\, dx$; nuevamente sea $u = x \Rightarrow du = dx \wedge dv = senx\, dx \Rightarrow v = -cosx$, con lo que:

   $$\int x^2 cosx\, dx = x^2 senx - 2[x(-cosx) - \int (-cosx) dx] = x^2 senx$$

   $$+2x\, cosx - 2senx + c$$

   b) Sea $u = \log x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx;\ dv = dx \Rightarrow v = x$ luego:

   $$\int \log\, x dx = x\, \log\, x - \int dx = x\, \log x - x + c = x(\log x - 1) + c$$

   c) Sea $dv = x^3 dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \wedge u = arc\, tgx$

   $\Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$, luego : $\int x^3 arc\, tgx\, dx$

   $= (arctgx)\frac{x^4}{4} - \int \dfrac{x^4}{4(1+x^2)} dx = \dfrac{x^4}{4} arc\, tgx - \dfrac{1}{4}$

   $\left[\int (x^2 - 1) dx + \int \dfrac{1}{1+x^2} dx\right] = \frac{x^4}{4} arc\, tgx - \frac{1}{4}$

   $\left[\frac{x^3}{3} - x + arc\, tgx\right] + c = \frac{1}{4}(x^4 - 1) arctgx - \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{4} x + c.$

2. Hallar:

   a) $I_1 = \int e^{ax} senbx\, dx$

   b) $I_2 = \int e^{ax} cosbx\, dx$

   c) $I_3 = \int e^{2x} sen\, 3x\, dx$

Solución.

a) y b) Sea $u = e^{ax} \Rightarrow du = a\, e^{ax} x \wedge dv = senbx\, dx \Rightarrow v = -\frac{1}{b} cosbx$
luego $I_1 = e^{ax}\left(-\frac{1}{b} cosbx\right) + \frac{a}{b} I_2$, análogamente para I_2, llegamos a:
$I_2 = \frac{1}{b} e^{ax}\, senbx - \frac{a}{b} I_1$, de donde resolviendo este sistema de 2 ecuaciones resulta:

$I_1 = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\, sen\, bx - bcos\, bx) + c_1 \wedge$

$I_2 = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\, senbx + a\, cosbx) + c_2$
para c) es inmediato que:

$$I_3 = \frac{e^{2x}}{13}(2\, sen\, 3x - 3\, cos\, 3x) + c.$$

3. Hallar:

   a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(xcosx - senx)^2}$

   b) $I_2 = \displaystyle\int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2} dx$

   c) $I_3 = \displaystyle\int \frac{x\, ln\, x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución.

a)

$$I_1 = \int \frac{x^2\, senx\, dx}{senx(x\, cosx - senx)^2},$$

sea $u = \frac{x}{senx} \Rightarrow du = \frac{senx - x\, cosx}{sen^2 x} dx$

y $dv = \frac{xsenx\, dx}{(x\, cosx - senx)^2} \Rightarrow v = \displaystyle\int \frac{x\, senx\, dx}{(xcosx - senx)^2}$,

de donde haciendo el cambio de variable:

$t = xcosx - senx \Rightarrow dt = -xsenx\, dx$; luego

$v = \displaystyle\int -\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{1}{xcosx - senx}$, con lo que:

$I_1 = \frac{x}{senx} \frac{1}{(xcosx, senx)} - \displaystyle\int \frac{(senx - x\, cosx)dx}{(xcosx - senx)sen^2 x},$

finalmente: $I_1 = \frac{x}{senx(xcosx - senx)} - cotgx + c.$

b) $I_2 = \int e^x \frac{(x+1)^2 - 2x}{(x+1)^2} dx = \int e^x dx - 2\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$, calculamos la segunda integral por partes, sea

$u = xe^x \Rightarrow du = (xe^x + e^x)dx \wedge dv = \frac{dx}{(1+x)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{1+x}$ con lo que:

$$\int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2} = -xe^x \frac{1}{1+x} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{1+x} + e^x,$$

finalmente: $I_2 = e^x - 2\left(\frac{-xe^x}{1+x} + e^x\right) + c = \frac{(x-1)e^x}{1+x} + c$

c) Sea $u \log x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \wedge dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow v = -\sqrt{1-x^2}$, luego: $I_3 = -\sqrt{1-x^2}\log|x| + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$, hacemos en la última integral: $x = sen\theta,\ dx = cos\theta d\theta$ luego:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx = \int \frac{cos^2\theta d\theta}{sen\theta} = \int \frac{1-sen^2\theta}{sen\theta}d\theta = \int cosec\theta\, d\theta$$

$$-\int sen\theta\, d\theta = \log|cosec\theta - cotg\theta| + cos\theta = \log|cosec(arcsenx) -$$

$$-cotg(arcsenx)| + cos(arcsenx) = \log\left|\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + \sqrt{1-x^2}$$

con lo que finalmente resulta:

$$I_3 = -\sqrt{1-x^2}\log\,|x|\ + \log|1-\sqrt{1-x^2}| - \log|x| + \sqrt{1-x^2} + c$$

4. Hallar:

a) $I_1 = \int \frac{x + senx}{1 + cosx}dx$

b) $I_2 = \int \frac{x^2 arctgx}{1+x^2}dx$

c) $I_3 = \int x^2 \log(1+x)dx$

Solución.

a) Sea

$$u = x + senx \Rightarrow du = (1 + cosx)dx \wedge v = \int \frac{1-cosx}{sen^2x}dx =$$

$$cosecx - cotgx \text{ luego } I_1 = (x + senx)(cosecx - cotgx)$$

$$-\int (cosecx - cotgx)(1 + cosx)dx = x(cosecx - cotgx)$$

$$+(1 - cosx) - \int senx\, dx = x(cosecx - cotgx) + c.$$

b) Sea $\theta = arctgx \Rightarrow tg\theta = x;\ d\theta = \frac{1}{1+x^2}dx$, luego queda:

$I_2 = \displaystyle\int tg^2\theta \cdot \theta\ d\theta$ entonces sea $u = \theta \Rightarrow du = d\theta \wedge dv$

$= tg^2\theta d\theta \Rightarrow v = \displaystyle\int (sec^2\theta - 1)d\theta = tg\theta - \theta$ por lo tanto:

$I_2 = \theta(tg\theta - \theta) - \displaystyle\int (tg\theta - \theta)d\theta = \theta(tg\theta - \theta) - \log|sec\theta| +$

$\frac{1}{2}\theta^2 + c$

$I_2 = arctgx(x - arc\,tgx) + \log\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2}(arctgx)^2 + c.$

c) Sea $u = \log(1+x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x}dx \wedge dv = x^2dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}x^3$,

luego: $I_3 = \frac{1}{3}x^3\log(1+x) - \displaystyle\int \frac{x^3}{1+x}dx = \frac{1}{3}x^3\log(1+x)$

$- \displaystyle\int (x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x})dx = \frac{x^3}{3}\log(\log(1+x) - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \log|1+x| + c$

5. Hallar:

a) $I_1 = \displaystyle\int (x^2 + 7x - 5)cos\,2x\,dx$

b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{e^x(1 + \log x^x)}{x}dx$

c) $I_3 = \displaystyle\int \frac{\log x}{x^3}dx$

Solución.

a) sea $u = x^2 + 7x - 5 \Rightarrow du = (2x+7)dx \wedge v = \displaystyle\int cos\,2x\,dx$

$= \frac{1}{2}sen2x$, luego: $I_1 = \frac{1}{2}(x^2 + 7x - 5)sen2x - \displaystyle\int sen\,2x\frac{(2x+7)}{2}dx,$

ahora $u = \frac{2x+7}{2} \Rightarrow du = dx \wedge dv = sen\,2x\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}cos2x,$

luego: $\displaystyle\int sen\,2x\frac{(2x+7)}{2}dx = \frac{2x+7}{2}\left(-\frac{1}{2}cos2x\right) + \int \frac{1}{2}cos\,2x\,dx$
$= -\frac{1}{4}(2x+7)cos2x + \frac{1}{4}sen2x$, con lo que finalmente resulta:

$$I_1 = \frac{1}{2}(x^2 + 7x - 5)sen2x + \frac{1}{4}(2x+7)cos2x - \frac{1}{4}sen2x + c$$

b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{e^x}{x}dx + \int e^x \log\, x dx$, como $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}dx$ se conoce con el nombre de logaritmo integral y no se puede expresar mediante funciones elementales, pero observaremos que en la segunda integral; sea $u = \log x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$, luego queda $I_2 = \displaystyle\int \frac{e^x}{x}dx + e^x \log x - \int \frac{e^x}{x}dx = e^x \log x + c$

c) Sea $u = \log x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \wedge dv = x^{-3}dx \Rightarrow v = -\frac{x^{-2}}{2}$, luego queda: $I_3 = -\frac{x^{-2}}{2}\log x + \displaystyle\int \frac{x^{-2}}{2}\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{2}x^{-2}\log x + \frac{1}{2}$

$$\int x^{-3}dx = -\frac{x^{-2}}{2}\log\, x - \frac{1}{4}x^{-2} + c$$

$I_3 = -\frac{1}{2x^2}\left(\log x + \frac{1}{2}\right) + c$

6. Calcular:

a) $I = \displaystyle\int \log(1-\sqrt{x})dx$

b) $I = \displaystyle\int \log(x) Arc\, sen x\, dx$

Solución.

a) Sea $u = 1-\sqrt{x} \Longleftrightarrow du = -\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow dx = -2(1-u)du$

$$I = -2\int (\log(u)(1-u)du = 2\ (\int u\log(u)du - \int \log(u)du)$$

Integrando ambas por partes, se tiene para la primera: $u_1 = \log u \Longleftrightarrow du_1 = \frac{1}{u}du \wedge dv = u\, du \Longleftrightarrow v = \frac{u^2}{2}$; para la segunda de inmediato por ejercicio 1.b) , es igual a: $u(\log|u| - 1)$; finalmente:

$$I = u^2\left[\log|u| - \tfrac{1}{2}\right] - 2u[\log|u| - 1] + c = (1-\sqrt{x})^2\left[\log|1-\sqrt{x}| - \tfrac{1}{2}\right]$$

$$-2(1-\sqrt{x})[\log|1-\sqrt{x}| - 1] + c$$

b) Sea $u = Arcsenx \Longleftrightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \wedge dv = \log x dx \Longleftrightarrow v = x(\log|x| - 1)$ así:

$I = x\, Arcsenx(\log|x| - 1) - \displaystyle\int \frac{(\log|x|-1)x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, nuevamente por partes

$u = \log|x| - 1 \Longleftrightarrow du = \frac{1}{x}dx \wedge dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Longleftrightarrow v = -\sqrt{1-x^2}$

así: $= -(\log|x|-1)\sqrt{1-x^2} + \displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$ para esta última sea

$1-x^2 = t^2 \Rightarrow -2xdx = 2t\,dt \Longleftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{tdt}{1-t^2}$, luego

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx = \int \frac{-t^2}{1-t^2}dt = \int \frac{(1-t^2-1)}{1-t^2}dt$$

$$= \int dt - \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1-t}dt + \int \frac{1}{1+t}dt\right) = t - \frac{1}{2}(-\log|1-t| + \log|1+t|)$$

$= \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}(\log|1-\sqrt{1-x^2}| + \log|1+\sqrt{1-x^2}|)$
finalmente resumiendo resulta:

$$I = (\log|x|-1)(xArcsenx + \sqrt{1-x^2}) - \sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\log|1+\sqrt{1-x^2}| - \tfrac{1}{2}$$

$$\cdot \log|1-\sqrt{1-x^2}| + c$$

7. Calcular:

   a) $I = \displaystyle\int Arc\,sen\sqrt{x}\;dx$

   b) $I = \displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$

Solución.

a) $x = u^2 \Longleftrightarrow dx = 2udu;\; \begin{cases} Arc\,sen\,u = t \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = dt \\ \\ dv = u\,du \Longleftrightarrow v = \frac{u^2}{2} \end{cases}$

$I = 2\displaystyle\int u\,Arc\,sen\,udu = 2\left(\frac{1}{2}u^2\,Arc\,senu - \frac{1}{2}\int \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}du\right)$

para $\displaystyle\int \frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{sen^2\theta cos\theta d\theta}{\sqrt{1-sen^2\theta}} = \int sen^2 d\theta$ por ejercicio resuelto 1.
d) $= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}sen2\theta$; así finalmente:

$$I = u^2\,Arc\,sen - \tfrac{1}{2}Arc\,senu + \tfrac{1}{4}sen2\,Arcsenu + c$$

$$I = x\,Arcsen\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}Arc\,sen\sqrt{x} + \tfrac{1}{4}sen2(Arcsen\sqrt{x}) + c$$

b) $I = \displaystyle\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{x} = \int x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, la segunda integral es inmediata; para la primera $x = sen\theta \Longleftrightarrow dx = cos\theta d\theta$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{cos\theta d\theta}{cos\theta sen\theta} = \int cosec\theta\,d\theta = -\int \frac{-cosec\theta(cosec\theta + cotg\theta)d\theta}{cosec\theta + cotg\theta}$$

$= -\log|cosec\theta + cotg\theta|$; luego:

$I = -\log|cosec(Arcsenx) + cotg(Arcsenx)| - Arcsenx + c$

8. Calcular:

a) $I = \displaystyle\int x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$

b) $I_1 = \displaystyle\int cos(\log(x))dx$

Solución.

a) $I = \displaystyle\int [x\log(x+1) - x\log(x)]dx = \int x\log(x+1)dx - \int x\ \log(x)dx$ la segunda integral está calculada en el ejercicio 6. a), para la primera, se tiene; $u = \log(x+1) \iff du = \frac{1}{x+1}dx;\ v = \frac{x^2}{2}$

$\displaystyle\int x\ \log(x+1)dx = \frac{1}{2}x^2\log(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}dx = \frac{1}{2}x^2\log(x+1) - \frac{1}{2}$ $\displaystyle\left(\int (x-1)dx + \int \frac{1}{x+1}dx\right) = \frac{1}{2}x^2\log|x+1| - \frac{1}{4}(x+1)^2 - \log|x+1|$, finalmente:

$$I = \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)\log|x+1| - \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{x^2}{2}\left(\log|x| - \frac{1}{2}\right) + c$$

b) $u = cos\log x \iff du = -sen\log x \cdot \frac{1}{x}dx; dv = dx \iff v = x$

$I_1 = x\,cos\ \log x + \displaystyle\int sen\log x dx$; análogamente

$u = sen\ \log x \iff du = cos\log x\frac{1}{x}dx;\ v = x$

$I_1 = x\,cos\ \log x + (x\,sen\ \log x - I_1) \iff I_1 = \frac{1}{2}x$

$[cos\log x + sen\log x] + c$

9. Calcular:

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+1}[\log(x^2+1) - 2\log(x)}{x^4}dx$$

Solución.

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\log\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)dx = \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\frac{\log(1+\frac{1}{x^2})}{x^3}dx$$

sea $u = 1+\frac{1}{x^2} \Longleftrightarrow du = -\frac{2}{x^3}dx \Rightarrow I = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\log(u)du$

ahora $t = \log(u) \Longleftrightarrow dt = \frac{1}{u}du \wedge dv = \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u\sqrt{u}$

luego: $I = \frac{2}{3}u^{3/2}\log(u) - \frac{2}{3}\int \sqrt{u}du = \dfrac{2}{3}u^{3/2}\left(\log(u) - \dfrac{2}{3}\right) + c$

$I = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{3}\right] + c$

10. Determinar las fórmulas de reducción para calcular las integrales siguientes:

a) $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

b) $I_n = \displaystyle\int tg^n x\, dx$

Solución.

a) Sea $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \Longleftrightarrow du = -\frac{2nx\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}};\ v = x$

luego: $I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$

$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\displaystyle\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$

$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\, I_n - 2n\, a^2\, I_{n+1}$, de donde

$I_{n+1} = \frac{1}{2n\,a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2}I_n$

b) Sea $dv = senx\,dx \Longleftrightarrow v = -cosx$ y

$u = \frac{sen^{n-1}x}{cos^n x} \Longleftrightarrow du = \frac{cos^{n-1}x\,sen^{n-2}x}{cos^{2n}x}[(n-1)cos^2 x$

$+n\,sen^2 x]$ de donde $du = \frac{sen^{n-2}x}{cos^{n+1}x}(n - cos^2 x)$; así

$$I_n = -tg^{n-1}x + n\int \frac{sen^{n-2}x}{cos^n x}dx - \int tg^{n-2}x dx$$

$$I_n = -tg^{n-1}x + n\int tg^{n-2}x\, sec^2 x dx - I_{n-2}$$

$$I_n = -tg^{n-1}x + \tfrac{n}{n-1}tg^{n-1}x - I_{n-2}$$

$I_n = \frac{1}{n-1} tg^{n-1}x - 1_x - I_{n-2} (n \geq 2)$ además $I_1 = \log|secx| + c$

e $I_0 = x + c$

11. Si $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{\log^n(x)}$ demostrar que:

Solución.

Sea $u = \log^{-n}(x) \Longleftrightarrow du = -n(\log x)^{-n-1}\dfrac{1}{x}dx;\ v = x$

$I_n = x(\log x)^{-n} + n \displaystyle\int \frac{dx}{(\log x^{n+1}} \Longleftrightarrow I_n = \frac{x}{\log^n(x)} + n\, I_{n+1}$; para $n-1$ se tiene: $I_{n-1} = \frac{x}{(\log(x))^{n-1}} + (n-1)I_n$, de donde $I_n = \frac{-x}{(n-1)\log^{n-1}(x)} + \frac{1}{n-1}\, I_{n-1}$

12. Calcular:

$$I = \int Arc\, cos\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$$

Solución.

Sea $z = \frac{x}{x+1} \Longleftrightarrow dx = \frac{2z}{(1-z^2)^2}dz$; así:

$I = 2\displaystyle\int \frac{z\, Arc\, cosz}{(1-z^2)^2}dx$; ahora integrando por partes

$u = Arc\, cosz \Longleftrightarrow du = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \wedge dv = \frac{2z}{(1-z^2)^2}dz \Longleftrightarrow v = \frac{1}{1-z^2}$

$I = \frac{Arccosz}{1-z^2} + \displaystyle\int \frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}$; haciendo $z = sen\theta$ queda:

$I = \displaystyle\int \frac{cos\theta d\theta}{cos^2\theta\, cos\theta} = \int sec^2\theta\ d\theta = tg\theta$; finalmente

$I = \frac{Arc\, cos(\frac{x}{x+1})}{1-(\frac{x}{x+1})^2} + tg\left\{Arc\, sen\left(\frac{x}{x+1}\right)\right\} + c$

13. Demostrar que para todos los valores positivos impares de n, la integral $I = \displaystyle\int e^{-x^2}x^n dx$ puede ser avaluada en términos de funciones elementales.

Demostración.

Sea n impar luego $n = 2m-1,\ m \in \mathbb{N}$ y $t = x^2 \Longleftrightarrow dt = 2x\, dx$, así:

$I = \displaystyle\int e^{-t}(t^{1/2})^{2m-1}\frac{1}{2}\frac{1}{t^{1/2}}dt = \frac{1}{2}\int e^{-t}t^{m-1}dt$, integrando por partes, se tiene:

$u = t^{m-1} \Longleftrightarrow du = (m-1)t^{m-2}dt$

$dv = e^{-t}dt \Longleftrightarrow v = -e^{-t}$, luego

$I = \frac{1}{2}(-e^{-t}t^{m-1} + (m-1)\int e^{-t}t^{m-2}dt)$, nuevamente

$u = t^{m-2} \Longleftrightarrow du = (m-2)\cdot t^{m-3}dt$ y $v = -e^{-t}$

$I = \frac{1}{2}[-e^{-t}t^{m-1} - (m-1)e^{-t}t^{m-2} + (m-1)(m-2)\int e^{-t}t^{m-3}dt)$

y así sucesivamente repitiendo el proceso por partes, $m-1$ veces llegaremos a:

$I = \frac{1}{2}\left[-e^{-t}t^{m-1} - \frac{(m-1)!}{(m-2)!}e^{-t}t^{m-2} - \frac{(m-1)!}{(m-3)!}e^{-t}t^{m-3} - \frac{(m-1)!}{2!}e^{-t}t^{2}\right.$

$\left. - \frac{(m-1)!}{1!}e^{-t}t - (m-1)!e^{-t}\right]$

8.19. Ejercicios Propuestos

1. Encuentre las primitivas, usando el método por partes, de:

a) $\int x^3 e^{x^2} dx$ b) $\int x^2 senx\, dx$

c) $\int \log(\log x)\frac{dx}{x}$ d) $\int sen^4 x dx$

e) $\int x^2 sen^2 x dx$ f) $\int (\log x/\sqrt{x})dx$

g) $\int (2+3x) sen\, 5x\, dx$ h) $\int x\, senx\, cosx\, dx$

i) $\int x\, senx^2\, cosx^2\, dx$ j) $\int 4x\, e^{2x} dx$

k) $\int x^n\, \log x\, dx$ l) $\int x\, arc\, senx\, dx$

m) $\int arctg\, \sqrt{x}\, dx$ n) $\int arc\, sen\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\, dx$

o) $\int x\, arc\, tg\, \sqrt{x^2-1} dx$ p) $\int arc\, senx \dfrac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

q) $\displaystyle\int \frac{arcsenx}{x^2}dx$ r) $\displaystyle\int \frac{x\,cosx}{sen^2x}dx$

s) $\displaystyle\int x^2a^xdx$ t) $\displaystyle\int e^{Arc\,senx}\,dx$

Respuestas.

a) $\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1)+c$ b)$-x^2cosx+2x\,senx+2cosx+c$

c) $\log\,x\cdot\log(\log x)-lnx+c$ d) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}sen2x+\frac{1}{32}sen4x+c$

f)$2\sqrt{x}\log x-4\sqrt{x}+c$ g) $-\frac{2}{5}cos5x+\frac{3}{25}sen\,5x-\frac{3}{5}\cdot x\,cos\,5x+c$

k) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x-\frac{1}{n+1}\right)+c$ m) $(x+1)arctg\,\sqrt{x}-\sqrt{x}+c$

o) $\frac{1}{2}x^2\,arctg\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+c$ p)$\log\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{2}arc\,senx+c$

r)$-x\,cosecx+\frac{1}{2}\left|\frac{1-senx}{1+senx}\right|+c$ s) $\left(\frac{x^2}{\log a}-\frac{2x}{(\log a)^2}+\frac{2}{(\log a)^3}\right)a^x+c$

t)$\frac{1}{2}e^{Arcsenx}(x+\sqrt{1-x^2})+c$

2. Calcular:

a) $\displaystyle\int cos(\log x)dx$

b) $\displaystyle\int sen(\log x)dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{1+3cos^2x}sen\,2x\,dx$

Respuesta.

a) $(x/2)(cos\log x+sen\log x)+c$ b) $(x/2)(sen\log x-cos\log x)+c$

3. *a)* $I_n(x)=\displaystyle\int_0^x t^n(t^2+a^2)^{-1/2}dt$ aplicar el método de integración por partes para demostrar que:

$$nI_n(x)=x^{n-1}\sqrt{x^2-a^2}-(n-1)a^2I_{n-2}(x);\ n\geq 2$$

b) Aplicando a) demostrar que:

$$\int_0^2 x^5(x^2+5)^{-1/2}dx=168/5-40\sqrt{5}/3$$

4. Calcular:

a) $\displaystyle\int senx\ \log(tgx)dx$ b) $\displaystyle\int \log(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$

c) $\displaystyle\int (x^2-2x+3)\log(x)dx$ d) $\displaystyle\int \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^x dx$

e) $\displaystyle\int x^3 cosh\, 3xdx$ f) $\displaystyle\int \frac{Arc\, cotge^x}{e^x}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x\, e^x}{(1+x)^2}dx$ h) $\displaystyle\int \log(senx)cosec^2xdx$

Respuesta.

a) $-cosx\ \log(tgx)+\log\left|tg\frac{x}{2}\right|+c$

b) $x\ \log(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ Arcsenx+c$

c) $\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\log(x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x+c$

d) $x-\frac{1-x^2}{2}\ \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+c$

e) $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{9}\right)senh3x-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)cosh\ 3x+c$

f) $-x+\frac{1}{2}\log(1+e^{2x})-e^{-x}Arc\,cotg(e^x)+c$

g) $\frac{e^x}{x+1}+c$

h) $-[x+cotgx\ \log(e\,senx)]+c$

5. Aplicando integración por partes, deducir las siguientes fórmulas de reducción:

a) $I_n=\displaystyle\int [\log x]^n = x(\log x)^n - n\ I_{n-1}$

b) $I_n=\displaystyle\int x^r(\log x)^n dx=\frac{x^{r+1}}{r+1}(\log x)^n-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}(\alpha\neq -1)$

c) $I_n=\displaystyle\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\ I_{n-1}$

d) $I_n=\displaystyle\int e^{\alpha x}sen^n x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+n^2}sen^{n-1}x(\alpha senx-ncosx)+\frac{n(n-1)}{\alpha^2+n^2}I_{n-2}$

e) $I_n=\displaystyle\int\frac{x^n}{\sqrt{x^2+a}}dx=\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+a}-\frac{n-1}{n}\alpha\ I_{n-2};\ n\geq 2$ donde $I_0=\log|x+\sqrt{x^2+a}|+c;\ I_1=\sqrt{x^2+a}+c$

6. Deducir la fórmula de reducción por la integración de $I_n=\displaystyle\int\frac{dx}{sen^nx}$ y utilizarla para calcular la integral $I_3=\displaystyle\int\frac{dx}{sen^3x}$.

Respuesta.

$I_n = \frac{-cosx}{(n-1)sen^{n-1}x} + \frac{n+2}{n-1} I_{n-2} (n \geq 2)$

7. Calcular:
$$\int \frac{x^2 dx}{x\, senx + cosx}$$

Indicación: Derive $\dfrac{1}{xsenx + cosx}$ y proceda como en el ejercicio resuelto N° 3(a).

8. Deducir las fórmulas de reducción:

a) $I_n = \displaystyle\int sen^n x\, dx$

b) $I_n = \displaystyle\int cos^n\, x\, dx$

Respuesta.

a) $I_n = -\frac{cosx\, sen^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}$

b) $I_n = \frac{senxcos^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

8.20. Integración de Funciones Racionales

Se trata de calcular la integral de la función $\dfrac{g(x)}{f(x)}$, es decir: $\int \dfrac{g(x)}{f(x)}$, si la fracción es impropia, la expresaremos como suma de un polinomio $M(x)$ y una fracción racional propia $\dfrac{F(x)}{f(x)}$, luego ésta fracción la descomponemos en una suma de fracciones simples.

Caso I.

Las raíces del denominador son reales y distintas, es decir: $f(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)$, luego:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n},$$

y entonces:

$\displaystyle\int \frac{F(x)}{f(x)}dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}dx + \int \frac{A_2}{x-a_2}dx + \cdots + \int \frac{A_n}{x-a_n}dx = A_1 \log\ |x-a_1| +$ $A_2 \log\ |x-a_2| + \cdots + A_n \log |x-a_n| + c$

Caso II.

Las raíces del denominador son reales, pero algunas son múltiples, es decir :$f(x) = (x-a_1)^\alpha \cdot (x-a_2)\cdot(x-a_3)^\beta \cdots (x-a_n)$, luego: $\dfrac{F(x)}{f(x)} = \dfrac{A_1}{(x-a_1)^\alpha} + \dfrac{A_2}{(x-a_1)^{\alpha-1}} + \dfrac{A_\alpha}{x-a_1} + \cdots + \dfrac{A_{\alpha-1}}{x-a_1} + \dfrac{B}{x-a_2} + \dfrac{C_1}{(x-a_3)^\beta} + \cdots + \dfrac{C_\beta}{x-a_3} + \cdots + \dfrac{D}{x-a_n}$

y se procede en forma análoga a la anterior.

Caso III.

Las raíces del denominador son complejas simples (es decir, distintas):

$$f(x) = (x^2+px+q)(x^2+lx+s)\cdots(x-a)^\alpha\cdots(x-d),$$

y entonces:

$\dfrac{F(x)}{f(x)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+px+q} + \dfrac{Cx+D}{x^2+\log x+s} + \cdots + \dfrac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \dfrac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \dfrac{A_\alpha}{x-a} + \cdots + \dfrac{F}{x-d}.$

Caso IV.

Las raíces del denominador son complejas pero algunas son múltiples; su descomposición es similar a la de los casos II y III.

Observación.

Se pueden determinar las constantes: $A_1, A_2, \cdots, A_n, B, C_1, \cdots, \cdots D \cdots$ teniendo en cuenta: la igualdad $\dfrac{F(x)}{f(x)} = \dfrac{A_1}{x-a_1} + \dfrac{Bx+C_1}{x^2+lx+s} + \cdots$ etc. es una identidad, por consiguiente al reducir éstas fracciones a un común denominador obtendremos en los numeradores del 1^{er} y 2^{do} miembro idénticos polinomios. Igualando los coeficientes de los términos que tengan las mismas potencias de x, obtendremos un sistema de ecuaciones para determinar las constantes: $A_1, A_2, \cdots, B, C_1, \cdots$ otra manera, más inmediata es, teniendo en cuenta la siguiente observación: los polinomios obtenidos en ambos miembros de la igualdad, después de la reducción de las fracciones a un común denominador, deben ser idénticamente iguales, por lo tanto los valores de estos polinomios serán iguales para cualquier valor particular de x. Dando a x valores particulares, obtendremos pues las ecuaciones necesarias para la determinación de dichas constantes.

8.21. Ejercicios Resueltos

1. Hallar:

   a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{(2x+7)dx}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

   b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{x^3(x-1)(x+3)^2}dx$

   c) $I_3 = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+2x+5)}$

   Solución.

   a) Sea $\frac{2x+7}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-3} \Rightarrow 2x+7 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + c(x-1)(x+2)$,

   como la identidad se debe verificar para todos los valores de x; para $x = 1 \Rightarrow 2+7 = A(3)(-2) \Rightarrow A = -\frac{3}{2}$; análogamente $x = -2 \Rightarrow B = \frac{1}{5} \wedge x = 3 \Rightarrow c = \frac{13}{10}$ luego:

   $$I_1 = \int \left(\frac{-3/2}{x-1} + \frac{1/5}{x+2} + \frac{13/10}{x-3} \right) dx = -\frac{3}{2}\log|x-1|$$

   $+\frac{1}{5}\, log|x+2| + \frac{13}{10}\, log|x-3| + c$

   b) Obsérvese que:

   $\frac{x^2+2x+3}{x^3(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{x+3}$, de donde procediendo en forma análoga a (a) obtenemos:

   $A = -\frac{1}{3}; B = -\frac{1}{3}; C = -\frac{11}{27}; D = \frac{3}{8}; E = \frac{7}{216}; F = \frac{1}{18}$

   con lo que $I_2 = -\frac{1}{3}\displaystyle\int \frac{dx}{x^3} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{11}{27}\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{8}$

   $\displaystyle\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{7}{216}\int \frac{dx}{(x+3)^2} + \frac{1}{18}\int \frac{dx}{x+3}$ finalmente,

   $I_2 = \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{3x} - \frac{7}{216(x+3)} - \frac{11}{27}\log|x| + \frac{3}{8}\log|x-1| + \frac{1}{18}\log|x+3| + c$

c) Como: $\frac{x}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+c}{x^2+2x+5} \Rightarrow x = A(x^2+2x+5)$

$+(Bx+c)(x+1)$ de donde:

$A = -\frac{1}{4}; B = \frac{1}{4}; C = \frac{5}{4}$ luego:

$$I_3 = -\tfrac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{(x+5)dx}{x^2+2x+5} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{8}\int$$

$$\tfrac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} + \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = -\frac{1}{4}log|x+1| + \frac{1}{8}log|x^2+2x+5|$$

$+\frac{1}{2}arc\,tg\frac{x+1}{2} + c_1.$

2. Hallar:

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{(x^2-x+1)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)^2}$

b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{(cos^2x + 4senx - 5)cosx}$

c) $I_3 = \displaystyle\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2} \frac{dx}{x}$

Solución.

a) Sea

$\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+2x+5)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{(x^2+2x+5)} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+5)^2} \Rightarrow$

$A = \frac{1}{64}; B = -\frac{1}{64}; c = -\frac{3}{64}; D = \frac{7}{8}; E = -\frac{3}{8}$ luego

$$I_1 = \tfrac{1}{64}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{(-\frac{x}{64} - \frac{3}{64})dx}{x^2+2x+5} + \int \frac{(\frac{7}{8}x - \frac{3}{8})dx}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{1}{64}log$$

$|x-1| - \frac{1}{128}log|x^2+2x+5| - \frac{1}{64}\,arc\,tg\frac{x+1}{2} - \frac{7}{16}$

$$\cdot\tfrac{1}{x^2+2x+5} - \tfrac{10}{8}\int \frac{dx}{[(x+1)^2+4]^2} + c'$$

sea $x+1 = 2tg\theta \Rightarrow dx = 2sec^2\theta$ luego:

$$\int \frac{dx}{[(x+1)^2+4]^2} = 2\int \frac{sec^2\theta d\theta}{(4tg^2\theta+4)^2} = \frac{1}{8}\int \frac{d\theta}{sec^2\theta} = \frac{1}{8}\int cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{8}\int \frac{cos\,2\theta + 1}{2}d\theta = \frac{1}{32}sen\,2\theta + \frac{\theta}{16} + c'',$$ finalmente:

$I_1 = \frac{1}{64} log\,|x-1| - \frac{1}{128}\log\,|x^2+2x+5| - \frac{3}{32} arc\,tg\frac{x+1}{2} - \frac{1}{32}$

$\frac{5x+19}{x^2+2x+5} + c_1;\ c_1 = c' + c''$

b) Haciendo previamente $u = senx \Rightarrow du = cosx\ dx$ luego

$$I_2 = \int \frac{cosx\,dx}{(sen^2x - 4senx + 4)(sen^2x - 1)}$$

$$I_2 = \int \frac{du}{(u-2)^2(u+1)(u-1)},$$ ahora sea $\frac{1}{(u-2)^2(u+1)(u-1)}$

$= \frac{A}{(u-2)^2} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{u-1} + \frac{D}{u+1} \Rightarrow 1 = A(u^2-1) + B(u-2)(u^2-1)$

$+C(u-2)^2(u+1) + D(u-2)^2(u-1)$; de donde resulta:

$$A = 1/3; B = -4/9; C = 1/2; D = -1/18 \Rightarrow I_2 = \tfrac{1}{3}\int \frac{du}{(u-2)^2}$$

$$-\tfrac{4}{9}\int \frac{du}{u-2} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} + \left(-\frac{1}{18}\right)\int \frac{du}{u+1} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{3(u-2)} - \frac{4}{9}$$

$\cdot log|u-2| + \frac{1}{2}log|u-1| - \frac{1}{18}log|u+1| + c$, finalmente

$I_2 = \frac{1}{3(senx-2)} - \frac{4}{9}log|senx-2| + \frac{1}{2}log|senx-1| - \frac{1}{18}log$

$|senx+1| + c$

c) Sea previamente $u^2 = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x = \frac{1+u^2}{1-u^2} \Rightarrow dx = \frac{4u\,du}{(1-u^2)^2}$, entonces:

$$I_3 = \int u\frac{1-u^2}{1+u^2}\frac{4u\,du}{(1-u^2)^2} = \int \frac{4u^2}{1-u^4}du = \int \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} - \frac{2}{1+u^2}\right)du =$$
$log|1+u|$

$+[log|1-u| - 2arc\,tgu + c = log\left|\frac{1+[(x-1)/(x+1)]^{1/2}}{1-[(x-1)/(x+1)]^{1/2}}\right| - 2arctg$

$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2} + c$

3. Hallar:

a) $$I_1 = \int \frac{(x^3-2x+1)dx}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}$$

b) $$I_2 = \int \frac{x^2dx}{(x+a)^2(x^2+a^2)}$$

c) $$I_3 = \int \frac{(x^2+1)^2dx}{(x-1)^6}$$

Solución.

a) Podemos poner de inmediato que:

$$\int \frac{(x^3-2x+1)dx}{x^3(x-2)(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} + \frac{3}{4}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} + \frac{11}{8}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{40}\int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx - \frac{1}{5}\int \frac{7x+4}{x^2+1}dx$$

$$= \tfrac{1}{4x^2} - \tfrac{3}{4x} + \tfrac{11}{8}log|x| + \tfrac{1}{40}log|x-2| + \tfrac{1}{2(x^2+1)} - \tfrac{x}{2(x^2+1)}$$

$$-\tfrac{1}{2}arc\,tgx - \tfrac{7}{10}log|x^2+1| - \tfrac{4}{5}arc\,tgx + c$$

De inmediato:

$$\int \frac{x^2dx}{(x+a)^2(x^2+a^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+a)^2} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} + \frac{1}{2a}\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$$

$$= -\tfrac{1}{2(x+a)} - \tfrac{1}{2a}log|x+a| + \tfrac{1}{4a}log|x^2+a^2| + c = \tfrac{1}{2a}$$

$$\cdot \left[log\left|\tfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x+a}\right| - \tfrac{a}{x+a}\right] + c$$

(c) Como: $\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} = \frac{4}{(x-1)^6} + \frac{8}{(x-1)^5} + \frac{8}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2}$, de donde, entonces:

$$\int \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}dx = 4\int \frac{dx}{(x-1)^6} + 8\int \frac{dx}{(x-1)^5} + 8\int \frac{dx}{(x-1)^4} + 4\int \frac{dx}{(x-1)^3}\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= -\tfrac{4}{5(x-1)^5} - \tfrac{8}{4(x-1)^4} - \tfrac{8}{3(x-1)^3} - \tfrac{2}{(x-1)^2} - \tfrac{1}{(x-1)} + c$$

4. Hallar:

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$

b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{xdx}{x^6-1}$

c) $I_3 = \displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^4+x^2+1}$

Solución.

a) Como: $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{4}$ y haciendo $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}z \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dz$ entonces $I_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^3 \displaystyle\int \frac{dz}{(1+z^2)^3}$ y como $1 = 1+z^2-z^2$ luego: $\displaystyle\int \frac{dz}{(1+z^2)^3} = \int \frac{dz}{(1+z^2)^2} - \int \frac{z^2dz}{(1+z^2)^3}$, integrando la última por partes sea $z = u \Rightarrow dz = du \wedge dv = \frac{z\,dz}{(1+z^2)^3} \Rightarrow v = -\frac{1}{4(1+z^2)^2}$, entonces:

$\displaystyle\int \frac{z^2dz}{(1+z^2)^3} = -\frac{z}{4(1+z^2)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$; por otra parte $\displaystyle\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int \frac{dz}{1+z^2} - \int \frac{z^2dz}{(1+z^2)^2}$ calculando esta integral por partes con $z = u \Rightarrow dz = du \wedge dv = \frac{z\,dz}{(1+z^2)^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{2(1+z^2)}$ entonces: $\displaystyle\int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^2} = -\frac{z}{(1+z)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2}$ con lo que $\displaystyle\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}arctgz.$

$\displaystyle\int \frac{dz}{(1+z^2)^3} = \frac{z}{4(1+z^2)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{z}{4(1+z^2)^2} + \frac{3z}{8(1+z^2)} + \frac{3}{8}arc\,tg\,z + c$ luego:

$I_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^3\left[\frac{3(3z^2+5)}{8(1+z^2)^2} + \frac{3}{8}arctgz\right] + c$

$= \frac{(2x+1)(2x^2+2x+3)}{6(x^2+x+1)^3} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\,arc\,tg\frac{2x+1}{3} + c$

b) Haciendo (u^2+u+1); $\frac{1}{u^3-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+c}{u^2+u+1} \Rightarrow 1 = A(u^2+u+1) + (Bu+c)(u-1)$; si $u = 1 \Rightarrow 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ análogamente obtenemos: $B = -\frac{1}{3} \wedge c = -\frac{2}{3}$, luego: $I_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\int\frac{du}{u-1} - \frac{1}{3}\displaystyle\int \frac{u+2}{u^2+u+1}du\right]$ para calcular la 2^{da} integral, hacemos:

$u+2 = \frac{1}{2}(2u+1) + \frac{3}{2}$, es decir $\displaystyle\int \frac{(u+2)du}{u^2+u+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2u+1)du}{u^2+u+1}$

$\displaystyle +\frac{3}{2}\int \frac{du}{u^2+u+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2u+1)du}{u^2+u+1} + \frac{3}{2}\int \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

$= \frac{3}{\sqrt{3}}arc\,tg\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}log[u^2+u+1] + c',$

finalmente

$I_2 = \frac{1}{6}log|u-1| - \frac{1}{12}log[u^2+u+1] - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,arc\,tg\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + c$

$= \frac{1}{6}log|x^2-1| - \frac{1}{12}log[x^4+x^2+1] - \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}} + c$

c) Haciendo

$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow I_3 = \frac{1}{2}\displaystyle\int \frac{u\,du}{u^2+u+1} = \frac{1}{4}$

$\displaystyle\cdot\int \frac{(2u+1)du}{u^2+u+1} - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2+u+1} = \frac{1}{4}log[u^2+u+1] - \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg$

$\frac{2u^2+1}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{4}log[x^4+x^2+1] - \frac{\sqrt{3}}{6}arctg\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}} + c$

5. Calcular:

   a) $I = \int \frac{x^2}{1+x^4}dx$

   b) $I = \int \sqrt{tgx}dx$

   c) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{tgx}}$

   Solución.

   a)

   $\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{x^2}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}$

   $\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ de donde: $x^2 = (A+C)x^3 + (-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D)x^2$

   $+(A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D)x + B + D$ y $A + C = 0; -\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D = 1;$

   $A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0; B + D = 0$ resolviendo el sistema encontramos:

   $A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}; B = D = 0$ y $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ así entonces:

   $$I = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x\,dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x\,dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

   $$I = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{(2x+\sqrt{2})dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

   $$\cdot \int \frac{(2x-\sqrt{2})dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

   $$I = -\frac{1}{4\sqrt{2}} log(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4} Arctg\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

   $$log(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4} Arctg\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$$

   $$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[log\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + 2Arctg(1+\sqrt{2}x) + 2\,Arctg(\sqrt{2}x-1)\right] + c.$$

   b) Sea $t^2 = tgx \Longleftrightarrow 2t\,dt = sec^2x\,dx \Longleftrightarrow dx = \frac{2t\,dt}{1+tg^2x} = \frac{2t\,dt}{1+t^4}$ y se llega a $I = 2\int \frac{t^2\,dt}{1+t^4}$; integral calculada en a).

c) Análogamente con el mismo cambio, llegamos

$$I = \int \frac{2t\,dt}{(1+t^4)t} = 2\int \frac{dt}{1+t^4},$$

la cual se calcula como en la parte a) de donde resulta:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{log\left[\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right] + 2Arctg(\sqrt{2}t+1) + 2Arctg(\sqrt{2}t-1)\right\} + c$$

y queda por hacer $t = \sqrt{tgx}$

6. Calcular:

$$I = \int \frac{dx}{sen2x - 8sen^2x}$$

Solución.

$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{senx(cosx-4senx)} = \dfrac{1}{2}\int \frac{sec^2x\,dx}{tgx(1-4tgx)}$ sea $u = tgx \Longleftrightarrow du = sec^2xdx$; así queda:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u(1-4u)};\ \frac{1}{u(1-4u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-4u} \Longleftrightarrow 1 = A(1-4u)$$

$+B\,u$; para $u = 0 \Rightarrow A = 1$ y si $u = \frac{1}{4} \Rightarrow B = 4$ luego:

$$I = \frac{1}{2}\left(\int \frac{du}{2} + 4\int \frac{du}{1-4u}\right) = \frac{1}{2}(log|u| - log|1-4u|) + c$$

$$I = \frac{1}{2}(log|tgx| - log|1-4tgx|) + c$$

Nota: En el capítulo siguiente, indicamos cuando se deben elegir estas sustituciones, para llevar una integral con formas trigonométricas a formas racionales.

8.22. Ejercicios Propuestos

1. Hallar las primitivas, usando el método de Fracciones Parciales, de:

a) $\displaystyle\int \frac{12x^2-70x+98}{x^3-9x^2+26x-24}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{6x^2+25x-9}{x^4-14x^3+107x^2-422x+850}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+1)^2}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^2+(a+b)x+ab}$

e) $\displaystyle\int \frac{a(7x^2-28ax+24a^2)}{x^3-7ax^2+14a^2x-8a^3}dx$ f) $\displaystyle\int \frac{360x^2-126x+17}{24x^3-10x^2-3x+1}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{(x+2)^3}dx$ h) $\displaystyle\int \frac{6x^2-3x+1}{x^3-x^2}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{(x^2+6x-1)dx}{(x-1)^3(x+5)^3}$ j) $\displaystyle\int \frac{xdx}{a+bx^3}$

k) $\displaystyle\int \frac{x^2-\sqrt{ax}+3}{(x+\sqrt{a})^5}dx$ l) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^4-1)}$

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})x^2+(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})x+\sqrt{abc}}$

2. Mediante una sustitución adecuada llevar las integrales indicadas a una forma racional:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+cosx)senx}$ b) $\displaystyle\int \frac{sen^2xdx}{senx+2cosx}$

c) $\displaystyle\int \frac{senxdx}{sen^3x+cos^3x}$ d) $\displaystyle\int \frac{senxcosx}{1+sen^4x}$

e) $\displaystyle\int \frac{sen^2xcosx}{senx+cosx}dx$

Respuesta.

a) $\frac{1}{6}log\left(\frac{(1-cosx)(2+cosx)^2}{(1+cosx)^3}\right)+c$

b) $-\frac{1}{5}(2senx+cosx)+\frac{4}{5\sqrt{5}}log\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{Arctg2}{2}\right)\right|+c$

c) $-\frac{1}{6}log\left[\frac{(senx+cosx)^2}{1-senxcosx}\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}\,Arc\,tg\left(\frac{2cosx-senx}{\sqrt{3}senx}\right)+c$

d) $\frac{1}{2}\,Arctg(sen^2x)+c$

e) $\frac{1}{4}log|senx+cosx|-\frac{1}{4}cosx(senx+cosx)+c$

3. Calcular previa sustitución artificiosa las integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{cosx\sqrt[3]{sen^2x}}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{tgx}}$

c) $\displaystyle\int \frac{senx-cosx}{senx+2cosx}dx$

Respuesta.

a) $\frac{1}{4}\,log\left|\frac{(1+t)^3(1+t^3)}{(1-t)^3(1-t^3)}\right|-\frac{\sqrt{3}}{2}Arctg\frac{1-t^2}{1+\sqrt{3}}+c;\ t=\sqrt[3]{sen^2}x$

b) $\frac{1}{4}\,log\left(\frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}Arctg\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}+c;\ t=\sqrt[3]{tgx}$

c) $-\frac{x}{5} - \frac{3}{5} log|senx + 2cosx| + c$

4. ¿Cuál es la condición para que la integral

$$a) \int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx \qquad b) \int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}dx$$

representa una función racional?

Respuesta.

a) $a + 2b + 3c = 0$ b) $a\gamma + c\alpha = 2b\beta$

5. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^{10}dx}{x^2+x-2}$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+1}$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$ f) $\displaystyle\int \frac{x^3-x^2-x+1}{(x^2-1)^2}dx$

Respuesta.

a) $\frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21}{4}x^4 + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} + 171x + \frac{1}{3}\ log\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right| + c$

b) $x + \frac{1}{6}\ log|x| - \frac{9}{2}\ log|x-2| + \frac{28}{3}\ log|x-3| + c$

c) $\frac{1}{6}\ log\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}Arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$

d) $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ log\left(\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}\right) + \frac{1}{2}Arctgx + \frac{1}{6}Arctgx^3 + c$

e) $\frac{1}{4}\ log\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}Arctg\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + c$

f) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ log|x^2-1| + c$

8.23. Otros Métodos de Integración

Integrales del tipo $I = \displaystyle\int f(senx,\, cosx)dx$

I) Como se verá a continuación, muchas integrales se pueden simplificar por medio de la situación $tg\dfrac{x}{2} = z$, o como se observa a través del triángulo, por las sustituciones:

$$sen\frac{x}{2} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}},\ cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

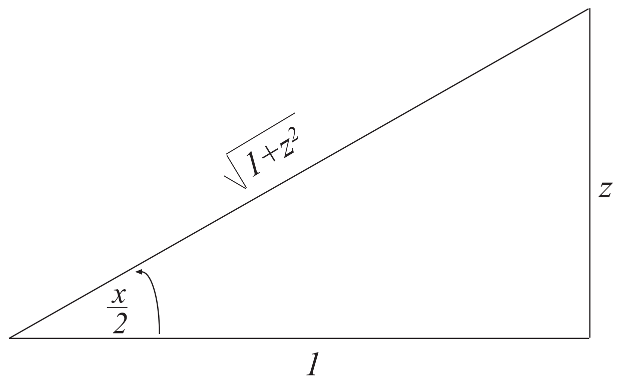

Figura 8.14: Caso I

a partir de la relación

$$sen2\left(\frac{x}{2}\right) = 2sen\frac{x}{2}cos\frac{x}{2},$$

obtenemos:

$senx = \dfrac{2z}{1+z^2} = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ cosx = \dfrac{1-z^2}{1+z^2} = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \wedge tgx = \dfrac{2z}{1-z^2} = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$. Como $x = arctgz$, entonces: $dx = \dfrac{2dz}{1+z^2} = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, en resumen $I = \displaystyle\int f(senx,\ cosx)dx = 2\int \frac{f\left(\frac{2z}{1+z^2},\ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)dz}{1+z^2}$ que es racional en z.

II) Otras sustituciones de importancia:

1) Si $f(senx,\ cosx)$ es par en $senx$, $cosx$(no se altera al sustituir simultáneamente $senx$ por $-senx \wedge cosx$ por $-cosx$) el cambio $tgx = z$ la racionaliza.

2) Si $f(senx,\ cosx)$ es impar en $cosx$(cambia el signo al sustituir $cosx$ por $-cosx$) el cambio $senx = z$ la racionaliza.

3) Si $f(senx,\ cosx)$ es impar en $senx$ (cambia el signo al sustituir $senx$ por $-senx$) el cambio $cosx = z$ la racionaliza.

III) Integración de exponenciales.

a) Si $I = \displaystyle\int f(e^{mx})dx$, se hace $e^{mx} = z$, la cual transforma el integrando en una fracción racional en z.

b) Si $I = \int g(x, e^{ax}, sen\, mx,\ cosmx,\ senx, \cdots)$, se expresan las potencias y los productos del seno y coseno en función lineal del seno y del coseno de los arcos múltiples, que la reducen a: $\int x^m e^{ax} cosbx\, dx \wedge \int x^m e^{ax} sen\, bx\, dx$.

8.24. Ejercicios Resueltos

1. Hallar

a) $I_1 = \int \dfrac{dx}{1 + senx + cosx}$

b) $I_2 = \int \dfrac{dx}{12 + 5tgx}$

c) $I_3 = \int \dfrac{senx\, dx}{1 + senx}$

Solución.

a) $I_1 = \int \dfrac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1 + \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \dfrac{2dz}{2z+1} = log|2z+1| + C = log|2\, tg\dfrac{x}{2} + 1| + C$

b) Sea $tg\frac{x}{2} = z$ entonces $I_2 = \int \dfrac{(z^2-1)dz}{(z^2+1)(6z^2-5z-6)} = \int \dfrac{(z^2-1)dz}{(z^2+1)(3z+2)(2z-3)}$, ahora sea

$\frac{(z^2-1)}{(z^2+1)(3z+2)(2z-3)} = \frac{Az+B}{z^2+1} + \frac{C}{3z+2} + \frac{D}{2z-3}$

$\Rightarrow z^2 - 1 = (Az+B)(6z^2-5z-6) + C(z^2+1)(2z-3) + D(z^2+1)(3z+2)$

$\Rightarrow A = -\frac{10}{169}, B = \frac{24}{169}, C = \frac{15}{169}$ y $D = \frac{10}{169}$, entonces :

$I_2 = \frac{1}{169} \int \dfrac{-10z+24}{z^2+1} + \dfrac{15}{169} \int \dfrac{dz}{3z+2} + \dfrac{10}{169} \int \dfrac{dz}{2z-3}$

$= -\frac{5}{169} log|z^2+1| + \frac{24}{169} arctgz + \frac{5}{169} log|2z-3| + C$

$= -\frac{5}{169} log\left(sec^2 \frac{x}{2}\right) + \frac{12}{169}x + \frac{5}{169} log|3tg\frac{x}{2} + 2| + \frac{5}{169} log|2\, tg\frac{x}{2} - 3| + C$

c) Descomponiendo $\frac{senx}{1+senx} = 1 - \frac{1}{1+senx}$ entonces $I_3 = \int dx - \int \dfrac{1}{1+senx} dx$, para calcular la segunda integral, sea: $tg\frac{x}{2} = z \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1+z^2}$, con lo que: $\int \dfrac{dx}{1+senx} = 2 \int \dfrac{dz}{(z+1)^2} = -2\dfrac{1}{z+1} + C$; por lo tanto, $I_3 = x - \frac{2}{tg\frac{x}{2}+1} + C$.

2. Hallar:

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{tgx}{1+cosx}dx$

b) $I_2 = \displaystyle\int (x^2-1)arcsen2x\,dx$

c) $I_3 = \displaystyle\int \frac{sen3x}{senx}e^x\,dx$

Solución.

a) Sea $cosx = z \Rightarrow -senx\,dx = dz$ entonces $I_1 = -\displaystyle\int \frac{dz}{z(z+1)}$ ahora $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} \Rightarrow A = 1 \wedge B = -1 \Rightarrow I_1 = -\displaystyle\int \frac{dz}{z} + \int \frac{dz}{z+1}$

$I_1 = -log|z| + log|1+z| + C = log\left|\frac{1+z}{z}\right| + C \Rightarrow I_1 = log\left|\frac{1+cosx}{cosx}\right| + C$

b) Por partes tenemos que: $arc\,sen2x = u \Rightarrow du = \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$, $(x^2-1)dx = dv \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} - x$ luego $I_2 = \frac{x}{3}(x^2-3)arcsen2x - \frac{2}{3}\displaystyle\int \frac{x^3-3x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ para ésta última integral hagamos $2x = sen\theta$, $2dx = cos\theta d\theta$, por lo tanto, $\displaystyle\int \frac{x^3-3x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{\frac{sen^2\theta}{8} - \frac{3\,sen\theta}{2}}{cos\theta}cos\theta\,d\theta$, para calcular $\int sen^3\theta d\theta$, que es de la forma $\displaystyle\int sen^n x\,dx$, con n impar, se hace $cos\theta = z \Rightarrow sen\theta d\theta = dz$, luego, $\displaystyle\int sen^3\theta d\theta = -\int (1-z^2)dz = \frac{z^3}{3} - z + c_1 = \frac{cos^3\theta}{3} - cos\theta + C$

Por consiguiente:

$\displaystyle\int \frac{x^3-3x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \frac{1}{8}\left(\frac{cos^3\theta}{3} - cos\theta\right) + \frac{3}{2}cos\theta + C_2 = \frac{1}{24}cos\theta(cos^2\theta + 33) + C_2 = \frac{1}{24}\sqrt{1-4x^2}(34-4x^2) + C_2$, finalmente:

$$I_2 = \frac{x}{3}(x^2-3)arcsen2x - \frac{1}{18}(17-2x^2)\sqrt{1-4x^2} + C$$

c) Como $\frac{sen3x}{senx} = 3 - 4sen^2x = 3 - 4\frac{1-cos2x}{2} = 1 + 2cos2x$, entonces:

$I_3 = \displaystyle\int (1+2cos2x)e^x dx = \int e^x dx + 2\int cos2xe^x dx = e^x + 2\int cos2xe^x dx$

Para calcular la segunda integral hacemos: $e^x = u \Rightarrow du = e^x dx \wedge dv = cos2x\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}sen2x$, luego:

$$\int cos(2x)e^x dx = \frac{1}{2}e^x sen2x - \frac{1}{2}\int e^x sen2x\,dx \qquad (1),$$

análogamente para ésta última integral hacemos: $e^x = u \Rightarrow du = e^x dx \wedge dv = sen2x\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}cos2x$, luego: $\displaystyle\int e^x sen2x\,dx = -\frac{1}{2}e^x cos2x +$

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^x cos2xdx(2)$, de (1) y (2) obtenemos: $\displaystyle\int e^x cos2xdx = 5e^x(2sen2x + cos2x) + C_1$ finalmente $I_3 = e^x(10sen2x + 5cosx + 1) + C$.

3. Hallar:

   a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{1 - x\sqrt{1-x^2}}dx$

   b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

   c) $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}}$

   Solución.

   a) Sea $x = sen\theta \Rightarrow dx = cos\theta d\theta$, entonces:

   $I_1 = \displaystyle\int \frac{sen\theta + cos\theta}{1 - sen\theta\, cos\theta} cos\theta\, d\theta$. Haciendo $tg\theta = z \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{1+z^2} \Rightarrow I_1 = \displaystyle\int \frac{z+1}{(z^2-z+1)(z^2+1)}dz$, que es la integral de una fracción racional, de donde por el método visto anteriormente se llega a: $\frac{z+1}{(z^2-z+1)(z^2+1)} = \frac{-z+2}{z^2-z+1} + \frac{z-1}{z^2+1}$ luego: $I_1 = -\displaystyle\int \frac{(z-2)dz}{z^2-z+1} + \int \frac{z-1}{z^2+1}dz$, ahora:

   $\displaystyle\int \frac{(z-2)dz}{z^2-z+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2z-1}{z^2-z+1}dz - \frac{3}{2}\int \frac{dz}{(z-1/2)^2+3/4} = \frac{1}{2}log(z^2-z+1)$

   $-\sqrt{3}arctg\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + C_1$ y, $\displaystyle\int \frac{z-1}{z^2+1}dz = \frac{1}{2}\int \frac{2z}{z^2+1}dz$

   $-\displaystyle\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}log(z^2+1) - arctgz + C_2$, de donde:

   $I_1 = \frac{1}{2}log\frac{z^2+1}{z^2-z+1} + \sqrt{3}arctg\frac{2z-1}{\sqrt{3}} - arctgz + C$ y como

   $z = tg\theta = \frac{sen\theta}{\sqrt{1-sen^2\theta}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $I_1 = -\frac{1}{2}log|1 - x\sqrt{1-x^2}|$

   $+\sqrt{3}\, arctg\frac{2x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3(1-x^2)}} - arcsenx + C$

   b) Se hace $x = \frac{1}{z} \Rightarrow dx = -\frac{dz}{z^2}$ entonces:

   $I_2 = -\displaystyle\int \frac{\sqrt{z^2}dz}{z\sqrt{z^2+1}}$, ahora si $x > 0$, $z > 0 \wedge \sqrt{z^2} = z$, por consiguiente:

   $I_2 = -\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = -log(z + \sqrt{z^2+1}) + C_1$ o sea:

$I_2 = -log\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) + C_1 = log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}\right) + C_1$, ahora si $x < 0,\ z < 0 \wedge \sqrt{z^2} = -z \Longrightarrow I_2 = \displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = log|z + \sqrt{z^2+1}| + C_2$ finalmente: $I_2 = log\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right| + C_2$

c) Racionalizando obtenemos:

$$I_3 = \int \frac{1}{b-a}(\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b})dx = \frac{1}{b-a}\left[\int \sqrt{x-a}dx\right.$$

$$\left.-\int \sqrt{x-b}dx = \frac{1}{b-a}\left[\left(\frac{2}{3}(x-a)^{3/2} - \frac{2}{3}(x-b)^{3/2}\right)\right] + C\right.$$

4. Calcule:

a) $\displaystyle\int x^2(1-x^2)^{3/2}\,dx$

b) $\displaystyle\int x^2\,e^{-x}\,cos3x\,dx$

c) $\displaystyle\int x^3\,e^{-x^2}dx$

Solución.

a) Multiplicando y dividiendo el integrando por x^3, se obtiene:

$\displaystyle\int x^5\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)dx = \int x^5(x^{-2}-1)^{3/2}dx$, luego sea $x^{-2} - 1 = z^2$

$\Rightarrow -\frac{2}{x^3}dx = 2z\,dz \Rightarrow dx = -z\,x^3\,dz$ sustituyendo:

$\displaystyle -\int x^8 zdz = -\int x^8 zdz = -\int \frac{z^4}{(z^2+1)^4}dz$, ahora sea

$z = tg\theta \Rightarrow dz = \frac{d\theta}{cos^2\theta}$, entonces:

$\displaystyle -\int \frac{tg^4\theta\,d\theta}{(1+tg^2\theta)^4 cos^2\theta} = -\int sen^4\theta cos^2\theta\,d\theta$ por partes:

$u = -cos\theta \Rightarrow da = sen\theta d\theta \wedge dv = sen^4\theta cos\theta\,d\theta \Rightarrow v = \frac{1}{5}sen^5\theta$

luego: $\displaystyle\int sen^4\theta\, cos^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{5}\int cos\theta sen^5\theta - \frac{1}{5}\int sen^6\theta\, d\theta$

$= -\frac{1}{5}[cos\theta sen^5\theta + \displaystyle\int \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} d\theta]$

$= -\frac{1}{5}[cos\theta sen^5\theta + \frac{1}{32}\displaystyle\int (-cos6\theta + 6cos4\theta - 15cos2\theta + 10)d\theta]$

$= -\frac{1}{5}[cos\theta sen^5\theta + \frac{1}{32}(-\frac{1}{6}sen6\theta + \frac{6}{4}sen4\theta - \frac{15}{2}sen2\theta + 10\theta)] + c$ donde

$\theta = arctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

b) Como $cos3x = \frac{1}{2}(e^{i3x}+e^{-i3x})$ resulta $I = \displaystyle\int x^2e^{-x}cos\, 3x\, dx = \frac{1}{2}\int x^2\, e^{(-1+3i)x}dx + \frac{1}{2}\int x^2\, e^{(-1-3i)x}dx$, por partes tenemos:

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\, dx,\ e^{Ax}dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{A}e^{Ax}$ luego $\displaystyle\int x^2\, e^{Ax}dx = \frac{1}{A}x^2\, e^{Ax} - \frac{2}{A}\int e^{Ax}\cdot edx$, nuevamente integrando esta última integral por partes, resulta: $\displaystyle\int x^2e^{Ax}dx = \frac{1}{A}x^2\, e^{Ax} - \frac{2}{A^2}x\, e^{Ax} + \frac{2}{A^3}e^{Ax} + c$ de donde reemplazando y simplificando resulta: $\displaystyle\int x^2e^{-x}cos3x\, dx = \frac{1}{4}e^{-x}[x^2(3sen3x - cos3x) + x(3sen3x + 4cos3x) - \frac{1}{4}(9sen\, 3x - 13\, cos3x) + c$

Nota: Para calcular $\displaystyle\int x^me^{ax}\, cosbx\, dx$ o $\displaystyle\int x^me^{ax}\, sen\ bx\, dx$ se expresa $cos\, bx = \frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}$, $senbx = \frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2}$ la cual lo transforma en $\displaystyle\int x^m\ e^{ax}\, dx, A$ imaginario, que podemos resolverla como en el ejemplo anterior.

c) Como: $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int x^2e^{-x^2}(-2x)dx$, por partes, con $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$

$dv = e^{-x^2}(-2x)dx \Rightarrow v = e^{-x^2}$ luego: $-\frac{1}{2}\displaystyle\int x^2e^{-x^2}(-2x)dx = -\frac{1}{2}[x^2\, e^{-x^2} - \int e^{-x^2}\, 2x\, dx] = -\frac{1}{2}(x^2e^{-x^2} + e^{-x^2}) + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1) + c$

5. Calcular:

$$I = \int Arctg\sqrt{1-x^2}dx$$

Solución.

Sea $u = Arc\,tg\sqrt{1-x^2} \Longleftrightarrow du = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)}dx$

$$dv = dx \Longleftrightarrow v = x;$$

así queda: $I = x\, Arc\, tg\sqrt{1-x^2} + \displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)}$; para esta última integral sea $x = sen\theta \Longleftrightarrow dx = cos\theta\, d\theta$;

$I = \displaystyle\int \frac{sen^2\theta}{2-sen^2\theta} d\theta = \int \frac{sen^2 d\theta}{1+cos^2\theta}$, ahora recordando $2sen^2\theta = 1 - cos\, 2\theta$ y $2\, cos^2\theta = 1 + cos2\theta$, queda

$$= \int \frac{1-cos2\theta}{3+cos2\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{1-cosz}{3+cosz} dz$$

esta forma induce a usar la sustitución $\text{tg}\, \frac{z}{2} = t$, así $\displaystyle\int \frac{t^2 dt}{(2+t^2)(1+t^2)}$; $\dfrac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)} = \dfrac{At+B}{2+t^2} + \dfrac{Ct+D}{1+t^2}$ de donde calculando las constantes:

$$A = C = 0;\ B = 2;\ D = -1$$

así:

$$2\int \frac{dt}{2+t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2} = 2\frac{1}{\sqrt{2}} Arc\, tg \frac{t}{\sqrt{2}} - Arc\, tg\, t$$

finalmente volviendo a la variable x, resulta:

$$I = x\, Arctg\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{\sqrt{2}} Arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}}\right) - Arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

6. Calcular:

a) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$ b) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$

Solución.

a) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \int \frac{dz}{(z+\frac{1}{2})\sqrt{\frac{9}{4}-z^2}} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{(z+\frac{1}{2})\sqrt{1-(\frac{2}{3}z)^2}}$

sea $\frac{2z}{3} = sen\,\theta \Longleftrightarrow dz = \frac{3}{2}cos\theta\, d\theta$; así

$I = 2\displaystyle\int \frac{d\theta}{3\, sen\,\theta + 1}$; ahora hagamos $t = tg\frac{\theta}{2}$, y tenemos:

$$I = 4\int \frac{dt}{t^2+6t+1} = 4\int \frac{dt}{(t+3)^2-(\sqrt{8})^2} = 4\int \frac{dt}{(t+3-\sqrt{8})(t+3+\sqrt{8})}$$

$$I = \tfrac{4}{2\sqrt{8}}\left[\int \frac{dt}{t+3-\sqrt{8}} + \int \frac{dt}{t+3+\sqrt{8}}\right] = \tfrac{2}{\sqrt{8}}(log|t+3-\sqrt{8}| - log|t+3+8|) + c$$

$$I = \tfrac{2}{\sqrt{8}}\left(log\left|tg\left\{\tfrac{1}{2}Arc\, sen\tfrac{2}{3}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\right\} + 3 - \sqrt{8}\right| + log\right.$$

$$\left|tg\left\{\tfrac{1}{2}Arcsen\tfrac{2}{3}\cdot\left(x-\tfrac{1}{2}\right) + 3 - \sqrt{8}\right| + c\right.$$

b) Sea $x+1=t \Longleftrightarrow dx=dt$ y queda

$I = \displaystyle\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+1}}$; ahora poniendo $t = senhz \Longleftrightarrow dt = coshz\ dz$; $I = \displaystyle\int \frac{coshz\ dz}{senh^2z\ coshz} = \int \frac{dz}{sen\,h^2z} = -cotg\,hz + c = -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + c$

8.25. Ejercicios Propuestos

1. Calcular:

a) $\displaystyle\int \frac{sen4x}{cosx}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{senx(2+cosx-2senx)}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+senx+3cosx}$ d) $\displaystyle\int \frac{senx}{1+senx}$

e) $\displaystyle\int senh^2x\,cosh^2x\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\varepsilon\,cosx}$ $i)\ 0<\varepsilon<1$ $ii)\varepsilon>1$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{senhx+2\cos hx}$ h) $\displaystyle\int \frac{dx}{sen^6x+cos^6x}$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a\,senx+b\,cosx)}$ j) $\displaystyle\int \frac{dx}{(asenx+bcosx)^2}$

Respuesta.

a) $-senx - \frac{1}{3}sen^3x + \frac{1}{2}log\left|\frac{1+senx}{1-senx}\right| + C$

b) $\frac{1}{3}log\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{5}{3}log\left|tg\frac{x}{2}-3\right| - log\left|tg\frac{x}{2}-1\right| + C$

c) $\frac{2}{\sqrt{15}}Arctg\left(\frac{1+2tg\frac{x}{2}}{\sqrt{15}}\right) + C$

d) $secx - tgx + x + C$

e) $-\frac{x}{8} + \frac{senh\,4x}{32} + C$

f) i) $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}Arctg\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}tg\frac{x}{2}\right) + C$ si $0<\varepsilon<1$

ii) $\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}log\left(\frac{\varepsilon+cosx+\sqrt{\varepsilon^2-1}senx}{1+\varepsilon\,cosx}\right) + C$ si $\varepsilon>1$

g) $\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg\left(\frac{2tgh\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

h) $Arctg\left(\frac{1}{2}tg\,2x\right) + C$

i) $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}log\left|tg\left(\frac{x+ø}{2}\right)\right| + C$ donde $tgø = \frac{b}{a}$

j) $-\frac{cosx}{a(asenx+bcosx)} + C$

2. Calcular (Ejercicios Miscelaneos):

a) $\int cos^2\sqrt{x}\,dx$ b) $\int x^2e^x cosx\,dx$

c) $\int x^2\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}dx$ d) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-2x^2-1}}$

e) $\int \sqrt{\dfrac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$ f) $\int \dfrac{log(1+x+x^2)}{(1+x)^2}dx$

g) $\int \dfrac{xlog(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$ h) $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}log\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}\right)dx$

i) $\int \dfrac{sen4x}{sen^8x+cos^8x}dx$ j) $\int \dfrac{ax^2+b}{x^2+1}Arctgx\,dx$

k) $\int x^x(1+log(x))dx$ l) $\int \dfrac{Arctge^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)}dx$

m) $\int \sqrt{tgh^2x+1}dx$ n) $\int \dfrac{1+senx}{1+cosx}e^x\,dx$

o) $\int (x+|x|)^2dx$ p) $\int e^{-|x|}dx$

q) $\int xf''(x)dx$ r) $\int f'(2x)dx$

Respuesta.

a) $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\,sen(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}cos(2\sqrt{x})+C$

b) $\frac{e^x}{2}[x^2(senx+cosx)-2xsenx+senx-cosx]+C$

c) $-\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}+\frac{5}{8}Arcsen\sqrt{x}+C \quad (0<x<1)$

d) $\frac{1}{2}Arc\,cos\frac{x^2+1}{\sqrt{2}x^2}+C$

e) $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C \quad (x>0)$

f) $-\frac{log(1+x+x^2)}{1+x}-\frac{1}{2}log\left(\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}\right)+\sqrt{3}Arctg\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+C$

g) $(1+\sqrt{1+x^2})log(1+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$

h) $\frac{3-x}{1-x}-log\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\sqrt{1-x^2}Arcsenx-log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)+C \quad (0<x<1)$

i) $\frac{1}{\sqrt{2}}log\left(\frac{7+4\sqrt{2}+cos4x}{7-4\sqrt{2}-cos4x}\right)+C$

j) $a\left[x\,Arctgx-\frac{1}{2}log(x^2+1)\right]-\frac{a-b}{2}(Arctgx)^2+C$

k) x^x+C

l) $x-log(1+e^x)-2e^{-x/2}\,Arctge^{x/2}-(Arctge^{x/2})^2+C$

m) $-2log(tghx+\sqrt{1+tgh^2x})+\frac{1}{\sqrt{2}}\,log\left(\frac{\sqrt{1+tgh^2x}+\sqrt{2}tghx}{\sqrt{1+tgh^2x}-\sqrt{2}tghx}\right)+C$

n) $e^x\,tg\frac{x}{2}+C$

ñ) $\frac{2}{3}x^2(x+|x|)+C$

o) e^x-1+C si $x<0,\ 1-e^{-x}+C$ si $x>0$

p) $xf'(x)-f(x)+C$

q) $\frac{1}{2}f(2x)+C$

8.26. Calculo de Integrales Definidas

Para calcular una integral definida, aplicaremos la fórmula de I. BARROW. es decir:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\mid_a^b=F(b)-F(a)$$

donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

8.27. Ejercicios Resueltos

1. Calcular:

a) $I_1=\displaystyle\int_0^2\sqrt{x+1}dx$

b) $I_2=\displaystyle\int_1^{25}e^{\sqrt{x}}dx$

c) $I_3=\displaystyle\int_0^{\pi/2}log\,senx\,dx$

Solución.

a) Sea $x+1=z^2\Rightarrow dx=2z\,dz$;Si $x=0\Rightarrow z=1\wedge x=2\Rightarrow z=\sqrt{3}$ entonces:

$$I_1=\int_1^{\sqrt{3}}2z^2dz=2\int_1^{\sqrt{3}}z^2dz=\frac{2}{3}z^3\mid_1^{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}((\sqrt{3})^3-1)=2\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)$$

b) Sea $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\Rightarrow dx=2t\,dt$; Si $x=1\Rightarrow t=1\wedge x=25\Rightarrow t=5$ luego:

$I_2=\displaystyle\int_1^5 e^t2t\,dt=2\int_1^5 e^tt\,dt$, e integrando por partes obtenemos:

$$I_2 = 2[te^t\mid_1^5 - \int_1^5 e^t dt] = 2[te^t\mid_1^5 - e^t\mid_1^5] = 2[(5e^5 - e) - (e^5 - e)]$$

$$= 2(5e^5 - e^5) = 8e^5.$$

c) Como $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log\, senx\, dx = \int_0^{\pi/2} log\, cosx\, dx$, se tiene que:

$$I_3 = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} logsenx\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} logcosx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(logsenx + logcosx)dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} log\,(senx\, cosx)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} log\frac{1}{2}sen2x\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(log\frac{1}{2} + logsen2x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} log\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} logsen2x\, dx = -\frac{1}{2}log2\int_0^{\pi/2} dx + \frac{1}{2}\int^{\pi/2} log\, sen2x\, dx$$

para calcular ésta última integral se hace $2x = u \Rightarrow 2dx = du$ y los límites de integración son: para $x = 0 \Rightarrow u = 0 \wedge x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \pi$, luego: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} log\, sen2x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} log\, senu\, du$, como $senx$ toma los mismos valores entre $\frac{\pi}{2}$ y π y entre 0 y $\pi/2$, entonces:

$$\int_0^{\pi} logsenu\, du = \int_0^{\pi/2} log\, senu\, du + \int_{\pi/2}^{\pi} logsenu\, du = 2\int_0^{\pi/2} logsenu\, du = 2I_3,$$

con lo que

$$I_3 = -\tfrac{1}{2}log2x\mid_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\cdot 2I_3 \Rightarrow \frac{1}{2}I_3 = -\frac{1}{2}log2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I_3 = -\tfrac{\pi}{2}log2.$$

2. Calcular:

   a) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 e^{arcsenx}dx$

   b) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{senx + cosx + 2}$

   c) $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{tgx}{1 + senx}dx$

Solución.

a) Sea $arcsenx = z \Rightarrow x = senz \Rightarrow dx = cosz\,dz$, luego para $x = 0 \Rightarrow z = 0 \wedge x = 1 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2}$, entonces: $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^z cosz\,dz$, integrando por partes resulta:

$I_1 = e^z senz\,|_0^{\pi/2} - \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^z senz\,dz$, análogamente ésta última integral por partes resulta:

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^z senz\,dz = -e^z\,cosz\ |_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^z cosz\,dz$, por lo tanto $I_1 = e^z senz\,|_0^{\pi/2} - (-e^z cosz)\,|_0^{\pi/2} - I_1 \Rightarrow I_1 = \dfrac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$

b) Sea $tg\frac{x}{2} = z \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1+z^2}$ luego para $x = 0 \Rightarrow z = 0 \wedge x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 1$, entonces:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dz}{z^2+2z+3} = 2\int_0^1 \frac{dz}{(z+1)^2+2} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{z+1}{\sqrt{2}}\right]_0^1$$

$$= \sqrt{2}\left(arctg\sqrt{2} - arctg\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}arctg\tfrac{1}{2\sqrt{2}}.$$

c) Sea $tg\frac{x}{2} = z$, $senx = \frac{2z}{1+z^2}$, $tgx = \frac{2dz}{1-z^2}$; Si $x = 0 \Rightarrow z = 0 \wedge x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z = \sqrt{3}$, entonces:

$I_3 = 4\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{zdz}{(1-z^2)(1+2z+z^2)} = 4\int_0^{\sqrt{3}} \frac{zdz}{(1-z)(1+z)^3}$ ahora por el método de fracciones parciales, sea

$\frac{z}{(1-z^2)(1+z)^3} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1+z)^3} + \frac{C}{(1+z)^2} + \frac{D}{(1+z)} \Rightarrow$

$A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{8}$

luego:

$$I_3 = \tfrac{1}{8}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\right)dz - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dz}{(1+z)^3} + \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dz}{(1+z)^2} = \left[\frac{1}{8}log\left|\frac{1+z}{1-z}\right|\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{(1+z)^2} - \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{1+z}\right]_0^{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{8}log\tfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{(1+\sqrt{3})^2} - \tfrac{1}{1+\sqrt{3}}\right)$$

3. ¿Qué hay de incorrecto en el cálculo de la integral siguiente?

$$\int_0^{2log|a|} \frac{dx}{e^x - a^2e^{-x}} = \frac{1}{2a}log\left|\frac{a-e^x}{a+e^x}\right|\ |_0^{loga^2} = \frac{1}{2a}\left[log\left|\frac{a-a^2}{a+a^2}\right| - log\left|\frac{a-1}{a+1}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[log\left|\frac{1-a}{1+a}\right| - log\left|\frac{1-a}{1+a}\right|\right] = 0$$

Solución.

El dominio del integrando es $(-\infty,\, log|a|) \cup (log|a|, +\infty)$, como $log|a|$ está en el intervalo $[0, 2\,log|a|]$ y no está contenido en el dominio del integrando, la integral es impropia, y por lo tanto, el cálculo de la integral no es correcto.

4. Pruebe que: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

Prueba:

Sea $g(x) = a+b-x$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)dx = -\int_a^b f(g(x))g'(x) = -\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

5. Muestre que:

$$\int_0^{\pi} \frac{sen(n+\frac{1}{2})x\,dx}{sen\frac{x}{2}} = \pi \text{ para todo } n$$

Solución.

Como $\frac{1}{2} + cosx + cos2x + \cdots + cosnx = \frac{sen(n+\frac{1}{2})x}{2\,sen\frac{x}{2}}$ para $sen\frac{x}{2} \neq 0$, entonces:

$$\int_0^{\pi} \frac{sen(n+\frac{1}{2})x\,dx}{sen\frac{x}{2}} = \int_0^{\pi}(1+2cosx+2cos2x+\cdots+2cosnx)dx$$

$= \pi + 0 + \cdots + 0 = \pi$

6. Demostrar :

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2} \text{ si } x > 0$$

Demostración.

Sea $t = \frac{1}{u} \iff dt = -\frac{1}{u^2}du$, si $t = 1 \Rightarrow u = 1$; si $t = x \Rightarrow u = \frac{1}{x}$; así

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_{1/x}^1 \frac{-\frac{1}{u^2}du}{1+\frac{1}{u^2}} = -\int_{1/x}^1 \frac{du}{u^2+1} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}.$$

7. Demostrar:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(senx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(senx)dx^{\cdot}$

Indicación: hacer $u = \pi - x$

b) Deduzca:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\, senx}{1+cos^2x}dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Demostración.

a) Sea $x = \pi - u \Longleftrightarrow dx = -du$, si $x = 0 \Rightarrow u = \pi$ si $x = \pi \Rightarrow u = 0$, luego

$$\int_0^{\pi} xf(senx)dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - u)f(senu)du$$
$$= \pi\int_0^{\pi} f(senu)du - \int_0^{\pi} uf(senu)du \text{ de donde}$$
$$\int_0^{\pi} xf(senx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(senx)dx$$

b) De inmediato por (a)

$$\int_0^{\pi} x\,\frac{senx}{1+cos^2x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{senx}{1+cos^2x}dx$$

$u = cosx \Longleftrightarrow du = -senx\, dx,\ x = 0 \Rightarrow u = 1$ y $x = \pi \Rightarrow u = -1$ luego:

$$= -\tfrac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2} \text{ como } \tfrac{1}{1+u^2} \text{ es par}$$
$$\int_0^{\pi} x\frac{senx}{1+cos^2x}dx = 2\,\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \pi\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}.$$

8. Calcular

a) $\displaystyle I = \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{64+x^6}dx$ b)$\displaystyle I = \int_1^2 t^5\, e^{-t}\, dt$

Solución.

a) Como el integrando es par, bastará calcular $\displaystyle I = 2\int_0^2 \frac{x^2}{64+x^6}dx = 2\int_0^2 \frac{6x^5dx}{(64+x^6)6x^3}$; calcularemos la integral indefinida $y = \int \frac{6x^5dx}{64+x^6}$ y al final nos preocuparemos de los límites de integración, así entonces:

$u = 64 + x^6 \Longleftrightarrow du = 6x^5dx$ y $x^3 = \sqrt{u-64}$, así

$y = \int \frac{du}{u\sqrt{u-64}}$; ahora $u - 64 = t^2 \Longleftrightarrow du = 2tdt$ e

$y = 2\int \frac{dt}{t^2+64} = \frac{1}{4}Arctg\frac{t}{8} = \frac{1}{4}Arctg\frac{1}{8}\sqrt{u-64}$

$= \frac{1}{4}Arctg\frac{1}{8}x^3$; luego $I = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}Arctg\frac{x^3}{8}\mid_0^2 = \dfrac{\pi}{48}$

b) Integrando por partes;$u = t^5 \Longleftrightarrow du = 5t^4dt$ y $dv = e^{-t}dt \Longleftrightarrow v = -e^{-t}$, luego $I = -e^{-t}t^5 + 5\displaystyle\int e^{-t}t^4dt$, nuevamente $u = t^4 \Longleftrightarrow du = 4t^3dt$ y $v = -e^{-t}$, así: $I = -e^{-t}t^5 + 5(-e^{-t}t^4 + 4\int e^{-t}t^3dt)$; procediendo en forma análoga se llega:

$I = -e^{-t}(t^5 + 5t^4 + 20t^3 + 60t^2 + 120t + 120)\mid_1^2$, de donde

$I = -\frac{1}{e}\left[\frac{872}{e} - 326\right] \equiv 1.91633$

9. Calcular:

a) $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{1+senx}$ b) $I = \displaystyle\int_a^b (x-a)^2 f'''(x)dx$

Solución.

a) Por partes $u = x \Longleftrightarrow du = dx$ y $dv = \frac{dx}{1+senx}$

$v = \displaystyle\int \frac{(1-senx)}{cos^2x}dx = \int sec^2xdx - \int secx\,tgx = tgx - secx$ luego $\displaystyle\int \frac{x}{1+senx}dx = x(tgx - secx) - \int (tgx - secx)dx$

$= x(tgx - secx) - \displaystyle\int tgx\,dx + \int secx\,dx$ por ejercicios números 8.15, 3 a) y 8.17 - 10 b)

$x(tgx - secx) - log|secx| + log|secx + tgx| + C$

$= x(tgx - secx) + log|cosx(secx + tgx)| + C$

$= \frac{-xcosx}{1+senx} + log|1 + senx| + C$

así: $I = \frac{-x\,cosx}{1+senx} + log|1 + senx|\mid_0^{\pi/2} = log(2)$.

b) Por partes $u = (x-a)^2 \Longleftrightarrow du = 2(x-a) \wedge v = \displaystyle\int f'''(x)dx = f''(x)$ así: $\displaystyle\int (x-a)^2 f'''(x)dx = f''(x)(x-a)^2 - 2\int (x-a)f''(x)dx$; nuevamente $u = (x-a) \iff du = dx$ y $v = \displaystyle\int f''x)dx = f'(x)$, y queda

$= f''(x)(x-a)^2 - 2((x-a)f'(x) - \displaystyle\int f'(x)dx)$

$= f''(x)(x-a)^2 - 2(x-a)f'(x) + 2f(x) + c$

$I = \displaystyle\int_a^b (x-a)^2 f'''(x)dx = \{f''(x)(x-a)^2 - 2(x-a)f'(x) + 2f(x)\} \mid_a^b$

$= f''(b)(b-a)^2 - 2(b-a)f'(b) + 2f(b) - 2f(a).$

10. *a*) Demostrar $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f[(b-a)t+a]\,dt$

 b) Aproveche a) para calcular el valor de A, dado por

$$A = \int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2} dx + 3\int_{1/3}^{2/3} e^{9(x+2/3)^2}\,dx$$

Solución.

a) Sea $x = pt + q$; así para $x = a \Longrightarrow t = 0$, $x = b \Longrightarrow t = 1$ luego $a = q \wedge b = p \cdot 1 + a \Longrightarrow p = b - a$ además $dx = pdt = (b-a)dt$, luego

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f[(b-a)t+a](b-a)dt = (b-a)\int_0^1 f[(b-a)t+a]dt$$

b) Para $\displaystyle\int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2}dx$, se tiene $a = -4$; $b = -5$, $b - a = -1$ y $f(x) = f(-t-4)$, luego tenemos:

$$\int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2}dx = -\int_0^1 e^{(1-t)^2}dt = -\int_0^1 e^{(t-1)^2}dt,$$

análogamente para $3\displaystyle\int_{1/3}^{2/3} e^{9(x-2/3)^2}dx$, $a = \dfrac{1}{3}, b = \dfrac{2}{3}$, $b - a = \dfrac{1}{3}$, $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{3}\right)$, luego

$$3\int_{1/3}^{2/3} e^{9(x-2/3)^2}dx = 3 \cdot \frac{1}{3}\int_0^1 e^{9(1/3t+1/3-2/3)^2}\,dx = \int_0^1 e^{(t-1)^2}dt$$

por lo tanto $A = -\displaystyle\int_0^1 e^{(t-1)^2}dt + \int_0^1 e^{(t-1)^2}dt = 0$

11. Calcular:

$$I = \int_0^a x^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx$$

Solución.

Sea $x = asent \Longleftrightarrow dx = acost\,dt$; para $x = 0 \Longrightarrow t = 0 \wedge x = a \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^{\pi/2} a^2 sen^2 t\sqrt{\frac{a - asent}{a + asent}}\,a\,cost\,dt = a^3\int_0^{\pi/2}\frac{sen^2t\,cos^2t}{1 + sent}\,dt$$

$$I = a^3\int_0^{\pi/2} sen^2t\,dt - a^3\int_0^{\pi/2} sen^3t\,dt$$

$$I = \tfrac{a^3}{2}\int_0^{\pi/2}(1 - cos2t)dt - \int_0^{\pi/2}(1 - cos^2t)sent\;dt$$

$$I = \tfrac{a^3}{2}\left(t - \tfrac{1}{2}sen2t\right)\int_0^{\pi/2} + cost\,|_0^{\pi/2} - \frac{1}{3}cos^3t\,|_0^{\pi/2} = a^3\left[\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right].$$

12. Calcular:

a) $I = \displaystyle\int_2^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$ b) $I = \displaystyle\int_{log2}^{log3}\frac{dx}{cosh^2x}$

Solución.

a) Calculemos $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{3^2 - (x - 2)^2}}$ integral inmediata cuyo valor es: $= Arcsen\frac{x-2}{3} + c$ luego $I_= Arcsen\frac{x-2}{3}\,|_2^{3,5} = Arc\,sen\dfrac{1,5}{3} = 0.5235$

b) Calculemos:

$$\int\frac{dx}{cosh^2x\,dx} = \int sech^2x\,dx = tg\,hx$$

así $I = tghx\,|_{\log(2)}^{\log(3)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,|_{\log(2)}^{\log(3)} = \left(\dfrac{3 - \frac{1}{3}}{3 + \frac{1}{3}} - \dfrac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}}\right) = \left(\dfrac{8}{10} - \dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{8 - 6}{10} = \dfrac{1}{5}.$

13. Calcular:

a) $I = \displaystyle\int_0^1\frac{log(1 + x)}{1 + x^2}dx$ b)$I = \displaystyle\int_{-2}^{2} cosx\,log\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)dx$

Solución.

a) Sea $x = tgt \Longleftrightarrow dx = sec^2tdt$, si $x = 0 \Longrightarrow t = 0 \wedge x = 1 \Longrightarrow t = \frac{\pi}{4}$, luego queda:

$I = \int_0^{\pi/4} log(1+tgt)dt$; pero $1+tgt = tg\frac{\pi}{4} + tgt = \frac{\sqrt{2}sen(t+\pi/4)}{cos\, t}$

así:

$$I = \tfrac{1}{2}log(2)\int_0^{\pi/4} dt + \int_0^{\pi/4} log\left[sen\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right] - \int_0^{\pi/4} log(cost)dt$$

$I = \frac{\pi}{8}log(2) + I_1 - I_2$, ahora para I_2 sea

$t = \frac{\pi}{4} - u \Longleftrightarrow dt = -du$ y $t = 0 \Longrightarrow u = \frac{\pi}{4} \wedge t = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow u = 0$

así:

$$I_2 = -\int_{\pi/4}^{0} log\left[cos\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]du = \int_0^{\pi/4} log\left[sen\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)\right]du$$

$I_2 = \int_0^{\pi/4} log\left[sen\left(\frac{\pi}{4}+u\right)\right]du = I_1$, por lo tanto $I = \frac{\pi}{8}log(2)$.

b) Haremos ver que $cosx\, log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ es una función impar; sabemos que $cosx$ es par, luego el problema está resuelto si probamos que $log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ es impar, en efecto sea $f(x) = log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Longrightarrow f(-x) = log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$, entonces por ejercicio resuelto 5.6, 13 b), tenemos que $I = 0$.

14. Demostrar

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) - f(-x)]dx$$

para cualquier función continua $f(x)$.

Demostración.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx,$$

ahora sea $x = -u$ en la primera integral $dx = -du$

y para $x = -a \Longrightarrow u = a \wedge x = 0 \Longrightarrow u = 0$, así

$$= \int_a^0 f(-u)(-du) + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= \int_0^a [f(-x) + f(x)]dx.$$

15. Demostrar que la integral $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{sen\, 2nx}{sen\, x}\, dx$ es nula si n es un entero.

Demostración.

Sea $x = \pi - t \Longrightarrow dx = -dt$. Para $x = 0 \Longrightarrow t = \pi \wedge x = \pi \Longrightarrow t = 0$ si n es entero,

$$I = -\int_{\pi}^{0} \frac{sen\,2n(\pi - t)}{sen(\pi - t)}\,dt = \int_{0}^{\pi} \frac{sen(2n\pi - 2nt)}{sen\,t}\,dt = -\int_{0}^{\pi} \frac{sen2nt}{sent}dt = -I$$

de donde $2I = 0 \Longleftrightarrow I = 0$.

16. *a*) Calcular la integral $I_x = \displaystyle\int_1^x \frac{2t\,log(t)}{(1+t^2)^2}dt$

b) ¿Existe $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_x$?

Solución.

a) Sea $u = logt \Longleftrightarrow du = \frac{1}{t}dt$ y $dv = \frac{2tdt}{(1+t^2)^2} \Longleftrightarrow v = -\frac{1}{1+t^2}$ luego,

$$I_x = -\tfrac{logt}{1+t^2}\,\Big|_1^x + \int_0^x \frac{dt}{t(1+t^2)} = -\frac{logx}{1+x^2} + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right)dt$$

$$I_x = -\tfrac{log(x)}{1+x^2} + logx - \tfrac{1}{2}log(t^2+1)\,\Big|_1^x = -\frac{logx}{1+x^2} + \frac{1}{2}log\left(\frac{2x^2}{x^2+1}\right)$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} I_x = -\lim_{x\to+\infty} \frac{logx}{1+x^2} + \frac{1}{2}log\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right] = 0 + \frac{1}{2}log2 = \frac{1}{2}log2$$

17. Calcular la integral $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}$; $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^4+1)^2}$; $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{(x^4+1)^2}\,dx$.

Solución.

De inmediato para I_1, por ejercicio resuelto 8.16, 5c), tenemos que:

$$I_1 = \tfrac{1}{4\sqrt{2}}log\left|\tfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right| + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}Arc\,tg(\sqrt{2}x+1) + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}Arctg(\sqrt{2}x-1)\,\Big|_0^1$$

$$I_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{8}log(3+2\sqrt{2}) + \tfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

Para I_2, tenemos que por partes en I_1,

$u = \frac{1}{x^4+1} \Longleftrightarrow du = \frac{-4x^3dx}{(x^4+1)^2}$ y $dv = dx \Longleftrightarrow v = x$, queda $I_1 = \frac{x}{x^4+1}\,\Big|_0^1$ $+4\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{(x^4+1)^2}dx = \frac{1}{2} + 4(I_1 - I_2)$ de donde resulta $I_1 = \frac{1}{2} + 4I_1 - 4I_2 \Longleftrightarrow$ $4I_2 = \frac{1}{2} + 3I_1$ finalmente $I_2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\,log(3+2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{8}\sqrt{2}\right)$

Para I_3 de inmediato se tiene, $I_3 = I_2 + \displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{(x^4+1)^2} = I_2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2}$; se hizo $x^2 = t$ y para $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$ sea $t = tg\theta \Longleftrightarrow dt = sec^2\theta d\theta$ y queda:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \int \frac{sec^2\theta d\theta}{sec^4\theta} = \int \frac{d\theta}{sec^2\theta} = \int cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4}(2\theta + sen2\theta) + c$$

$= \frac{1}{4}(2\, Arctgt + sen2\, Arctgt) + c,$
luego

$$I_3 = I_2 + \tfrac{1}{8}(2\, Arctg\, t + sen2Arctg\, t)\ |_0^1 = I_2 + \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}$$

18. Calcular:

$$I = \int_0^1 x\sqrt{x^2 - 2x + 2}\, dx$$

Solución.

Sea $x - 1 = senh\theta$, poniendo a α la solución de $-1 = senh\alpha$ y para $x = 1 \Longleftrightarrow \theta = 0$, se tiene:

$$I = \int_\alpha^0 (senh\theta + 1)cosh^2\theta\, d\theta = \frac{1}{3}cosh^3\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{senh\, 2\theta}{4}\ |_\alpha^0$$

$$I = \tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{cosh^3\alpha}{3} + \tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{senh\, 2\alpha}{4}\right),$$

ahora $sen\, h\alpha = -1 \Longleftrightarrow cosh\alpha = \sqrt{1 + senh^2\alpha} = \sqrt{2} \Longrightarrow e^\alpha = senh\alpha + cosh\alpha = \sqrt{2} - 1$ así:

$$I = \frac{1}{2}log(\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

19. Siendo α un número real positivo, se considera

$$I_\alpha = \int_0^{\pi/2} sen^\alpha x\, dx$$

a) Encontrar una fórmula de recurrencia entre I_α e $I_{\alpha+2}$ y demostrar para $\alpha \geq 0$, que $f(\alpha) = (\alpha+1)I_\alpha\, I_{\alpha+1}$ es periódica y que 1 es el período. Calcule $f(0)$.

b) Demostrar que $f(\alpha)$ es decreciente y deduzca para $k \in Z^+$, que $k \leq \alpha < k+1 \Longrightarrow \dfrac{k+1}{k+2}f(0) < f(\alpha) < \dfrac{k+2}{k+1}f(0)$. Determine el límite de la sucesión cuyo término general es $f(\alpha + n)$.

c) Demostrar que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{I_{\alpha+1}}{I_\alpha} = 1$

Solución.

a) Integrando por partes, resulta:

$$I_{\alpha+2} = \int_0^{\pi/2} sen^{\alpha+1}x\, senx\, dx$$

$$= -(sen^{\alpha+1}x\, cosx)\,|_0^{\pi/2} + (\alpha+1)\int_0^{\pi/2} sen^{\alpha}x\, cos^2x\, dx$$

$$I_{\alpha+2} = (\alpha+1)(I_\alpha - I_{\alpha+2}) \Longleftrightarrow (\alpha+2)I_{\alpha+2} = (\alpha+1)I_\alpha$$

asi de inmediato $f(\alpha+1) = (\alpha+2)I_{\alpha+1}I_{\alpha+2}$

$= (\alpha+1)I_\alpha I_{\alpha+1} = f(\alpha)$ luego f admite a 1 como período, además

$f(0) = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$

b) Para $0 < x < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 < senx < 1$, luego si $\alpha < \beta \Longrightarrow sen^\alpha x > sen^\beta x \Longrightarrow \int_0^{\pi/2} sen^\alpha x\, dx > \int_0^{\pi/2} sen^\beta x\, dx$, por lo tanto si $k \leq \alpha < k+1$, se verificará $I_k \geq I_\alpha > I_{k+1},\ I_{k+1} \geq I_{\alpha+1} > I_{k+2}$ de aquí:

$\frac{k+2}{k+1}f(k) = (k+2)I_kI_{k+1} > (\alpha+1)I_\alpha I_{\alpha+1} > (k+1)I_{k+1}I_{k+2} = \frac{k+1}{k+2}f(k+1)$ Como $f(k+1) = f(k) = f(0) = \frac{\pi}{2}$; ya que k es un entero positivo luego $\frac{k+2}{k+1}\frac{\pi}{2} > (\alpha+1)I_\alpha I_{\alpha+1} > \frac{k+1}{k+2}\frac{\pi}{2}$, lo mismo para $\alpha+n$ resulta: $\frac{n+k+2}{n+k+1}\frac{\pi}{2} > f(\alpha+n) < \frac{n+k+1}{n+k+2}\frac{\pi}{2}$, de donde de inmediato $\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha+n) = \dfrac{\pi}{2}$ además $f(\alpha+n) = f(\alpha)$ ya que f tiene período 1.

c) De inmediato por (a) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{I_{\alpha+1}}{I_\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{\alpha}{\alpha+1} = 1$

20. Calcule:

a) $\displaystyle\int_0^a \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$

b) Sea $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} cos^m x\, sen\, nx\, dx$ y demostrar que:

$I_{m,n} = \dfrac{1}{m+n} + \dfrac{m}{m+n} I_{m-1,\,n-1}$ y que aquí establezca que

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} cos^{n-2}x\, sen\, n\, x\, dx = \frac{1}{n-1}, \quad n > 1$

Solución.

a) Sea $x^2 = a^2 cos2\theta \iff 2x\,dx = -2a^2\, sen2\theta d\theta$ si $x = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ y $x = a \Longrightarrow \theta = 0$, luego:

$$I = -a^2 \int_{\pi/4}^{0} \frac{\sqrt{1 - cos2\theta}}{\sqrt{1 + cos2\theta}} sen2\theta\; d\theta = -a^2 \int_{\pi/4}^{0} tg\theta\, sen2\theta\; d\theta$$

$$I = 2a^2 \int_{0}^{\pi/4} sen^2\theta\; d\theta = 2a^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} sen2\theta\right) |_0^{\pi/4} = 2a^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)$$

b) Sea $u = cos^m x \iff du = -m \cdot cos^{m-1} x\, senx$

$$dv = sen\, nx\; dx \iff v = -\frac{cosn\, x}{n}$$

luego queda:

$$I_{m,n} = -\tfrac{1}{n} cos^m x\, cosn\, x\; |_0^{\pi/2} - \frac{m}{n} \int_0^{\pi/2} cos^{m-1} x\, senx\, cosn\, x\; dx$$

$$nI_{m,n} = 1 - m \int_0^{\pi/2} cos^{m-1} x\, senx\; cosnx\; dx$$

$$(m+n)I_{m,n} = 1 - m \int_0^{\pi/2} cos^{m-1} x\, senx\; cosnx\; dx + mI_{m,n}$$

$$(m+n)I_{m,n} = 1 - m \left[\int_0^{\pi/2} (cos^{m-1} x\, senx\; cosnx - cos^m x sen\, nx) dx \right]$$

$$(m+n)I_{m,n} = 1 - m \left[\int_0^{\pi/2} cos^{m-1} x sen(x - nx) dx \right] = 1 + m\; I_{m-1,n-1}$$

$$\Longrightarrow I_{m,n} = \tfrac{1}{m+n} + \tfrac{m}{m+n} I_{m-1,n-1}$$

c) Por inducción sea i) sea $n = 2$ ya que $n > 1$

$$\int_0^{\pi/2} sen2x\, dx = -\frac{cos2x}{2} \int_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

ii) Sea válido para $n = k$, es decir,

$$\int_0^{\pi/2} cos^{k-2} x\, senk\, x\, dx = \frac{1}{k-1} = I_{k-2,k}$$

para demostrar $n = k + 1$, o sea

$$\int_0^{\pi/2} cos^{k-1} x\, sen(k+1) x dx = \frac{1}{k} = I_{k-1,k+1}$$

en efecto

$$I_{k-1,k+1} = \frac{1}{2k} + \frac{k-1}{2k} I_{k-2,k} = \frac{1}{2k} + \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k}$$

21. Demostrar que:

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2 du = 2\int_0^x \left[\int_0^u \left(\int_0^v f(t)dt\right) dv\right] du$$

Demostración.

Integrando por partes, sea: $z = (x-u)^2 \iff dz = -2(x-u)du$, $dy = f(u)du \iff y = \int_0^u f(t)dt$, así

$\int_0^x f(u)(x-u)^2 du = (x-u)^2 \int_0^u f(t)dt \mid_0^u +2 \int_0^x$

$\left[\int_0^u f(t)dt\right](x-u)du = 2\int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt\right](x-u)du$; análogamente, sea

$z = x-u \iff dz = -du$ y $dy = \int_0^u f(t)dt \iff y = \int_0^u \left[\int_0^v f(t)dt\right] dv$;

luego:

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2 du = 2(x-u)\int_0^u \left[\int_0^v f(t)dt\right] dv \mid_0^x + \int_0^x \left[\int_0^u \left(\int_0^v f(t)dt\right) dv\right] du$$

de donde finalmente:

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2 du = 2\int_0^x \left[\int_0^u \left(\int_0^v f(t)dt\right) dv\right] du.$$

22. Demostrar que:

$$\binom{n}{k} = \left[(n+1)\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx\right]^{-1} \quad \text{con} \quad n > k$$

Demostración.

Sea $I_0 = \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$, y $\quad u = (1-x)^{n-k}$

$\iff du = (n-k)(1-x)^{n-k-1}$ y $dv = x^k\,dx \iff v = \frac{x^{k+1}}{k+1}$

$$I_1 = (1-x)^{n-k}\ \tfrac{x^{k+1}}{k+1} \mid_0^1 + \frac{n-k}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}dx$$

$I_1 = \frac{n-k}{k+1} \int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}dx$; análogamente repitiendo el proceso,

$I_2 = \frac{(n-k)}{(k+1)} \frac{(n-k-1)}{(k+2)} \int_0^1 x^{k+2}(1-x)^{n-k-2}dx$ y así sucesivamente j-ésima veces, y se llega a:

$$I_j = \frac{(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-k-j)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+j)} \int_0^1 x^{k+j}(1-x)^{n-k-j}dx$$

ahora, haciendo

$$n-k=j \Longrightarrow I_{n-k} = \frac{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{(k+1)(k+2)\cdots(n-1)n} \int_0^1 x^n dx$$

$$\Longrightarrow I_{n-k} = \frac{(n-k)!k!}{n!} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{k!(n-k)!}{n!(n+1)}$$

de donde, entonces: $I_0 = I_1 = \cdots = I_{n-k} = \frac{k!(n-k)!}{n!(n+1)}$ y reemplazando en:

$$\left[(n+1)\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx\right]^{-1} = (n+1)\frac{k!(n-k)!}{n!(n+1)} = \binom{n}{k}$$

23. Demuestre $1 - \dfrac{t^2}{2} \leq cost \leq 1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24}$, para todo t.

Demostración.

De inmediato $1 - cosx \geq 0, \forall x$ ahora demostraremos $1 - cosx \leq \frac{x^2}{2}$, en efecto tenemos: $1 - cosx = 2sen^2\frac{x}{2}$ pero $senx \leq x \; \forall x$, así $1 - cosx \leq 2\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \Longrightarrow 1 - cosx \leq \frac{x^2}{2}$; entonces hemos establecido que $0 \leq 1 - cosx \leq \frac{x^2}{2} \Longrightarrow -1 \leq -cosx \leq -1 + \frac{x^2}{2}$ integrando $-\int_0^t dx \leq -\int_0^t cosx\,dx \leq \int_0^t \left(-1 + \dfrac{x^2}{2}\right) dx \Longleftrightarrow -t \leq -sent \leq t + \dfrac{t^3}{6}$ integrando nuevamente:

$$-\int_0^t x\,dx \leq -\int_0^t senxdx \leq \int_0^t \left(-x + \frac{x^3}{6}\right) dx \Longleftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 \Big|_0^t \leq cosx \Big|_0^t$$

$$\leq \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) \Big|_0^t \Longleftrightarrow -\frac{t^2}{2} \leq cost - 1 \leq -\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} \text{ finalmente:}$$

$1 - \frac{t^2}{2} \leq cost \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}$, para todo t.

8.28. Ejercicios Propuestos

1. Calcule las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_1^9 \frac{dx}{3+5x}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^5+1}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^4+x^2+1}$

d) $\displaystyle\int_1^{7/4} \frac{dx}{9+16(x-1)^2}$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{acos^2x+bsen^2x} \ \left(\frac{a}{b}>0\right)$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} sen^n x\, dx = I_n$ también I_{2m}e I_{2m+1}

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{(6x+7)^3}$

h) $\displaystyle\int_1^2 x^{-2}sen\frac{1}{x}dx$

i) $\displaystyle\int_0^{2\pi/3} \frac{dx}{5+4cosx}$

j) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}dx$

k) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{sen\,x\,dx}{cos^2x-5cosx+4}$

l) $\displaystyle\int_1^3 \log(x+\sqrt{x^2}-1)dx$

m) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2+tg\,x}$

n) $\displaystyle\int_{1/4}^{3/4} \frac{(x+1)dx}{x^2(x-1)}$

Respuesta.

a) $\frac{1}{5}\log 6$ c) $\frac{1}{4}\log 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{36}$ e) $\frac{1}{\sqrt{ab}}arctg\sqrt{\frac{b}{a}}$

g) $\frac{37}{8281}$ i) $\frac{\pi}{9}$ k) $\frac{1}{3}\log\frac{7+3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}$ m)$\frac{1}{5}\log\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{\pi}{10}$

2. Demostrar

a) $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} ydx = 3\pi$ siendo $x=\theta-sen\theta,\ y=1-cos\theta$

b) $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = \sqrt{2}e^2(e-1)$, siendo $x=e^tcost,\ y=e^tsent.$

3. Determinar un par de números a y b para los cuales

$$\int_0^1 (ax+b)(x^2+3x+2)^{-2}dx = \frac{3}{2}$$

Respuesta.

$a = 9 \wedge b = 27/2$

4. Sea $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx$. Demostrar que $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$ y determine I_2, I_3, I_4 e I_5.

Respuesta.

8/15, 16/35, 128/315, 256/693.

5. Sea $f(n) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} tg^n x dx$ donde $n \geq 1$. Demostrar que:

a) $f(n+1) < f(n)$

b) $f(n) + f(n-2) = \dfrac{1}{n-1}$ si $n > 2$

c) $\dfrac{1}{n+1} < 2f(n) < \dfrac{1}{n-1}$ si $n > 2$

Indicación: ver ejercicio resuelto 8.13, 10 b).

6. Calcular $f(0)$, sabiendo que $f(\pi) = 2$ y que $\displaystyle\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] senx\, dx = 5$

Respuesta.

3

7. Designando por A el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\pi \frac{cosx}{(x+2)^2}dx$ y calcular la siguiente integral en función de A:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{senx\; cosx\; dx}{x+1}$$

8. Demostrar que:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx \quad (m, n > 0)$

b) $\int_0^a f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x^2)dx$

9. ¿Qué está equivocado en $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\mid_{-1}^{1}= -2$?

10. Demostrar que si f es monótona en $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$ está entre $f(a)(b-a) \wedge f(b)(b-a)$.

11. Demostrar que si f es continua en $[a, b]$ y $\int_a^b f(x)\o(x)dx = 0$ para toda $\o$ integrable, entonces $f(x) = 0$.

12. *a)* Calcular la integral $I_x = \int_x^3 \frac{1+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-1}dt$, $(x > 0)$

    b) ¿Cuál es la derivada de I_x?

    c) Probar que I_x tiende a $+\infty$ cuando x tiende a cero.

    Indicación: haga el cambio $u = \sqrt{1+t} - 1$.

    Respuesta.

    a)$11 - x - 4\sqrt{1+x} - 4\log(\sqrt{1+x} - 1)$ b)$-\frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1}$

13. Calcular la integral $I = \int_0^a \frac{dx}{x - 2\sqrt[3]{x} + 4}$ $(a > 0)$

    Respuesta.

    $\frac{6}{5}log(\sqrt[3]{a} + 2) + \frac{9}{10}log(\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{a} + 2) + \frac{3}{5}Arctg(\sqrt[3]{a} - 1) - \frac{21}{10}log\, 2 + \frac{3\pi}{20}$

14. Calcular las siguientes integrales:

    a) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{sen^3 x}$

    b) $\int_0^{\pi/3} \frac{senx\, sen2x}{sen^4 x + cos^4 x + 1}dx$

    c) $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$ $(a < b)$

    Respuesta.

    a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\, log3$ b) $\frac{1}{2}Arctg2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{12}\, log13$ c)$\frac{\pi}{8}(b-a)^2$

15. Designemos por I_n la integral $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n sen(\pi x)dx; n \in \mathbb{N}$.

    a) Calcular I_0 e I_1. Establecer una relación entre I_n e I_{n+2} y utilizar dicha relación para calcular I_4.

    b) Demostrar que la sucesión I_n es decreciente y tiene por límite 0; deducir que I_n es equivalente a $\dfrac{\pi}{n^2}$.

    c) Demostrar:

$$\frac{\pi}{(n+1)(n+2)}\left[1-\frac{\pi^2}{(n+3)(n+4)}\right] < I_n < \frac{\pi}{(n+1)(n+2)}$$

Respuesta.

$I_0 = \frac{2}{\pi},\ I_1 = \frac{1}{\pi};\ I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} I_n;$

$I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3};\ I_4 = \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^3} + \frac{48}{\pi^5}$

16. Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1-x^2}dx$ haciendo $x - \dfrac{1}{x} = t$

Respuesta.

$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

17. Demostrar que si f es continua en $[0,1]$, entonces

$$\int_0^{\pi/2} f(senx)dx = \int_0^{\pi/2} f(cosx)dx$$

18. ¿Se puede hacer en la integral $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}dx \quad x = sent$?

Respuesta.

No

19. Demostrar $\displaystyle\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x\, f(x)dx \quad (a > 0)$

20. Calcular las siguientes integrales:

    a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx \quad \text{si} \quad f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$

    b) $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}}dx \quad \text{hacer} \quad t = x + \frac{1}{x}$

c) $\displaystyle\int_1^e [x\, logx]^2 dx$

d) $\displaystyle\int_0^3 Arcsen\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

e) $\displaystyle\int_0^{log2} senh^4 x\, dx$

f) $\displaystyle\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$

Respuesta.

a) $Arctg\frac{32}{27} - 2\pi$ b) $\frac{3}{2}e^{5/2}$ c) $\frac{5}{27}(e^3 - 2)$

d)$\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ e)$\simeq 0.040$ f)$-\frac{468}{7}$

21. Hallar las integrales para n y m números naturales

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} sen^{2m}x cos^{2n}x\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} sen^n x\, sen\, nx\, dx$

c)$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{cos(2n+1)}{cosx}dx$ d)$\displaystyle\int_0^1 x^m(logx)^n dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} cos^{n-1}x\, sen(n+1)x\, dx$ f)$\displaystyle\int_0^{\pi/2} log(cosx)cos\, 2nx\, dx$

Respuesta.

a) $\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(n+m)!}$ b) $\frac{\pi}{2^n}sen\frac{n\pi}{2}$ c)$(-1)^n\pi$

d)$\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$ e)0 f)$\frac{\pi}{4n}(-1)^{n-1}$

22. Mostrar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{Arc\, tgx}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{x}{senx}dx$. Para $x = 0$, considere que ambas funciones valen 1.

23. Dada $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}$ si se hace la sustitución $x = \frac{1}{7}$ se llega a un resultado erróneo ¿cuál es?, hallar el error.

Calcule el verdadero valor de la integral.

Respuesta.

El verdadero valor es $\frac{\pi}{4}$.

24. Calcular

$$a)\ \int_{-5}^{5} \frac{x^5 sen^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$$

$$b)\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosn\, x\, dx$$

$$c)\ \int_{\pi}^{5/4\pi} \frac{sen2x}{cos^4 x + sen^4 x} dx$$ (note que integrando es una función periódica).

Respuesta.

a) 0 b) Si $f(x)$ es par $I = 2 \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) cos\, nx\, dx$ si $f(x)$ es impar $I = 0$

c) $\frac{\pi}{4}$

25. Demostrar

$$a)\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a + b - x)dx$$

$$b)\ \int_0^t f(x)g(t - x)dx = \int_0^t g(x)f(t - x)dx$$

26. Calcular:

$$a)\ I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx,\ n \in \mathbb{N}$$

$$b)\ I_n = \int_0^{\pi/2} sen^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} cos^n x\, dx$$

Respuesta.

a) $I_n = a^2 \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ b) $\frac{(n-1)!!}{n!!}\ \left(\frac{\pi}{2}\right)$

(use el resultado de a) convenientemente).

27. Sea $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n],\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$
Demostrar que:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

8.29. Aproximación de Integrales Definidas.

I) **Fórmula de los Trapecios.**

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Dividamos este intervalo en n partes iguales, mediante los puntos $x_k = a + kh,\ k = 0, 1, \cdots, n$ donde $h = \dfrac{b-a}{n}$.

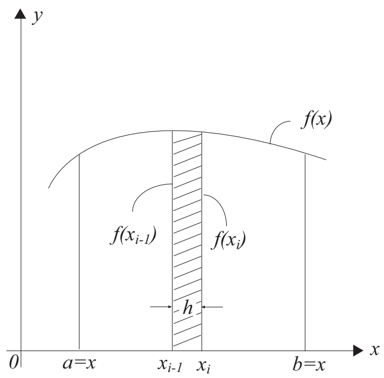

Figura 8.15: Fórmula de los Trapecios

El área de un trapecio cualquiera estará dada por:

$$A_i = \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

así entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

El error ξ en esta fórmula se estima de la forma:

$$|\xi| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}, \text{ donde } \quad M = \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

II) **Fórmula de Simpson.**

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Dividamos este intervalo en $2n$ partes iguales, mediante los puntos $x_k = a + kh,\ k = 0, 1, \cdots, 2n$ donde $h = \dfrac{b-a}{2n}$.

Ahora cada dos intervalos consucetivos se construye una parábola de la forma $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$ tal que pase por los puntos:

$$(x_{i-1}, f(x_{i-1}));\ (x_i, f(x_i));\ (x_{i+1},\ f(x_{i+1})).$$

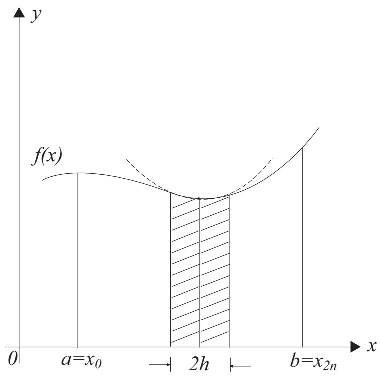

Figura 8.16: Fórmula de Simpson

El área bajo una de estas parábolas (cualquiera) estará dada por:

$$A_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (a_i x^2 + b_i x + c_i) dx = \frac{h}{3}[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

de donde sumando todas estas áreas obtenemos la fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\{f(x_0) + f(x_{2n}) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})]$$

$$+2[f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{2n})]\}.$$

El error ξ en esta fórmula se estima de la forma:

$$|\xi| \leq \frac{M(b-a)^5}{180(2n)^4}, \quad \text{donde} \quad M = \sup_{a \leq x \leq b} |f^{IV}(x)|$$

siempre que exista $f^{IV}(x)$ y acotada.

8.30. Problemas Resueltos

1. Se mide la temperatura en un lugar a diversas horas, obteniéndose la siguiente tabla:

Hora	0.00	4.00	8.00	12.00	16.00	20.00	24.00
Tem(°C)	10	8	6	15	20	12	11

Estimar la temperatura media.

Solución.

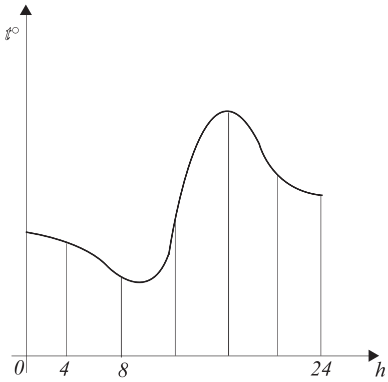

Figura 8.17: Problema 1

De inmediato $h = \frac{24-0}{6} = 4$ así la temperatura media es:

$$\overline{T} = \frac{\displaystyle\int_0^{24} T(t)dt}{(24-0)} = \frac{1}{24}\int_0^{24} T(t)dt.$$

Usando la regla de trapezoides tenemos:

$\overline{T} \cong \frac{1}{24}[T(0) + 2T(4) + 2T(8) + 2T(12) + 2T(16) + 2T(20) + T(24)]$

$= \frac{1}{12}[10 + 16 + 12 + 30 + 40 + 24 + 11] = \frac{143}{12} = 11,9°$

Al calcular una temperatura media, no es aconsejable hacerla por medio de calcular un promedio, ya que se pierde exactitud.

2. Resolver el problema anterior por la regla de Simpson.

Solución.

$\overline{T} \cong \frac{1}{24}\displaystyle\int_0^{24} T(t)dt \cong \frac{1}{24}\cdot\frac{4}{3}\,[T(0) + 4T(4) + 2T(8) + 4T(12)$

$+2T(16) + 4T(20) + T(24)] = \frac{1}{18}[10 + 32 + 12 + 60 + 40 + 48 + 11]$

$= \frac{213}{18} = 11,83°$

Sabemos que Simpson entrega un resultado de mejor calidad que el de los trapezoides.

3. Calcular aproximadamente $log\, 2$.

Solución.

Como $log2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$, dividiendo el intervalo $[1,2]$en 10 partes iguales, luego $h = \frac{2-1}{10} = 0.1$, luego por Simpson, tenemos:

$$log\,2 \cong \tfrac{0.1}{3}\Big[4\cdot\tfrac{1}{1.1} + 2\cdot\tfrac{1}{1.2} + 4\cdot\tfrac{1}{1.3} + 2\cdot\tfrac{1}{1.4} + 4\cdot\tfrac{1}{1.5}$$

$$+2\cdot\tfrac{1}{1.6} + 4\cdot\tfrac{1}{1.7} + 2\cdot\tfrac{1}{1.8} + 4\cdot\tfrac{1}{1.9} + \tfrac{1}{2}\Big]\; log\,2 \cong \tfrac{0.1}{3}(20.794505) = 0.6931501$$

4. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$ con cuatro decimales correctos mediante Simpson.

Solución. Encontraremos $2n$ de tal manera que asegure la exactitud pedida.

Determinemos $f^{IV}(x)$,

$$f(x) = (1+x^4)^{1/2};\; f'(x) = 2(1+4x^4)^{-1/2};\; f''(x) = 2(1+x^4)^{-3/2}(x^6+3x^2)$$

$$f'''(x) = 4(1+x^4)^{-5/2}(-2x^5+3x);\; f^{IV}(x) = 4(1+x^4)^{-7/2}(10x^8-3x^4+3)$$

$$f^{IV}(x) = 4(1+x^4)^{-7/2}P(x).$$

Como $P(x)$ es siempre creciente en $[0,1]$, toma su valor máximo en $x=1$ es decir $P(1) = 10$, además $(1+x^4)^{-7/2}$ es decreciente en $[0,1]$ y tiene un valor máximo en $x=0$ que es igual a 1, luego podemos afirmar que en $[0,1]$; $|f^{IV}(x)| \leq 4\cdot 1\cdot 10 = 40$, así: para calcular la integral pedida con cuatro cifras correctas, el error total no deberá sobrepasar 0.001, luego tomaremos $|\xi| < \frac{1}{2}$ 0.0001, por error de redondeo en la última cifra, por lo tanto:

$$\tfrac{M(b-a)}{180(2n)^4} < \tfrac{1}{2}\,0.0001 \Longleftrightarrow \tfrac{40.1^5}{180(2n)^4} < \tfrac{1}{2}\,0.0001 \Longleftrightarrow n > 4,1$$

luego, bastará tomar $2n = 10$, con lo que

$$|\xi| \;<\; \frac{40}{180(10)^4} = 2\cdot 2x\,10^{-5} < \frac{1}{2}\,0.0001,$$

así:

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1-0}{10} = 0.1.$$

La siguiente tabla de valores de la función $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ para $x \in [0,1]$ con un $h = 0{,}1$ y con cinco cifras decimales.

i	x_i	$\sqrt{1+x^4}$	i impar	i par	$1 = 0, 10$
0	0	1.00000	–	–	1.00000
1	0.1	1.00005	4. 00020	–	–
2	0.2	1.00080	–	2.00160	–
3	0.3	1.00404	4.01616	–	–
4	0.4	1.01272	–	2.02544	–
5	0.5	1.03078	4.12312	–	–
6	0.6	1.06283	–	2.12566	–
7	0.7	1.11360	4.45440	–	–
8	0.8	1.18727	–	2.37454	–
9	0.9	1.28690	5.14760	–	–
10	1.0	1.41421	–	–	1.41421
		$\sum$	21.74148	8.52724	2.41421

finalmente

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \cong \frac{0{,}1}{3}(2,41421 + 8{,}52724 + 21{,}74148) = 1{,}08943$$

Nota: Compare este resultado con el problema resuelto.

5. Calcular la siguiente integral por el método de los trapecios con tres cifras decimales correctas

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}}$$

Solución.

De inmediato $I = 2\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)(4-x^2)}$ Encontremos n, de tal manera que asegure la exactitud pedida para lo cual calculamos $f''(x)$, así

$$f'(x) = (1-x^2)^{-3/2}(4-x^2)^{-3/2}(5x-x^3)$$

$$f''(x) = 4(1-x^2)^{-5/2}(4-x^2)^{-5/2}(3x^6 - 25x^4 + 38x^2 + 20)$$

Sea $P(x) = 3x^6 - 25x^4 + 38x^2 + 20$, determinemos el máximo de $P(x)$ en $[0,1]$, $P'(x) = x(18x^4 - 100x^2 + 76) = 0 \iff x = 0 \vee x \cong \pm 0{,}95 \vee x \cong \pm 2,15$ $\dfrac{-\quad + \quad - \quad + \quad - \quad +}{-2{,}15 \quad -0{,}95 \quad 0 \quad 0{,}95 \quad 2{,}15}$, de inmediato en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ $P(x)$es siempre creciente luego su valor máximo está para $x = \frac{1}{2}$, así $P\left(\frac{1}{2}\right) = 27{,}98$, además, $(1-x^2)^{-5/2}(4-x^2)^{-5/2}$ es creciente en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y en $x = \frac{1}{2}$ se tiene que vale 0.07538, por lo tanto, $|f''(x)| < 4 \cdot 0,\ 07538 \cdot 27,98 = 8{,}438 \Longrightarrow |f''(x)| < 9\ \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ con tres cifras decimales correctas, deberá verificarse

$$|\xi| < \frac{1}{2}0{,}001 \Longleftrightarrow \frac{9\left(\frac{1}{2}-0\right)^3}{12n^2} < 0{,}0005 \Longrightarrow n > 13{,}69 \Longrightarrow n = 14,$$

luego comprobando tenemos:

$$|\xi| < \frac{9 \cdot \frac{1}{8}}{12 \cdot 14^2} = 0{,}00048 < 0{,}0005$$

así: $h = \frac{\frac{1}{2}-0}{14} = \frac{1}{28}$, construimos la siguiente tabla de valores:

i	x_i	$f(x_i)$	$2f(x_i)$
0	0	0.5000	–
1	0.03571	0.5004	1.0008
2	0.07143	0.5016	1.0032
3	0.10714	0.5036	1.0072
4	0.14286	0.5065	1.0130
5	0.17857	0.5102	1.0204
6	0.21429	0.5149	1.0297
7	0.25000	0.5205	1.0410
8	0.28571	0.5272	1.0543
9	0.32143	0.5350	1.0700
10	0.35714	0.5441	1.0881
11	0.39286	0.5545	1.1090
12	0.42857	0.5666	1.1331
13	0.46429	0.5804	1.1608
14	0.50000	0.5963	–
		$\sum$	13.7306

luego: $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}} \cong \frac{\frac{1}{28}}{2}(0{,}5 + 13{,}7306 + 0{,}5963) = 0{,}2648$

finalmente: $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}} \cong 2(0{,}2648) = 0{,}5295$

Nota: Compare este resultado con el problema resuelto.

6. Se lanza un cohete verticalmente desde el suelo y se registra su aceleración durante los primeros 80 segundos. Calcular basándose en la tabla que se adjunta, la velocidad y la altura alcanzada por el cohete en el instante $t = 80$.

$t(seg)$	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$a(m/seg^2)$	40,00	42,17	44,59	47,29	50,33	53,77	57,72	62,25	67,56

Solución.

Tenemos para un movimiento acelerado $\frac{dv(t)}{dt} = a(t)$ de aquí:

$$v(t) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$$

Calcularemos esta integral por Simpson entre 0 y 80, para $2n = 8$ y $h = \frac{80-0}{8} = 10$; luego simplemente se tiene:

$$v(t) = \int_0^{80} a(t)dt \cong \frac{10}{3}[40 + 4(42{,}17 + 47{,}29 + 53{,}77 + 62{,}25]$$

$$+2(44{,}59 + 50{,}33 + 57{,}72) + 67{,}56] = 4115,86 m/seg$$

análogamente para el cálculo de la altura, tenemos:

$$\frac{dH(t)}{dt} = v(t) \Longleftrightarrow H(t) = \int_0^{80} v(t)dt$$

Por lo cual calcularemos la velocidad en cada intervalo par, a fin de poder aplicar Simpson, así tenemos:

$$v(20) = \int_0^{20} a(t)dt \cong \frac{10}{3}[40 + 4 \cdot 42,17 + 44,59] = 844{,}23 m/seg$$

$$v(40) = \int_0^{40} a(t)dt \cong \frac{10}{3}[40 + 4(42{,}17 + 47{,}29) + 2 \cdot 44,59] = 1791{,}16 m/seg$$

$$v(60) = \int_0^{60} a(t)dt \cong \frac{10}{3}[40 + 4(42{,}17 + 47{,}29 + 53{,}77) + 2(44{,}59 + 50{,}33) + 57{,}72]$$
$$= 2868,26 m/seg$$

$$v(80) = \int_0^{80} a(t)dt \cong 4115,86$$

así confeccionamos la siguiente tabla.

$t(seg)$	0	20	40	60	80
$v(m/seg)$	0	844,23	1791,16	2868,26	4115,86

luego $h = \frac{80-0}{4} = 20$,

$$H(t) = \int_0^{80} v(t)dt \cong \frac{20}{3}[0 + 4(844{,}23 + 2868{,}26) + 2{,}1791,\ 16 + 4115{,}86] = 150329{,}46 mts.$$

$$H(t) \cong 150{,}33 Kms$$

8.31. Problemas Propuestos

1. Hallar el área limitada por $Y = e^{-x^2}$, el eje x y las rectas $x = 0 \wedge x = 1$ aplicando la regla de los trapezoides y Simpson.

   Respuesta.

   $T = 0{,}74620 \qquad S = 0{,}74683$

2. Una curva está dada por el siguiente cuadro de valores:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0,6	0,9	1,2	1,4	1,5	1,7	1,8	2

   Hallar el valor aproximado del área limitada por la curva, el eje X y las ordenadas extremas $x = 1 \wedge x = 9$ por Simpson.

   Respuesta.

   10.466

3. Calcular el valor aproximado de

   a) $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{35 + x}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{1 + x^2}$

   c) $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{x}$ d) $\displaystyle\int_1^3 logx\,dx$ e) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{2x - 1}dx$

   Respuesta.

   a) T. 24.654, S. 24.655
   b) T. 0.4631, S. 0.4637
   c) T. 1.117, S. 1.100
   d) T. 1.287, S. 1.2870
   e) S. 0.8111

4. *a*) Hallar una aproximación para el valor de la integral elíptica $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}dx$ empleando la regla del trapezoide con $n = 10$.
   b) Análogamente haciendo uso de Simpson.
   c) Estimar el error en ambos casos.

5. Calcular:

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{senx}{x}dx \ (n = 10)$ b) $\displaystyle\int_1^{10} log_{10}x dx \ (n = 10)$

   Respuesta.

   a)S. 1.371 b) T. 6.0656; S. 6.0896

6. Un terreno esta situado entre una valla rectilínea y un río. La anchura $Y, (mts)$ del terreno a una distancia X, de uno de los extremos de la valla viene dada por:

X	0	20	40	60	80	100	120
Y	0	22	41	53	38	17	0

   Aplicar Simpson para hallar aproximadamente el área del terreno.

   Respuesta.

   $3507mts^2$

7. Calcular la integral $\displaystyle\int_{1/2}^{3/2} \frac{e^{x/10}}{x}dx$ mediante Simpson con cuatro cifras decimales exactas.

   Respuesta.

   1.2038

8. Calcular la integral $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{senx}{x}dx$ con tres cifras decimales exactas, usando Simpson.

   Respuesta.

   0.601

9. Por Simpson calcular:

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{3 + cosx}dx \ (n = 6)$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{log(1 + x)} \ (n = 6)$

   Respuesta.

   a) 5.4024 b) 0.2288

10. Sabiendo que

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

calcular el número π con una exactitud hasta 10^{-5}.

Respuesta.

3.14159

11. Calcular $\displaystyle\int_0^1 (e^x - 1) log\left(\frac{1}{x}\right) dx$ con una exactitud de 10^{-4}.

Respuesta.

0.3179

12. Hallar aproximadamente la longitud de la elipse:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Respuesta.

51.04