Capítulo 6

La Derivada

6.1. Definición

Sea la función $y = f(x)$ definida en algún entorno del punto x_0 yx otro punto perteneciente a dicho entorno. Podemos considerar a x como el resultado de dar a x_0 un incremento $\triangle x = h = x - x_0$ así también la función experimenta un incremento

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0). \quad \text{Ahora si:}$$

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - (f(x_0)}{\triangle x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, la función $y = f(x)$ se dice que es **diferenciable** o **derivable** en x_0, y es infaliblemente continua en este punto (el recíproco no siempre es cierto). Este límite lo denotaremos por:

$$f'(x_0),\ Df(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx},\ y'(x_0), \cdots$$

Ahora, en general, tomemos como x_0 un x cualquiera, entonces:

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

Geométricamente, el valor de la derivada $f'(x)$ representa la pendiente de la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto x.

Los números:

$$f'_+(x) = \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$
y
$$f'_-(x) = \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

se llaman derivada por la derecha y por la izquierda en el punto x, respectívamente.

La condición necesaria y suficiente para la existencia de la derivada $'(x)$ es la existencia de las derivadas finitas por la derecha y por la izquierda, y también que se cumpla la igualdad

$$f'_-(x) = f'_+(x)$$

Si $f'(x) = \infty^{\pm}$, se dice que la función $f(x)$ tiene una derivada infinita en el punto x. En este caso la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto x es perpendicular al eje X.

Supongamos que f es diferenciable en todos los puntos de cierto intervalo, se dice entonces que es diferenciable en dicho intervalo.

6.2. Propiedades Básicas

1. $c' = 0$

2. $[cf(x)]' = cf'(x)$

3. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

4. $[f(x)\, g(x)]'?f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

5. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$; $(g(x) \neq 0)$

Donde $c =$ **constante** y $f(x)$ y $g(x)$ son funciones que tienen derivadas en un punto en cuestión.

Ahora, supongamos que la derivada de f es también diferenciable entonces $(f')' = f''$ recibe el nombre de **segunda derivada** de f. Análogamente, se define la **derivada enésima** de f (si existe) y se denota como $f^{(n)}$.

6.3. Diferenciales

De la definición de derivada en un punto x_0 podemos escribir

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = f'(x_0)\triangle x + 0(\triangle x)$$

donde $0(\triangle x)$ es una función de $\triangle x$ tal que $\dfrac{0(\triangle x)}{\triangle x} \to 0$ cuando $\triangle x \to 0$.

La cantidad $f'(x_0)\triangle x$ recibe el nombre de **diferencial** de la función en el punto en cuestión y corresponde a un incremento $\triangle x$ de la variable independiente. La diferencial se escribe también dy o bien $df(x)$; estos últimos símbolos no son muy expresivos, pues no contienen ni a x_0 ni a $\triangle x$, pero nos serán muy útiles más adelante.

Para la función $y = x$ obtenemos la diferencial $dx = 1 \cdot \triangle x$ si elegimos el mismo incremento $\triangle x$ para las dos funciones $y = f(x)$ e $y = x$, obtenemos por sustitución $dy = f'(x_0)dx$o bien $df(x) = f'(x_0)dx$, que, dividiendo por dx se convierte en

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} \quad \text{ó} \quad f'(x_0) = \frac{df(x)}{dx}$$

Tampoco estos nuevos símbolos son muy expresivos, pues no contienen a x_0. Algunas veces se escriben $\left(\dfrac{dy}{dx}\right) x = x_0$ ó $\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right) x = x_0$. Sin embargo, lo usual es que el contexto aclarará en que punto hay que tomar la derivada.

La cantidad que llamamos cuociente diferencial (de y con respecto de x) aparece de esta forma realmente como un cuociente de dos diferenciales, los de las variables dependiente e independiente corespondiendo a un incremento común $\triangle x$.

Basados en consideraciones análogas, para la segunda derivada de f escribiremos $f''(x_0) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ y así sucesivamente.

Cuando se escribe $y_0 = f(x_0),\ x = x_0 + \triangle x$, se tiene $y = f(x_0 + \triangle x)$ la condición de diferenciabilidad se convierte en $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) + 0(x - x_0)$.

Aunque el incremento de la función, $y - y_0$, puede depender de x en una forma muy complicada, la diferenciabilidad afirma que podemos, por **aproximación**, reemplazar el incremento por la diferencial dy, es decir, por una **función lineal** muy simple: $f'(x_0)(x - x_0)$. El error cometido en esta sustitución es $0(x - x_0)$ ó $0(\triangle x)$ que, para $f'(x_0) \neq 0$ es un infinitésimo de orden superior que la expresión lineal, y, por lo tanto, por lo general, pequeño en comparación con esta.

Desde un punto de vista geométrico, la aproximación significa que reemplazamos la curva dada $y = f(x)$ por la recta $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, que , no es otra, que la tangente a la curva en el punto $(x_0,\ f(x_0))$.

En forma análoga que para las derivadas, tenemos las reglas

$$d(c) = 0;\ d(cf) = cdf;\ d(fg) = fdg + gdf;\ d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}[gdf - fdg] \quad (g \neq 0)$$

6.4. Teoremas Fundamentales

1. **De Fermat**

   Sea $f(x)$ definida en un determinado intervalo que tenga un valor máximo o mínimo en un punto x_0 interior del intervalo.

   Si existe una derivada $f'(x_0)$ en el puntio x_0, entonces $f'(x_0 = 0$.

2. **De Rolle**

   Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$, existe la derivada en todos los puntos interiores de este intervalo, y $f(a) = f(b)$, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

3. **Del Valor Medio**

Si una función f es continua en $[a, b]$ y existe la derivada en todos los puntos interiores de $[a, b]$, entonces existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

4. **Constancia de una función**

   Si en todos los puntos de $[a, b]$, $f'(x) = 0$, entonces $f(x)$ conserva un valor constante dentro de este intervalo.

5. **De Cauchy**

   Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y que tienen derivadas finitas en todos los puntos interiores del intervalo. Si estas derivadas no se anulan simultáneamente y $f(a) \neq f(b)$, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}$$

6.5. Problemas Resueltos

1. Calcule la derivada de $f(x) = x^2 + 1$, empleando las diferentes formas del cuociente en $x = 1$.

   Solución.

   a) Forma: $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$,

$$f'(1) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(1 + \triangle x) - f(1)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{[(1 + \triangle x)^2 + 1] - (1^1 + 1)}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{1 + 2\triangle x + \triangle x^2 + 1 - 1 - 1}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x(2 + \triangle x)}{\triangle x} =$$

$$\lim_{\triangle x \to 0} (2 + \triangle x) = 2$$

b) Forma: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$, luego:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1-2}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

2. *a*) Demuestre que $y=tgx$ es derivable en todo punto de su dominio y calcule su derivada.

   b) Calcule la derivada de $f(x)=\sqrt{cosx}\ \forall x$, para el cual $cosx>0$.

Demostración.

a) Sean x, $(x+h)\in Df$. Como $tg\alpha-tg\beta=(1+tg\alpha\, tg\beta)\,tg(\alpha-\beta)$. Si hacemos $\alpha=x\wedge\beta=x+h$, tenemos:

$$\frac{tg(x+h)-tgx}{h}=[1+tg(x+h)tgx]\ tgh/h \text{ luego:}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{tg(x+h)-tgx}{h}=\lim_{h\to 0}[1+tg(x+h)tgx]$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{tgh}{h}=1+tg^2x=sec^2x$$

Es fácil verificar que $\lim\limits_{h\to 0}tgh/h=1$

b)

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sqrt{cos(x+\triangle x)}-\sqrt{cosx}}{\triangle x}$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{(cos(x+\triangle x)-cosx)}{\triangle x(\sqrt{cos(x+\triangle x)}+\sqrt{cosx})}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{-2sen\left(\dfrac{2x+\triangle x}{2}\right) sen\dfrac{x}{2}}{\triangle x[\sqrt{cos(x+\triangle x)}+\sqrt{cosx}}]$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{-sen\left(\dfrac{2x+\triangle x}{2}\right)}{\sqrt{cos(x+\triangle x)}+\sqrt{cosx}} \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{sen\dfrac{\triangle x}{2}}{\triangle x/2}$$

$$= -senx/(\sqrt{cosx}+\sqrt{cosx}) = -senx/2\sqrt{cosx}$$

3. Encuentre $f'(x)$, aplicando la definición de derivada, si $f(x) = log_a x$ y deduzca $g'(x)$ si $g(x) = lnx$.

Solución.

Como: $f'(x) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$, donde $f(x) = log_a x$ y $f(x+\triangle x) = log_a(x+\triangle x)$, luego:

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{log_a(x+\triangle x) - log_a x}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{log_a\left(\dfrac{x+\triangle x}{x}\right)}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} log : a\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)^{\dfrac{x}{\triangle x}\dfrac{1}{x}} = \frac{1}{x}\lim_{\triangle x \to 0}\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)^{\dfrac{x}{\triangle x}}$$

sabemos que $\lim\limits_{\alpha \to 0}(1+\alpha)^{\dfrac{1}{\alpha}} = e$, con $\alpha = \dfrac{\triangle x}{x}$; $\triangle x \to 0 \Longrightarrow \alpha \to 0$

Si la expresión que se halla bajo el signo de log_a, tiende a "e", su logaritmo tenderá hacia $log_a e$ (continuidad de la función logaritmica), entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x}\lim_{\alpha \to 0} log_a(1+\alpha)^{1/\alpha} = \frac{1}{x}log_a(lim(1+\alpha)^{1/\alpha})$$

$$= \frac{1}{x}log_a e;\ g'(x) = \frac{1}{x}$$

4. Demuestre que $f(x) = |x|$ no tiene derivada en $x = 0$

Demostración.

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$; como $f(0) = 0 \Longrightarrow f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ recordando la definición de valor absoluto, tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1;$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

luego $f(x)/x,\ x \to 0$, no tiene límite, por lo tanto no existe $f'(0)$.

5. Sea f tal que $|f(x)| \leq |x|^\alpha, (\alpha > 1)$. Demuestre que f es derivable en cero.

Demostración.

Tenemos que encontrar: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$, observemos que:

$|f(0)| \leq |0|^\alpha = 0 \Longrightarrow |f(0)| = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$, luego nos queda:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = f'(0)$, pero como:

$$-\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{f(x)}{x} \leq \left|\frac{f(x)}{x}\right| \qquad (1)\text{y}$$

$$|f(x)| \leq |x|^\alpha \quad (\alpha > 1),$$

tenemos que:

$$0 \leq \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq |x|^{\alpha -} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \left|\frac{f(x)}{x}\right| = 0,$$

(ya que $\lim\limits_{x\to 0} |x|^{\alpha - 1} = 0$), por (1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \Longrightarrow f'(0) = 0$$

6. Encuentre f', si $f(x) = [x]$

Solución.

$f'(x) = 0$ para x no entero, y $f'(x)$ no está definida si x es entero. En efecto, si x no es entero:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[x+h] - [x]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[x] - [x]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Si x es entero: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[x+h] - [x]}{h}$; pero $\lim\limits_{h\to 0}[x+h] - \lim\limits_{h\to 0}[x]$, no está definido para $x \in Z$, así $f'(x)$, no está definida $\forall\, x$.

7. *a)* Suponga $g(x) = f(x+c)$. Pruebe que $g'(x) = f'(x+c)$

   b) Pruebe si $g(x) = f(cx)$ entonces $g'(x) = cf'(cx)$

   c) Suponga que f es derivable y periódica, con período a (esto es, $f(x+a) = f(x)\forall x$), pruebe que f' también es periódica.

Solución.

a)

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h+c) - f(x+c)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f([x+c]+h) - f(x+c)}{h} = f'(x+c)$$

b)

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(cx+ch) - f(cx)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{c[f(cx+ch)-f(cx)]}{ch} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{c[f(cx+\alpha)-f(cx)]}{\alpha}$$

$$= c \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(cx+\alpha)-f(cx)}{\alpha} = cf'(cx)$$

c) Si $g(x) = f(x+a)$, entonces $g'(x) = f'(x+a)$, por a). Pero $g = f$, y así $f'(x) = g'(x) = f'(x+a)$, $\forall x$, lo cual significa que f' también es periódica.

8. Encuentre $f'(0)$ si $f(x) = \begin{cases} g(x) sen\dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$ y $g(0) = g'(0) = 0$

Solución.

Como $f'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)\, sen 1/x}{x}$, ahora como $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)-0}{x} = g'(0) = 0$ y debido a que $|sen\dfrac{1}{x}| \leq 1$, es inmediato que: $f'(0) = 0$.

9. Determine $f'(x)$ si:

a) Sea $f(x) = x^n$, n entero

b) Sea$f(x) = x^{-n}$, n entero positivo $(x \neq 0)$

Solución.

a)

$$f'(x) = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{(x+\triangle x)^n - x^n}{\triangle x} = \quad (n > 1)$$

$$f'(x) = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{(x+\triangle x)^n - x^n}{(x+\triangle x) - x}$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0} [(x+\triangle x)^{n-1} + (x+\triangle x)^{n-2} + \cdots + (x+\triangle x)x^{n-2} + x^{n-1}] = nx^{n-1}$$

así $f'(x) = nx^{n-1}$.

b) De inmediato aplicando la regla del cuociente y (a), dado que $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, se tiene:

$$f'(x) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = (-n)x^{(-n)-1}$$

Vemos entonces que para cada entero n (incluído el 0) la función $f(x) = x^n$ es diferenciable en todo su dominio y que su derivada es $f'(x) = nx^{n-1}$. Más adelante se verá para el caso n real.

10. Estudiar la diferenciabilidad de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{3}{x} - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solución.

En virtud del ejercicio 9 y fuera de los puntos $x = 0$ y $x = 1$ la derivada de $f(x)$ resulta:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -\dfrac{3}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

En $x = 0$ la función es discontinua y por lo tanto no diferenciable.

En $x = 1$ la función es continua pero no diferenciable, ya que:

$$f'_-(1) = \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{[(1+\triangle x)^2+1]-2}{\triangle x} = 2 \quad \text{y}$$

$$f'_+(1) = \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{\left(\dfrac{3}{1+\triangle x} - 1\right) - 2}{\triangle x} = -3$$

Geométricamente en el punto (1,2), la curva tiene dos medios tangentes (ver figura) que no están en línea. Se dice que la tiene una cúspide en el punto en cuestión.

11. Sea $f(x) = x|x|$, encuentre $f'(x)$.

Solución.

Si $x > 0 \Longrightarrow f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$

Si $x < 0 \Longrightarrow f(x) = -x^2 \Longrightarrow f'(x) = -2x$

En $x = 0$, $f(0) = 0$, así:

$$f'_+(0) = \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{(0+\triangle x|\triangle x|)-0}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{(\triangle x)^2}{\triangle x} = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{(0-\triangle x|\triangle x|)-0}{\triangle x} = -\lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{(\triangle x)^2}{\triangle x} = 0$$

con lo que $f'(0) = 0$

12. Muestre que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

tiene derivada para todo x, sin embargo, $f'(x)$ no es continua en $x = 0$.

Solución.

Si $x \neq 0$, $f'(x) = \displaystyle\lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x+\triangle x)^2 sen\dfrac{1}{x+\triangle x} - x^2\, sen\dfrac{1}{x}}{\triangle x}$

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{x^2\left(sen\dfrac{1}{x+\triangle x} - sen\dfrac{1}{x}\right)}{\triangle x} + 2x \lim_{\triangle x \to 0} sen\frac{1}{x+\triangle x}$$

$$+ \lim_{\triangle x \to 0} \triangle x\, sen\frac{1}{x+\triangle x}$$

$$f'(x) = x^2 \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2\,cos\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+\triangle x} + \dfrac{1}{x}\right) sen\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+\triangle x} - \dfrac{1}{x}\right)}{\triangle x}$$

$$+2x\, sen\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -x^2 \lim_{\triangle x \to 0} \frac{cos\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+\triangle x} + \dfrac{1}{x}\right) sen\dfrac{\triangle x}{2x(x+\triangle x)}}{x(x+\triangle x)\cdot\dfrac{\triangle x}{2(x+\triangle x)}}$$

$$+2x\, sen\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x\, sen\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}.$$

Si $x = 0$,

$$f'(0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(\triangle x)^2 sen\dfrac{1}{\triangle x} - 0}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \triangle x sen\frac{1}{\triangle x} = 0$$

Es evidente que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0}(2x\, sen\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x})$ no existe ya que $cos\dfrac{1}{x}$ no converge cuando $x \to 0$ y además no está definida $f'(0)$, luego $f'(x)$ no es continua en $x = 0$.

13. Mostrar que si $f'(0)$ es positiva y $f(0) = 0$, entonces $f(x)$ tiene el mismo signo que x en un entorno de cero.

    Solución.

    $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(\triangle x - f(0)}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(\triangle x)}{\triangle x} > 0$, luego

    $\forall \xi > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |\triangle x| < \delta \Longrightarrow \left| \dfrac{f(\triangle x)}{\triangle x} - L \right| < \xi$

    $\Longleftrightarrow l - \xi < \dfrac{f(\triangle x)}{\triangle x} < \xi + L$, cuando ξ es pequeño $L - \xi$ es positivo así

    que $\dfrac{f(\triangle x)}{\triangle x} > 0$ y $f(\triangle x)$ tiene el mismo signo que $\triangle x$.

14. Estudiar la derivabilidad de la función $y = |L(x)|$ en el punto $x = 1$.

    Solución.

    En $x = 1$, $\triangle y = |L(1 + \triangle x)| - |L(1)| = |L(1 + \triangle x)|$ es decir,

    $$\triangle y = \begin{cases} L(1 + \triangle x) & \text{si} \quad \triangle x \geq 0 \\ -L(1 + \triangle x) & \text{si} \quad \triangle x < 0 \end{cases}$$

    $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \begin{cases} \dfrac{L(1 + \triangle x)}{\triangle x} & \text{si} \quad \triangle x > 0 \\ -\dfrac{L(1 + \triangle x)}{\triangle x} & \text{si} \quad \triangle x < 0 \end{cases}$$

    de donde $\lim\limits_{\triangle x \to 0^+} \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = 1$ y $\lim\limits_{\triangle x \to 0^-} \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = -1$

    Por lo tanto $y = |L(x)|$ no es derivable en el punto $x = 0$.

15. Muestre que

$$f(x) = \begin{cases} x sen\dfrac{1}{x} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

no tiene derivada en $x = 0$.

Solución.

Aunque $f(x)$ es continua en $x = 0$ como hemos visto anteriormente, no es derivable en $x = 0$.

En efecto:

$$f'(0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x sen\dfrac{1}{\triangle x}}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} sen\frac{1}{x} \text{ no existe.}$$

16. Demostrar que si $f'(x) \leq c$, $\forall x \in [a, b]$, entonces:

$$f(b) \leq f(a) + c(b - a).$$

Demostración.

De inmediato por el teorema del valor medio, $\forall x \in [a, b]$

$f'(x) = [f(b) - f(a)/(b - a)$ como

$$f'(x) \leq c \Longrightarrow [f(b) - f(a)]/(b - a) \leq c \Longrightarrow f(b) \leq f(a) + c(b - a)$$

17. Demostrar que $\sqrt{1 + h} < 1 + 1/2h$ si $h > 0$.

Demostración.

Por el teorema del valor medio, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, tomemos: $f(x) = \sqrt{1 + x}$,y si$a = 0 \wedge b = h$, entonces $\exists c \in (0, h)$ tal que: $\sqrt{1 + h} - 1 = \dfrac{1}{2\sqrt{1 + c}} h < h/2$, por lo tanto $\sqrt{1 + h} = 1 + 1/2h$.

18. Si $f(x)$ es continua y derivable en $[a,b]$, demuestre que si $f'(x) \leq 0$ para $a \leq x < \xi$ y $f'(x) \leq 0$ para $i < x \leq b$, la función nunca toma un valor menor que $f(\xi)$.

    Demostración.

    Para todo $a \leq x < \xi$, por el teorema del valor medio para: $x < \mu_1 < \xi$, $f(\xi) - f(x) = f'(\mu_1)(\xi - x) \leq 0$, análogamente para todo $\xi < x \leq b$, tenemos para: $i < \mu_2 < x$, $f(x) - f(\xi) = f'(\mu_2)(x - \xi) \geq 0$; luego en ambos casos $f(x) \geq f(\xi)$, $\forall x$.

19. Si $f'(x)$ es derivable en $[a,b]$, entonces $f'(x)$ toma todo valor entre $f'(a)$ y $f'b)$.

    Solución.

    Como f' es derivable en $[a,b]$ entonces f' es continua en $[a,b]$ y por el teorema del valor intermedio entonces $f'(x)$ toma todos los valores entre $f'(a)$ y $f'(b)$.

20. Demostrar que si f, g y h son funciones continuas en $[a,b]$ y derivable en (a,b), existe en este intervalo abierto un ξ tal que

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(\xi) \\ g(a) & g(b) & g'(\xi) \\ h(a) & h(b) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

    Demostración.

    Sea $\o(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ h(a) & g(b) & g(x) \end{vmatrix}$

    Nótese que

$$ø'(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(x) \\ g(a) & g(b) & g'(x) \\ h(a) & h(b) & h'(x) \end{vmatrix}$$

Ahora por el teorema del valor medio existe $\xi \in (a,b)$ tal que $ø'(\xi) = \dfrac{ø(b) - ø(a)}{b-a}$ pero $ø(b) = ø(a) = 0$, así entonces

$$ø'(\xi) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(\xi) \\ g(a) & g(b) & g'(\xi) \\ h(a) & h(b) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

Nótese que de este resultado se puede demostrar el teorema de CAUCHY (5), haciendo $h(x) = 1$, resulta

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(\xi) \\ g(a) & g(b) & g'(\xi) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}$$

21. Demuestre que:

a) Si $f'(x)$ es positiva, entonces $f(x)$ no puede tener más de una raíz.

b) Si $f(x)$ tiene n ceros en $[a,b]$, entonces $f'(x)$ tiene por lo menos $n-1$) ceros reales.

c) ¿Qué se puede concluir acerca del número máximo de ceros reales distintos de un polinomio de grado n?

Demostración.

a) De inmediato, si $f(x)$ tuviera dos raíces, se tendría, por el teorema de Rolle, que para un valor ξ entre ambas $f'(\xi) = 0$.

b) Si las raíces están dadas por $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, entonces por el teorema de Rolle, existen valores ξ_k, donde $x_k < \xi_k < x_{k+1}$ tales que $f'(\xi_k) = 0$, con lo que $f'(x)$ tiene por lo menos $(n-1)$ ceros reales.

c) Como la n-ésima derivada de un polinomio de grado n es una constante distinta de cero, tenemos que $f^{(n-1)}(x)$ no puede tener más de un cero, así, $f^{(n-2)}(x)$ no puede tener más de dos ceros, etc.

22. Si f y g son derivables en $[a, b]$ y si $f'(x) = g'(x)$ entonces $f(x) = g(x) + c$, donde c es una constante.

Solución.

Sea $\o(x) = f(x) - g(x)$ como f y g son derivables en $[a, b], \o'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ así $\o'(x) = 0$ vamos a probar que $\o(x) = c$.

Por el teorema del valor medio sea: $a < x_0 < \xi < x < b$ $\o'(\xi) = \dfrac{\o(x) - \o(x_0)}{x - x_0}$, como $(x - x_0) \neq 0$ y $\o'(\xi) = 0$ se tiene que $\o(x) - \o(x_0) = 0 \Longrightarrow \o(x) = \o(x_0) = c$ luego: $f(x) - g(x) = c \Longrightarrow f(x) = g(x) + c$.

23. Si f es derivable en $x = a$, calcular

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(a + \alpha\triangle x) - f(a + \beta\triangle x)}{\triangle x}$$

Solución.

f derivable en $x = a \Longrightarrow f'(a) = \displaystyle\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(a + \triangle x) - f(a)}{\triangle x}$

luego $\displaystyle\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(a + \alpha\triangle x) - f(a + \beta\triangle x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(a + \alpha\triangle x) - f(a)}{\alpha\triangle x} \cdot \alpha$

$- \displaystyle\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(a + \beta\triangle x) - f(a)}{\beta\triangle x} \cdot \beta = af'(a) - \beta f'(a) = (\alpha - \beta)f'(a)$

24. Hallar todos los valores de a, para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} a^2x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \\ x^2 - 3x + 2 - 2a|a| & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

sea continua y diferenciable.

Solución.

Para todo $x \neq 2$ la función es continua y derivable para cualquier valor de a.

Para $x = 2$, la continuidad exige

$$\lim_{x \to 2^-} a^2x = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 3x + 2 - 2a|a|) = f(2) = 2a^2$$

de donde:

$$-2a|a| = 2a^2 \iff -|a| = a \iff a \leq 0$$

Ahora para la diferenciabilidad previamente $a \leq 0$, además $f'_-(2) = f'_+(2) \iff a^2 = 4 - 3 = 1$ de donde solo $a = -1$. Luego es diferenciable para $a = -1$.

25. Sobre la curva $y = 3x^2$ hallar un punto en el que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $A(-1, 3)$ y $B(3, 27)$.

    Solución.

    No es otra cosa que aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 3]$ ya que $f(x)$ es continua y derivable en todos los puntos de dicho intervalo, así:

    $$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{27 - 3}{4} = 6;$$

    y por otro lado, $f'(\xi) = 6\xi$ de donde igualando se obtiene $\xi = 1$, nótese que $-1 < 1 < 3$.

    Este problema también se puede resolver sin usar el teorema del valor medio, exclusivamente aplicando el significado geométrico de la derivada.

26. Sabiendo que $\log 200 \cong 2,30103$ y $\log e \cong 0,43$. Hallar un valor aproximado para $\log 200,2$.

    Solución.

    Sabemos que $\triangle y \cong f'(x)\triangle x$ para $\triangle x$ suficientemente pequeño y como $\triangle y = f(x+\triangle x) - f(x)$ luego: $f(x+\triangle x) = f(x) + f'(x)\triangle x$, ahora si $f(x) = \log x$ por ejercicio 3 sabemos que $f'(x) = \dfrac{1}{x}\log e$, entonces haciendo $x = 200; \triangle x = 0.2$; tenemos: $f(200+0.2) = f(200) + f'(200{,}2) = \log 200 + \dfrac{1}{200}\log e \cong 2.30103 + \dfrac{1}{200}0,43 \cong 2.30103 + 0.00215$ luego:

    $$\log(200,2) = 2.30103 + 0.00215 = 2.30318$$

27. Hallar el volumen de un recipiente esférico, cuyo radio exterior es de 6 cm y su espesor 1/6 cm.

    Solución.

    Sea r = radio en cm de la esfera; V = número de cm^3 en el volumen de la esfera; $\triangle V$ = número de cm^3 en el volumen del recipiente esférico. Como $v = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ luego $dv = 4\pi r^2 dr \Longrightarrow dv = 4\pi 6^2 1/6 = 24\pi$, concluímos que el volumen del recipiente esférico es aproximadamente $24\pi\ cm^3$.

28. Hallar el valor aproximado de $sen61^\circ$.

    Solución.

    Análoga al ejercicio 26, o sea de inmediato:

    $$sen(x+\triangle x) = senx + (senx)'\triangle x;\ \triangle x = arc1^\circ = \pi/180$$

    además $(senx)' = cosx$, luego

    $$sen61^\circ = sen(60^\circ + 1^\circ) = sen60^\circ + cos60^\circ \cdot \pi/180 \cong 0,5 \cdot 0,017.$$

    Finalmente: $sen61^\circ = 0.8745254$.

29. Halle el incremento $\triangle y$, y la diferencial dy de la función $y = x^2$ para $x = 30$, $\triangle x = 0.1$ ¿Cuál es el porcentaje de error en la aproximación $\triangle y \cong dy$?

Solución.

$\triangle y = (x + \triangle x)^2 - x^2 = 2x\triangle x + \triangle x^2; dy = (x^2)'\triangle x = 2x\triangle x$, entonces

$$\triangle y = 2(30)(0.1) + (0.1)^2 = 6.01$$

$$dy = 2(30)(0.1) = 6.00$$

Si $x = 30$ y $\triangle x = 0.1$, el porcentaje de error en la aproximación es:

$$\left|\frac{\triangle y - dy}{\triangle y}\right| 100\,\% = \left|\frac{6.01 - 6}{6.01}\right| 100\,\% = 0.16\,\%$$

30. Demuestre que: $tg\alpha \cong \alpha$. (Para α próximo a cero).

Demostración.

De inmediato:
$$tg(x + \triangle x) \cong tgx + \frac{1}{cos^2 x}\triangle x,$$

verifique Ud. usando la definición de derivada, que:

$$(tgx)' = 1/cos^2 x.$$

Ahora, apra $x = 0 \wedge \triangle x = \alpha : tg\alpha \cong 0 + \frac{1}{1}\alpha \Longrightarrow tg\alpha \cong \alpha$

31. Demostrar que las raíces cuadradas de dos números naturales consecutivos mayores que N^2 difieren en menos que $\frac{1}{2N}$.

Solución.

Sea $f(x) = \sqrt{x}$ en $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, aplicando el teorema del valor medio, se tiene para $n < \xi < n+1, f(n+1) - f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$, ahora si $n > N^2$, entonces $\xi > N^2$, por lo tanto $\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}} < \dfrac{1}{2N}$. Luego:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2N}$$

32. Si la función f está definida en un intervalo que contiene x_0 y si la razón

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_o - \triangle x)}{\triangle x}$$

tiene un límite cuando $\triangle x \to 0$, este límite se denomina derivada simétrica de f en x_0 y se denota por $f_s'(x_0)$.

a) Demostrar que si la función f admite en x_0 derivadas a derecha e izquierda, posee también derivada simétrica.

b) Probar que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x sen \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

no tiene para $x = 0$ derivadas a derecha e izquierda, pero si una derivada simétrica.

c) Probar que si f es creciente y tiene una derivada simétrica, esta es positiva.

d) Probar que si las funciones f y g son continuas en x_0 y tienen derivadas simétricas para x_0, la suma $f + g$ el producto $f \cdot g$ tienen derivadas simétricas en x_0 y calcular esas derivadas.

Pruebas

a) Supongamos $\triangle x > 0$ (si fuese $\triangle x < 0$ basta cambiar $\triangle x$ por $-\triangle x$) por hipótesis

$$f'_+(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \text{ y}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 - \triangle x) - f(x_0)}{-\triangle x}$$

aplicando el límite de una suma

$$\frac{1}{2} \lim_{\triangle x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \right) - \frac{f(x_0 - \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0 - \triangle x)}{2\triangle x} = \frac{1}{2}\{f'_+(x_0) + f'_-(x_0)\}$$

así f admite una derivada simétrica

$$f'_s(x_0) = \frac{1}{2}[f`_+(x_0) + f`_-(x_0)]$$

b) En ejercicio 15 vimo que: $\dfrac{f(\triangle x) - f(0)}{\triangle x} = sen\dfrac{1}{\triangle x}$ no tiene límite cuando $\triangle x \to 0$, luego f no tiene, pues, ni derivada a la derecha ni izquierda para $x = 0$. La función es par; por lo tanto, tiene derivada simétrica nula en $x = 0$, en efecto

$$\frac{f(0 + \triangle x) - f(0 - \triangle x)}{2\triangle x} = \frac{0}{2\triangle x} = 0 \Longrightarrow f'_s(0)$$

existe y vale 0.

c) Tomando $\triangle x \to 0$, se tiene, por hipótesis

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0 - \triangle x) \geq 0$$

$$f'_s(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0 - \triangle x)}{\triangle x} \geq 0,$$

si $\triangle x < 0$, el razonamiento es análogo.

d) El estudio es análogo al que se hace para la derivada ordinaria, queda propuesto.

33. Encuentre la ecuación de las tangentes desde el punto (2,0) a la curva $y = x^4$.

    Solución.

    Sea (x_0, x_0^4) el punto de tangencia, la ecuación de la tangente será de la forma

    $$y - x_0^4 = y'(x_0)(x - x_0) \Longleftrightarrow y - x_0^4 = 4x_0^3(x - x_0),$$

    pero por hipótesis esta tangente pasa por el punto (2,0), así entonces

    $$-x_0^4 = 4x_0^3(2 - x_0) \Longleftrightarrow x_0^3(3x_0 - 8) = 0$$

    de donde $x_0 = 0$ ó $x_0 = \dfrac{8}{3}$ por lo tanto hay dos puntos de tangencia $P_1(0,0)$ y $P_2\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{4096}{81}\right)$ y las ecuaciones de las tangentes serán

    $$y = 0; \; y = \frac{2048}{27}(x - 2)$$

34. Demuestre que la tangente trazada en un punto cualquiera $P_0(x_0, y_0)$ de la hipérbola $xy = 1$, determina en el eje X un punto A tal que el triángulo OAP_0 es isósceles.

    Demostración.

    Por demostrar que dos lados son iguales. Determinemos las coordenadas de A, la ecuación de la tangente por $P_0(x_0, x_0^{-1})$ resulta: $y - x_0^{-1} = -x_0^{-2}(x - x_0)$; intersectándola con el eje X se tiene $y = 0 \Longrightarrow x = 2x_0$ así : $A = (2x_0, 0)$, $0(0,0)$ y $P_0(x_0, \dfrac{1}{x_0})$, así de inmediato

    $$\overline{OP} = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}} = \overline{P_0A}$$

35. Se lanza verticalmente un cuerpo con una velocidad inicial de $v_0 \, m/seg$.

    a) Hallar la velocidad del cuerpo.

    b) ¿Qué altura alcanzará en t segundos?

c) ¿En cuántos segundos y a qué distancia del suelo alcanzará el punto más alto?

d) ¿En qué instante llega al suelo nuevamente?

Solución.

a) De acuerdo a la ley de Newton: $m\,v'(t) = -mg$ donde m es la masa del cuerpo y g la acción de las fuerzas de gravedad (se desprecian otras fuerzas), así:

$$v'(t) = -g \Longleftrightarrow v(t) = -\int_0^t g dt = -gt + c$$

pero para $t = 0$, $v(0) = V_0 = -g \cdot 0 + c \Longleftrightarrow c = V_0$ finalmente $v(t) = v_0 - gt$ ecuación de la velocidad.

b) $x(t) = \displaystyle\int_0^t v(t)dt = v_0 \int_0^t dt - g\int_0^t tdt = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + c_1$

Obsérvese que para $t = 0$, $x(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$

c) $v(t) = 0 \Longleftrightarrow v_0 - gt = 0 \Longleftrightarrow t = \dfrac{v_0}{g}$ así entonces

$$x\left(\frac{v_0}{g}\right) = v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

d) $x(t) = 0 \Longleftrightarrow t\left(v_0 - \dfrac{1}{2}gt\right) = 0 \Longleftrightarrow t_1 = 0\ t_2 = \dfrac{2v_0}{g}$ t_2 es el pedido.

36. Sea $r = r(\theta)$ la ecuación de cierta curva en coordenadas polares. Sean P_0 y P_1 los puntos correspondientes a $\theta = \theta_0$ y $\theta' = \theta_0 + \triangle\theta$ respectívamente. Sea α el ángulo OP_0P_1. Demostrar que:

$$\lim_{\triangle\theta \to 0} tg\alpha = -\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$$

Demostración.

$$sen\alpha = \frac{r(\theta_0 + \triangle\theta)sen\triangle\theta}{|P_0P_1|};$$

$$cos\alpha = \frac{r(\theta_0) - r(\theta_0 + \triangle\theta)cos\triangle\theta}{|P_0P_1|}$$

así:$tg\alpha = -\dfrac{r(\theta_0 + \triangle\theta)sen\triangle\theta}{[r(\theta_0 + \triangle\theta)cos\triangle\theta - r(\theta_0)]}$

$$\lim_{\triangle\theta\to 0} tg\alpha = -\lim_{\triangle\theta\to 0} \frac{r(\theta_0 + \triangle\theta)sen\triangle\theta}{r(\theta_0 + \triangle\theta)cos\triangle\theta - r(\theta_0)}$$

$$= -\lim_{\triangle\theta\to 0} \frac{\dfrac{sen\triangle\theta}{\triangle\theta}r(\theta_0 + \triangle\theta)}{\dfrac{r(\theta_0 + \triangle\theta) - r(\theta_0)}{\triangle\theta} - r(\theta_0 + \triangle\theta)\dfrac{(1 - cos\triangle\theta)}{\triangle\theta}}$$

$$= \frac{1 \cdot r(\theta_0)}{r'(\theta_0) - r(\theta_0) \cdot 0} = \frac{r(\theta_0)}{r'(\theta_0)}$$

37. Si $f(x)$ tiene tres raíces, $f''(x)$ tiene por lo menos una.

Demostración.

Sean x_1, x_2, x_3 las raíces, luego $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$, supongamos además $x_1 < x_2 < x_3$, así en $[x_1, x_2]$, existe ξ_1:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},\ x_1 < \xi_1 < x_2$$

de donde $f'(\xi_1) = 0$, análogamente en $[x_2, x_3]$, existe ξ_2:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},\ x_2 < \xi_2 < x_3,$$

de donde $f'(\xi_2) = 0$. Nótese que $\xi_1 \neq \xi_2$, ahora consideremos la función $f'(x)$ en $[\xi_1, \xi_2]$ así existe ξ_3:

$$f''(\xi_3) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = 0$$

con lo que $f''(x)$ tiene a lo menos una raíz.

6.6. Problemas Propuestos

1. Calcule la derivada de $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ empleando las dos diferentes formas de cuocientes en $x = 0, x = -2$ y $x = \alpha$.

   Respuesta.

   $0;\ -\frac{2}{3};\ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+5}}$

2. Calcule por definición, la derivada de:

   a) $f(x) = cosx$ b) $f(x) = a^x$

   c)$f(x) = x\sqrt{senx}$ d)$f(x) = (x^4-1)^2$

   e) $f(x) = cos\sqrt{x}$ f) $f(x) = e^x L(x)$

   g) $f(x) = sen^2 x$ h)$f(\theta) = xsen\theta$

   i) $f(x) = Arcsenx$ j) $f(x) = Arctgx$

   Respuesta.

   a) $-senx$ b) $a^x L(a)$ c) $\frac{2senx + xcosx}{2\sqrt{senx}}$ d) $8x^3(x^4-1)$

   e) $\frac{-sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ f) $e^x\left[L(x) + \frac{1}{x}\right]$ g) $sen2x$ h) $xcos\theta$

   i) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ j) $\frac{1}{1+x^2}$

3. Las funciones:

   a) $f(x) = |x|^3$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = |x^3|$

   son derivables en $x = 0$?

   Respuesta.

a) Si b) No c) Si

4. *a*) Probar que la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x} & \text{si} \quad 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua y derivable en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y calcular su derivada.

b) Probar que si $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{2x}{\pi} \leq senx \leq x$

c) Probar que: $0.3 \leq \displaystyle\int_0^1 senxdx \leq 0.5$

5. Demostrar que la función f definida en $\left[0, \dfrac{1}{\pi}\right]$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 cos\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es derivable.

6. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Respuesta.

Es continua pero no derivable en $x = 0$.

7. Demuestre que si $f(x)$ es derivable en x_0, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=f'(x_0),\ (n\in\mathbb{N})$$

8. Probar que si $f(x)$ es derivable en $x=x_0$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0)$$

9. Cual es la condición para que la función $f(x)=x^n\, sen\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ y $f(0)=0$ sea:

   a) continua en $x=0$
   b) derivable en $x=0$
   c) admita derivada continua en $x=0$

   Respuesta.

   a) $n>0$ b) $n>1$ c) $n>2$

10. *a*) Hallar $f'(x_0)$, si $f(x)=(x-x_0)g(x)$ y la función $g(x)$ es continua en $x=x_0$.
    b) Averiguar que sucede si $f(x)=|x-x_0|g(x); g(x_0)\neq 0$.
    c) ¿ A qué son iguales las derivadas laterales en b)?

    Respuesta.

    a) $g(x_0)$ b) No admite derivada en x_0

    c) $f'_-(x_0)=-g(x_0); f'_+(x_0)=g(x_0)$

11. Construir un ejemplo de una función continua que no tenga derivada en los puntos $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$.

12. Comprobar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \quad \text{es racional} \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \quad \text{es irracional} \end{cases}$$

admite derivada sólo en $x = 0$.

13. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq x_0 \\ \\ ax + b & \text{si} \quad x > x_0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de a y b la función f es derivable?

Respuesta.

$a = 2x_0;\ b = -x_0^2$

14. ¿Puede tener una función $f(x)$ en un punto de discontinuidad

    a) derivada finita?
    b) derivada infinita?

Respuesta.

a) No b) Si

15. Demostrar que la derivada de una función derivable par es una función impar, y que la derivada de una función derivable impar es una función par.

16. Demostrar que la derivada de una función derivable periódica es de nuevo una función periódica del mismo período.

17. Sea f una función que tiene derivada en todos los puntos del intervalo $[a, b]$. Demostrar que:

a) Si $f'(x) > 0$ en todos los pntos de $[a, b]$, $f(x)$ es monótona creciente allí. ¿Qué puede decirse si $f'(x) < 0$ en $[a, b]$.

b) Si el valor máximo de $f(x)$ en $[a, b]$ se produce cuando $x = x_0$ siendo $a < x_0 < b$ entonces $f'(x_0) = 0$. ¿Qué puede decirse si en ese x_0 el valor de $f(x)$ es el mínimo del intervalo?

18. ¿Cómo definiría los siguientes conceptos?

    a) Velocidad angular media y velocidad angular instantánea.

    b) Velocidad media de enfriamiento de un cuerpo y velocidad instantánea de enfriamiento.

    c) Velocidad de reacción química en un instante dado.

    d) Densidad lineal de una barra y densidad lineal en un punto de la barra.

19. Un vehículo recorre un camino de $1Km$ en una hora; suponiendo que parte del reposo y termina en reposo. Demostrar que, en algún instante la aceleración debe ser mayor o igual que $2Kms/h^2$.

20. La ley de movimiento de un punto sobre el eje X está dada por la fórmula $x(t) = 10t + 5t^2$ donde t es el tiempo en segundos y x la distancia en metros. Hallar la velocidad media en el intervalo de tiempo $20 \leq t \leq 20 + \triangle t$ y efectuar el cálculo numérico, si

    a) $\triangle t = 1$

    b) $\triangle t = 0.1$

    c) $\triangle t = 0.01$

    ¿Cuál es la velocidad del movimiento en el instante $t = 20seg.$?

    Respuesta.

    a) $215m/seg.$ b) $210, 5m/seg.$ c) $210, 05m/seg.; 210m/seg..$

21. En el eje X se mueven dos partículas que tienen, respectivamente las siguientes posiciones en el instante t

$$x(t) = 100 + 5t \text{ y } x(t) = \frac{1}{2}t^2$$

¿Con qué velocidad se alejarán las partículas en el momento de su encuentro? (x en metros y t en segundos).

Respuesta.

$5m/seg.$ y $20seg.$

22. Si f es polinomio de segundo grado, demustre que el punto ξ del teorema del valor medio es el punto medio de $[a, b]$.

23. Hallar los puntos de la curva $y = x^3 - 3x + 5$ en los que la tangente:

    a) es paralela a la recta $y = -2x$

    b) es perpendicular a la recta $y = -\dfrac{x}{9}$

    c) forma un ángulo de $45°$ con el sentido positivo del eje X.

Respuesta.

a) $P_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 5 + \frac{8}{9}\sqrt{3}\right); P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 5 - \frac{8}{9}\sqrt{3}\right)$

b) $P_1 = (-2, 3); P_2 = (2, 7)$

$$P_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 5 + \frac{10}{9}\sqrt{3}\right); P_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 5 - \frac{10}{9}\sqrt{3}\right)$$

24. Encuentre la ecuación de las tangentes trazadas desde el punto $\left(0, \frac{9}{8}\right)$ a la curva $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. (Indicación: Ver ejercicio resuelto N° 33).

Respuesta.

$y = \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{8}x + \dfrac{9}{8}$

25. ¿En qué puntos la curva $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$, tiene tangentes que pasan por el origen?

    Respuesta.

    $P_1(-3, 57); P_2(-1, 15)$ y $P_3(0, 75,\ 20, 906)$

26. Calcule aproximadamente el valor de

    a) $cos 31°$
    b) $\sqrt[5]{33}$

    Respuesta.

    a) 0.851   b) 2.0125

27. Demuestre que un error relativo de 1 % cometido almedir el radio de un círculo da a lugar a un error relativo aproximado de un 2 % al calcular el área de dicho círculo.

28. Hallar el incremento y el diferencial de la función $y = 3x^3 + x - 1$ en $x = 1$ para $\triangle x$ =0.1

    Hallar los errores absoluto y relativo permisibles al sustituir el incremento de la función por su diferencial.

    Respuesta.

    $\triangle y = 1093; dy = 1$; error absoluto 0.093 y el error relativo 0.085 o sea 8,5 %

29. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba conuna velocidad inicial de $64m/seg$. El desplazamiento $x(t)$ está dado por la ecuación : $x(t) = 64t - 16t^2$.

a) Encuentre la velocidad media que lleva la pelota durante el primer segundo; el segundo segundo.

b) Encuentre la velocidad que lleva la pelota cuando a transcurrido 1 seg.; 2 seg.

c) En que instante alcanza la pelota su altura máxima y cual es esta altura. Indicación: Ver problema resuelto N° 35.

Respuesta.

a) $48/mseg.; 32m/seg.$

b) $32m/seg.; 0m/seg.$

c) $t = 2seg.; 64mts.$

30. Demostrar que el segmento de la tangente a la hipérbola $y = \dfrac{e}{x}$ que está contenido entre los ejes coordenados queda dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

31. Sea la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(3 - x^2) & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Grafique f en el intervalo $[0, 2]$

b) Muestre que f satisface las condiciones del teorema del valor medio sobre $[0, 2]$ y determine los ξ en este intervalo estipulados por el teorema.

Respuesta.

$\xi_1 = \dfrac{3}{4}; \xi_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

32. *a*) Probar que la fórmula del valor medio se puede expresar en la forma

$$f(x+\triangle x) = f(x) + \triangle x\, f'(x+\theta\triangle x) \text{ donde } \quad 0<\theta<1$$

b) Determinar θ en función de x y $\triangle x$ cuando $f(x) = x^2$. Dejar x fijo, $x \neq 0$ y determinar el $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \theta$.

33. Utilizar el teorema del valor medio para probar

a) $|senx - seny| \leq |x-y|$

b) $n\, y^{n-1}(x-y) \leq x^n - y^n \leq n\, x^{n-1}(x-y), 0 < y \leq x,\, n \in \mathbb{N}$

c) $\left|\dfrac{cosax - cosbx}{x}\right| \leq |b-a|,\, x \neq 0$

34. Demostrar que las curvas $y = x^2 \wedge x = y^2$ se cortan ortogonalmente.

35. Cual es la condición, para que la curva $y = x^3 + ax + b$ sea tangente al eje X.

Respuesta.

$\left(\dfrac{a}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = 0$

36. En un sector circular de radio $100cms$ y el ángulo central $\alpha = 60°$. ¿Cuánto variará el área de este sector, si:

a) se aumenta $1cms$ su radio

b) se disminuye 30 minutos el ángulo α (Indicar la solución exacta y la aproximada).

Respuesta.

a) $104,7cm^2$ b) $43,6cm^2$

37. El lado de un cuadrado es $x = 2,4m \pm 0,05m$. ¿con qué errores absoluto y relativo límites, se puede calcular el área de este cuadrado?

    Respuesta.

    $0,24m^2$; $4,2\,\%$

38. ¿Con qué error relativo se admite medir el radio de una esfera, para que pueda determinarse su volumen con un $1\,\%$ de precisión?

    Respuesta.

    $\leq 0.33\,\%$

39. Hallar $F'(x)$ si $F(x) =$

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$$

    Respuesta.

    $6x^2$

40. Determinar los valores de a, b y c en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ de manera que sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $x = 1$ y pase por el punto $(-1, 0)$.

    Respuesta.

    $a = c = 0.25$; $b = 0.5$

41. Demuestre que el error relativo de la raíz n-ésima de un número natural es $\dfrac{1}{n}$ del error relativo del número.

42. Demostrar $|senx - x| \leq \frac{1}{2}x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$ y aproveche esta desigualdad para acotar $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{senx}{x} dx$; compare su resultado con el ejercicio resuelto N° 32 b) del capítulo 5. Verificar.

43. Probar que se cumple el teorema de Rolle para la función $y = cos^2 x$ en $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

44. Suponga $[f(x)g'(x) - f'(x)g(x)] \neq 0$ en un intervalo $[a, b]$. Demostrar que entre dos soluciones consecutivas de $f(x) = 0$, existe exactamente una solución de $g(x) = 0$.

45. A partir de un punto P de la parábola $x^2 = 2py$, determinar las coordenadas del punto cuya tangente sea paralela a la cuerda PP_1.

    Respuesta.

    $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{(\alpha + \beta)^2}{8p}\right)$ donde $P\left(\alpha, \frac{\alpha^2}{2p}\right)$ y $P_1\left(\beta, \frac{\beta^2}{2p}\right)$

46. Se considera una función f, definida, continua y derivable en el intervalo $[a, b]$ y se le asocian dos funciones g y h;

    g está definida en $(a, b]$ por $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

    h está definida en $[a, b]$ por $h(x) = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$

    a) Probar que para $g(a)$ y $h(b)$ pueden tomarse valores tales que las funciones g y h sean definidas y continuas en $[a, b]$.

    b) Probar que si k es un número estrictamente comprendido entre $f'(a)$ y $f'(b)$ las dos ecuaciones $g(x) = k$ y $h(x) = k$ tienen a lo menos una solución.

    c) Probar que si la función f' toma los valores α y β, toma todo valor comprendido entre éstos.

d) Se supone que la función f satisface la hipótesis de c) y que, además, es convexa h, probar que la función f' es continua.

47. Si$f''(x) \geq 0$, $\forall x$ tal que $a \leq x \leq b$, la gráfica de $y = f(x)$ queda en ó sobre la recta tangente en cualquier punto $x = \xi, y = f(\xi)$ de la gráfica.

48. Si $f''(x) \geq 0$, entonces $f\left(\dfrac{x_1 + X_2}{2}\right) \leq \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

49. Sea $f(x)$ una función tal que $f''(x) \geq 0$ para todo valor de x y sea $u = u(t)$ una función continua cualquiera. Entonces,

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f[u(t)]dt \geq f\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha u(t)dt\right)$$

Indicación: Aproveche el ejercicio propuesto N° 47.

50. Sea $f(x)$ con derivadas primera y segunda $\forall x \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $f(x)$ es positiva y cóncova en todo punto, entonces $f(x)$ es constante.

51. La función $g(t)$ es tal que $g'(t)$ es creciente. Demuestre entonces que la función $f(t) = \dfrac{g(t) - g(a)}{t - a}$, con a fijo, es también creciente. Interprete el significado de este hecho cuando $g(t)$ representa el camino recorrido por un móvil en el intervalo $[0, t]$.

52. un automóvil que había comenzado su movimiento enun punto inicial terminó su camino en 30 segundos, habiendo recorrido $900mts$. Demostrar que , en algún instante, el valor absoluto de la aceleración del movimiento del automóvil no era menor que $4mts/seg^2$.

53. Demostrar que si:

    a) la función $f(x)$ es continua en $[a, b]$

    b) tiene derivada finita $f'(x)$ en $[a, b]$

c) no es lineal,

entonces en el intervalo $[a,b]$ existe al menos un punto ξ tal que,

$$|f'(\xi)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

54. Demostrar que si:

    a) la función $f(x)$ tiene derivada segunda $f''(x)$ en $[a,b]$ y
    b) $f'(a) = f'(b) = 0$, entonces en (a,b) existe al menos un punto ξ tal que

$$|f''| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

55. Demostrar por medio de diferenciales, que:

$$\frac{1}{x+\triangle x} \cong \frac{1}{x} - \frac{\triangle x}{x^2}$$

56. Sea f diferenciable tal que $|f'(x)| \leq |f(x)|, f(0) = 0$ demostrar que $f(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$.