Capítulo 7

La Relación Fundamental

7.1. La Derivada de la Integral Indefinida

Primer Teorema.

Si f es una función continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y la aplicación:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

se dice que F es la integral indefinida de f, entonces:

$$F'(x) = f(x).$$

Demostración.

En efecto, para todo x y $x + h$ en $[a, b]$:

$$F(x + h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt,\ h \neq 0$$

ahora aplicando el teorema del valor medio, existe un $\varepsilon \in (x,\, x + h)$ tal que: $F(x+h)-F(x) = hf(\varepsilon)$, cuando h tiende a cero, ε tiende a x, y por consiguiente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x),$$

por lo tanto: $F'(x) = f(x)$

7.2. Definición de Primitiva

Sea f una función real definida en $[a, b]$, se dice que la función real F definida y derivable sobre $[a, b]$ es **Primitiva** de f si para todo $x \in [a, b]$ se tiene: $F'(x) = f(x)$.

Obsérvese que:

por ejemplo,

$$F_1(x) = \int_1^x f(t)dt,\ F_2(x) = \int_{\sqrt{7}}^x f(t)dt, \cdots, etc.$$

son primitivas de f, luego en general, todas las integrales indefinidas de f son primitivas de f.

Teorema.

Dos primitivas de f difieren solo en una constante y recíprocamente, si $\emptyset$ es una primitiva de f y c es una constante, entonces $\emptyset(x) + c$ es otra primitiva.

Como es habitual la demostración se deja al estudiante.

Observación.

Del teorema precedente se deduce que, si conocemos cualquier función primitiva $\emptyset(x)$ de la función $f(x)$, entonces toda otra función primitiva de $f(x)$ tiene la forma $\emptyset(x) + c$, donde $c = cte.$

7.3. Correspondencia entre Primitiva e Integral Indefinida.

Segundo Teorema.

Toda primitiva de f (continua) es de la forma:

$$\emptyset(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt + c;\ c = constante$$

Este teorema establece una correspondencia entre las integrales de una función y sus primitivas.

Para encontrar una primitiva de f, bastará calcular una integral indefinida de f. La enorme importancia de este teorema reside precisamente en la consecuencia contraria, para calcular una integral de f basta encontrar una primitiva de f.

En efecto: Supongamos que queremos calcular $\int_a^b f(x)dx$, y que conocemos una primitiva $\emptyset(x)$ de $f(x)$. Entonces hay algún x_0 y alguna constante c tales que:

$$\emptyset(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + c$$

luego:

$$\emptyset(a) = \int_{x_0}^{a} f(t)dt + c, \qquad \emptyset(b) = \int_{x_0}^{b} f(t)dt + c$$

de donde:

$$\begin{aligned} \emptyset(b) - \emptyset(a) &= \int_{x_0}^{b} f(t)dt - \int_{x_0}^{a} f(t)dt \\ &= \int_{a}^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{b} f(t)dt \\ &= \int_{a}^{b} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(x)dx \end{aligned}$$

7.4. El uso de primitivas para calcular integrales (Regla de I. Barrow)

Si $\emptyset(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces:

$$\int_a^b f(x)d(x) = \emptyset(b) - \emptyset(a)$$

En consecuencia si se conoce una primitiva de $f(x)$ para calcular $\int_a^b f(x)dx$, no es necesario subdividir $[a, b]$, calcular sumas, formar límite etc., sino solamente efectuar dos evaluaciones de $\emptyset$ y una resta.

Ejemplo.

1. Calcular $\int_a^b cosx\,dx$

   Sabemos que $cosx$ es la derivada de $senx$, luego $senx$ es una primitiva de $cosx$; entonces, siguiendo la regla de Barrow

$$\int_a^b cosx\,dx = senb - sena$$

2. Análogamente; $\int_a^b senx\,dx = cosa - cosb$

3. $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$

4. $\int_a^b x^n dx = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$

7.5. Problemas Resueltos.

1. *a*) Hallar $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x xf(t)dt$

   b) Si f es continua, pruebe que

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt\right] du$$

Solución.

a) De inmediato

$$F(x) = x\int_0^x f(t)dt \Longrightarrow F'(x) = xf(x) + \int_0^x f(t)dt$$

b) Si $F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x xf(u)du - \int_0^x uf(u)du$, entonces

$$F'(x) = \left[xf(x) + \int_0^x f(u)du\right] - xf(x) = \int_0^x f(u)du$$

Por lo tanto existe un número c, tal que:

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt\right] du + c,$$

para todo x, $c = 0$, porque los otros dos términos son 0 para $x = 0$.

2. Encuentre $F'(x)$ siendo: $F(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{1}{1+t^2+sen^2 t}dt$

   Solución.

   Sabemos: $F(x) = \text{Ø}(b) - \text{Ø}(x)$, tal que

   $$ø'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2+sen^2 x} \quad \text{luego,}$$

   $$F'(x) = \text{Ø}'(b)\cdot 0 - \text{Ø}'(x) = -\text{Ø}'(x) \Longrightarrow F'(x) = -\frac{1}{1+x^2+sen^2 x}$$

3. Si f es integrable sobre $[a,b]$ y si existe F tal que $F' = f, \ \forall x \in [a,b]$ entonces

   $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \ \forall x \in [a,b]$$

   Solución.

   Sea $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt, \ \forall x \in [a,b]$, sabemos por teorema fundamental:

   $$G(x) = F(x) - F(a) \Longrightarrow G'(x) = F'(x) - F'(a) = F'(x) = f(x)$$

4. Si $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{x-t}{sen^3 t}dt$ calcule $F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

   Solución.

   De inmediato $F(x) = x\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{sen^3 t} - \int_1^x \frac{tdt}{sen^3 t}$, derivando se tiene

$$F'(x) = \int_1^x \frac{dt}{sen^3 t} + x\frac{1}{sen^3 x} - \frac{x}{sen^3 x} \text{ de donde } F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{sen^3 t}$$

(integral cuyo resultado se encuentra en el capítulo siguiente, problema propuesto, 8.18. - N° 6) Notemos que este problema es un caso particular del ejercicio N° 1 resuelto.

5. Una función f está definida para todo x por la fórmula

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + sent}{2 + t^2} dt$$

Hallar un polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ tal que

$$P(0) = f(0), P'(0) = f'(0) \text{ y } P''(0) = f''(0)$$

Solución.

$P(0) = c = f(0) = 3, \text{ así } c = 3$

$P'(0) = b = f'(0) = \dfrac{1 + sen0}{2 + 0^2} = \dfrac{1}{2}, \text{ así } b = \dfrac{1}{2}$

$P''(0) = 2a$ y como

$$f'(x) = \frac{1 + senx}{2 + x^2} \Longleftrightarrow f''(x) = \frac{cosx(2 + x^2) - (1 + senx)2x}{(2 + x^2)^2}$$

así $f''(0) = \dfrac{1}{2}$ y de $P''(0) = f''(0) \Longrightarrow a = \dfrac{1}{4}$ luego

$$P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

6. Existe una función f, definida y continua para todo x real, y que satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c;$$

con $c = cte$.

Hallar una fórmula explícita para $f(x)$ y el valor de c.

Solución.

Derivando la ecuación dada, tenemos:

$$f(x) = -x^2 f(x) + 2x^{15} + 2x^{17} \Longleftrightarrow f(x) = \frac{2x^{15} + 2x^{17}}{1 + x^2} = 2x^{15}$$

Ahora para determinar c, se tiene

$$\int_0^x 2t^{15} dt = -\int_1^x 2t^{17} dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c$$

$$2\frac{x^{16}}{16} = -2\frac{x^{18}}{18} + 2\frac{1}{18} + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c$$

de donde simplificando $\quad c = -\dfrac{1}{9}$

Nótese que se usó el teorema fundamental y la regla de Barrow.

7. Demostrar que si $f(x)$ es continua y $f(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ entonces $f(x) = 0$.

Demostración.

Derivando $f(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ obtenemos $f'(x) = f(x)$

$f'(x)\, e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0,\ (e^{-x} \neq 0,\ \forall x);$ por la regla del producto:

$[f(x)e^{-x}]' = 0 \Longleftrightarrow f(x) = ce^x$ pero $0 = f(0) = ce^0 \Longleftrightarrow c = 0$ así $f(x) = 0$

8. Demostrar que si $f''(x) > 0$, para todo x, y $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} (x - t)f(t)dt$ entonces $g''(x)$ no cambia de signo.

Demostración.

$$g(x) = x \int_x^{x+1} f(t)dt - \int_x^{x+1} tf(t)dt, \text{ derivando}$$

$$g'(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt + x[f(x+1) - f(x)] - (x+1)f(x+1) + xf(x)$$

$$g''(x) = f(x+1) - f(x) + f(x+1) + xf'(x+1) - f(x+1)$$

$$-(x+1)f'(x+1)$$

$$g''(x) = f(x+1) - f(x) - f'(x+1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} - f'(x+1)$$

de donde

$g''(x) = f'(\xi) - f'(x+1)$ con $x < \xi < x+1$ pero $f''(x) > 0, \forall x \Longrightarrow f'(x)$ es siempre creciente, entonces $f'(\xi) < f'(x+1)$ luego: $g'' < 0, \forall x$

9. Dada una función g continua para todo x, tal que

$$g(1) = 5, \int_0^1 g(t)dt = 2 \text{ y } f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 \, g(t)dt.$$

Demostrar que $f'(x) = x \displaystyle\int_0^x g(t)dt - \int_0^x t \, g(t)dt$ y calcular $f''(1)$ y $f'''(1)$.

Demostración.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \int_0^x g(t)dt - x \int_0^x t \quad g(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 g(t)dt,$$

derivando:

$$f'(x) = x \int_0^x g(t)dt + \frac{1}{2}x^2 g(x) - \int_0^x tg(t)dt - x^2 g(x) + \frac{1}{2}x^2 g(x)$$

$$f'(x) = x \int_0^x g(t)dt - \int_0^x t \, g(t)dt \quad \text{derivando nuevamente:}$$

$$f''(x) = \int_0^x g(t)dt + x \, g(x) - x \, g(x)$$

$$= \int_0^x g(t)dt \Longleftrightarrow f''(1) = \int_0^1 g(t)dt = 2$$

$$f'''(x) = g(x) \Longleftrightarrow f'''(1) = g(1) = 5$$

10. Una tangente al gráfico de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ forma un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$ con el eje X y un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$ en el punto $x = b$. Calcular

$$\int_a^b f''(x)dx,$$

si $f''(x)$ es una función continua.

Solución.

De inmediato:

$$\int_a^b f''(x)dx = f'(x)|_a^b \quad = f'(b) - f'(a)$$

$$= tg\left(\frac{\pi}{4}\right) - tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}$$

7.6. Problemas Propuestos

1. Empleando el primer y segundo teorema fundamental del cálculo, halle las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2(x^3 + 4)dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} cos\, 2x\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} D_t(cos^3 t)dt$

d) $\displaystyle\int_1^3 1/x^3\, dx$

Respuesta.

a) 72 b) $\frac{1}{2}$ c)-2 d) $\frac{4}{9}$

2. Probar que si f es continua sobre $[a,b]$ y $f = (F'og)g'$ sobre $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f = \int_a^b (F'og)g' = F(g(b)) - F(g(a))$$

3. ¿Qué hay equivocado en la siguiente integración ?

$$\int_0^\pi sec^2x\, dx = \int_0^\pi D(tgx) = 0$$

4. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta. Su posición en el instante t es $f(t)$. Cuando $0 \leq t \leq 1$, la posición viene dada por la integral

$$f(t) = \int_0^t \frac{1 + 2\, sen\, \pi x\, cos\, \pi x}{1 + x^2}\, dx;$$

para $t \geq 1$ la partícula se mueve con aceleración constante (la aceleración adquirida en el instante $t = 1$). Calcular:

a) Su aceleración en el instante $t = 2$.
b) Su velocidad cuando $t = 1$
c) Su velocidad cuando $t > 1$
d) La diferencia $f(t) - f(1)$ cuando $t > 1$

Respuesta.

a) $\pi - \dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{2} + \left(\pi - \dfrac{1}{2}\right)(t-1)$

d) $\dfrac{1}{2}(t-1) + \left(\pi - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{(t-1)^2}{2}$

5. Encontrar una función f y un valor de la constante c, tal que:

$\int_0^x f(t)dt = cosx - \frac{1}{2}$, para todo x real.

Respuesta.

$f(t) = -sent;\ c = \pi/3$

6. Demostrar que:

$$\int_0^x (t + |t|)^2 dt = \frac{2x^2}{3}(x + |x|)$$

para todo x real.

7. Una función f es continua para todo x y satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t)dt = -\frac{1}{2} + x^2 + \frac{1}{2}x\, senx + \frac{1}{2}cosx,\ \forall x$$

Calcular: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Respuesta.

$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)\frac{\pi}{2};\ 2 + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{4}$

8. Encontrar una función f, tal que:

$$\int_c^x t\ f(t)dt = senx - x\,cosx - \frac{1}{2}x^2,\ x \neq 0$$

Respuesta.

$f(x) = senx - 1$

9. Demostrar para $x > 0$, si $F(x) = \int_x^\pi \frac{sent}{x^2 t}dt$, que:

$$x^3 F'(x) + 2x^2 F(x) + senx = 0$$

10. Sea f una función definida para todo el eje real, con derivada f' que satisface la ecuación $f'(x) = c\ f(x)$ para todo x donde c es una constante. Demostrar que existe una constante K tal que $f(x) = K\, e^{cx}$ para todo x.

11. Demostrar que una de las primitivas de una función par es una función impar, y cualquier primitiva de una función impar es una función par.

12. Demostrar que si $f(x)$ es una función periódica continua con período P, entonces la integral

$$\int_{\alpha}^{\alpha+p} f(x)dx$$

no depende de α.

Indicación: Considere la función $g(x) = \displaystyle\int_{x}^{x+\tau} f(t)dt$ y derívela.