Capítulo 5

La Integral Definida

5.1. Partición

Un conjunto finito de puntos $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$ si, y solamente si,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b.$$

5.2. Suma Superior y Suma Inferior

Sea $y = f(x)$, una función continua en $[a, b]$. Designemos por m y M sus valores mínimo y máximo, respectivamentem, en este intervalo.

Sea la partición de $[a, b]$, mediante los puntos $a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$, siendo $x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n$ y llamemos $x_1 - x_0 = \triangle x_1$, $x_2 - x_1 = \triangle x_2, \cdots, x_n - x_{n-1} = \triangle x_n$.

Designemos ahora los valores mínimo y máximo de la función $f(x)$, en el intervalo $[x_0, x_1]$, por m_1 y M_1, en $[x_1, x_2]$ por m_2 y $M_2, \cdots$ en $[x_{n-1}, x_n]$ por m_n y M_n, respectívamente, formemos las sumas:

$$\underline{S_n} = m_1 \triangle x_1 + m_2 \triangle x_2 + \cdots + m_n \triangle x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i$$

$$\overline{S_n} = M_1 \triangle x_1 + M_2 \triangle x_2 + \cdots + M_n \triangle x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i$$

a: $\underline{S_n}$ llamamos suma inferior y a $\overline{S_n}$ llamamos suma superior.

Propiedades

1. Como $m_i \leq M_i\ \forall i$ es inmediato $\underline{S_n} \leq \overline{S_n}$.

2. Sea m el valor mínimo de $f(x)$ en $[a,b]$; luego tenemos $m_i \geq m$ entonces: $\underline{S_n} = m_1\triangle x_1 + \cdots + m_n\triangle x_n \geq m\triangle x_1 + \cdots + m\triangle x_n = m(\triangle x_1 + \cdots + \triangle x_n) = m(b-a) \Longrightarrow \underline{S_n} \geq m(b-a)$.

3. Sea M el valor máximo de $f(x)$ en $[a,b]$, $M_i \leq M$, entonces: $\overline{S_n} \leq M(b-a)$.

4. $m(b-a) \leq \underline{S_n} \leq \overline{S_n} \leq M(b-a)$.

5.3. Definición

Integral definida en sentido de Riemann. Si una función $f(x)$ está definida en $[a,b]$ y $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ así en cada uno de los intervalos $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2], \cdots, [x_{n-1},x_n]$ elijamos un punto que designamos respectívamente por $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, luego: $x_0 < \xi_1 < x_1,\ x_1 < \xi_2 < x_2, \cdots, x_{n-1} < \xi_n < x_n$ en cada uno de los puntos evaluemos: $f(\xi_1),\ f(\xi_2), \cdots, f(\xi_n)$, y formemos la suma:

$$S_n = f(\xi_1)\triangle x_1 + f(\xi_2)\triangle x_2 + \cdots + f(\xi_n)\triangle x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$$

se llama suma integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, obsérvese que:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\triangle x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\triangle x_i \Longleftrightarrow \underline{S_n} \leq S_n \leq \overline{S_n}$$

Designemos por máx $[x_{i-1},x_i]$, a la mayor longitud de los intervalos $[x_o,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $\cdots, [x_{n-1},x_n]$. Consideremos diferentes particiones de $[a,b]$ en los intervalos $[x_{i-1},x_i]$ tales que máx $[x_{i-1},x_i] \to 0$.

Si para cualquier partición del intervalo $[a,b]$, tal que máx $\triangle x_i \to 0$ cualquiera que sean los puntos ξ_i, la suma $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$, tiende a un mismo límite I, se dice que la función $f(x)$ es **integrable** en $[a,b]$ al límite I se llama **integral definida** de la función $f(x)$ en $[a,b]$ y se designa por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Entonces podemos escribir:

$$\lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

los números a y b se llaman, respectívamente, límite inferior y superior de la integral , a "x" se llama variable de integración.

Observaciones:

1. Notemos que, el $\max \triangle x_i \to 0$ es equivalente a afirmar que $n \to \infty$, asi pues tambien
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\triangle x_i = \int_a^b f(x)dx$$

2. Indiquemos sin demostración que si la función $y = f(x)$ es continua en $[a,b]$, es integrable en $[a,b]$.

3. Si $f(x)$ es continua:
$$\lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\triangle x_i = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\triangle x_1$$

4. Entre las funciones discontinuas hay funciones integrables y no integrables.

5. Si graficamos $y = f(x)$, en $[a,b]$, $f(x) \geq 0$, la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ será numéricamente igual al área A del llamado trapecio curvilíneo formado por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a, x = b$ y el eje X.

6. Observemos que la integral definida depende sólo de la forma de $f(x)$ y de los límites de integración, pero no de la variable de integración, luego:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \cdots = \int_a^b f(z)dz$$

7. Hemos supuesto $a < b$. Si $b < a$, por definición tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

8. Si $a = b$, por definición, $\forall\, f(x)$ tendremos:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Teorema de existencia de la Integral.

(Enunciado). Sea f continua en $[a, b]$ entonces: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ existe, independiente de la elección de los subintervalos.

5.4. Propiedades elementales de la Integral Definida

1. Todo factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral, si $c =$ constante:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

2. La integral de una suma algebraica de varias funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de los sumandos, así:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. $\forall\, c \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

4. i) Si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

   ii) Si en $[a,b]$, $a < b$, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen la condición $f(x) \leq g(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

5. Si m y M son los valores mínimo y máximo, respectívamente, de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

6. **Teorema del valor medio**. Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$, existe en éste intervalo un punto "ξ" tal que se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi), \ (a < \xi < b).$$

5.5. Integrales Indefinidas

Es claro que la integral de una función depende de los límites de integración asi, si dejamos el límite inferior fijo y el superior variable, obtendremos una función.

Definición

Sea $f(x)$ una función continua a $\o(x) = \int_a^x f(u)du$ se le llama **Integral Indefinida** de f.

Observación

Sea una integral indefinida $\o(x) = \int_a^x f(u)du$, de una función f entonces cualquier otra integral indefinida de f difiere de la primera en una constante.

5.6. Continuidad de las Integrales Indefinidas

Teorema

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$, sea α un punto arbitrario de $[a, b]$, entonces la integral indefinida: $\o(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(u)du$ es continua en $[a, b]$.

La demostración queda propuesta.

Propiedades

a) Si $f > 0$ entonces $\o(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(u)du$ es una función creciente.

b) Si $f < 0$ entonces $\o(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(u)du$ es una función decreciente.

c) Si $f = 0$ entonces $\o(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(u)du = 0 \Longrightarrow$ función constante.

5.7. Las Funciones: Logaritmo y Exponencial

En este texto hemos estado usando las funciones logaritmo y exponencial, aprovechando los conceptos que cada lector trae consigo acerca de estas funciones, pero debido a su gran importancia en el análisis matemático y con la ayuda de la integral definida, repasaremos aunque desde otro punto de vista dichos conceptos.

Por razones obvias, sólo estudiaremos el logaritmo natural, es decir, en base "e" $(e = 2,71828182849)$ es decir $logx$
Definición

Para $x > 0$; la función:

$$logx = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

recibe el nombre de **logaritmo natural o logaritmo neperiano** la función es monótona creciente, como $log1 = \displaystyle\int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0$ se deduce también que $logx < 0$ para $0 < x < 1$ y que $logx > 0$, para $x > 1$. La recta $x = 0$ es uan asíntota vertical dado que: $\lim\limits_{x\to 0^+} logx = -\infty$ (Figura 1)

Por medio de la definición de la integral definida es fácil verificar:

$$\int_a^b \frac{1}{t}dt = \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{1}{u}du = log\left(\frac{b}{a}\right); \quad (ab > 0)$$

Sean ahora x_1, x_2 dos números positivos arbitrarios. Empleando la regla de aditividad, tenemos:

$$log(x_1x_2) = \int_1^{x_1x_2} \frac{1}{t}dt = \int_1^{x_1} \frac{1}{t}dt + \int_{x_1}^{x_1x_2} \frac{1}{t}dt$$

$$= log(x_1) + log\left(\frac{x_1x_2}{x_1}\right) = log(x_1) + log(x_2)$$

Por lo tanto, los logaritmos naturales satisfacen en todo su dominio la ecuación funcional $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. De aquí se sigue, además, que:

a) $log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = log(x_1) - log(x_2)$

b) $log(x^n) = n\, logx$ (n entero)

c) $log\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}log(x)$ (n entero)

De las dos últimas reglas, obtenemos finalmente que $log(x^r) = r\, log(x)$, siendo r cualquier número racional.

Definición

La función inversa de $y = log(x)$ se llama **función exponencial neperiana** y se representa por $f(x) = \exp x$ ó $f(x) = e^x$ y evidéntemente por ser inversa se tiene: $f(x) \in \mathbb{R}^+, \ \forall x \in \mathbb{R}\ x \in \mathbb{R}$, es monótona creciente y verifica las siguientes identidades: $log(\exp\, x) = x, \ exp(log(x)) = x$, por lo tanto:

$$\exp(0) = \exp(log(1)) = 1$$

Ahora sean x e y dos números reales y r un número racional, luego:

a) $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$

b) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$

c) $(\exp x)^r = \exp(xr)$

Notas

1. En este texto usaremos $logx$, $exp\,x$ y e^x.
2. Nótese que a partir de la siguiente definición $\forall x > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} : x^\alpha = e^{\alpha L(x)}$; podemos volver a estudiar la función potencial: $f(x) = x^\alpha$, por ejemplo a decir de paso para $\alpha > 0, f(x)$ es estrictamente creciente y para $\alpha < 0; f(x)$ es estrictamente decreciente, ... etc.
3. El lector estusiasmado con la integral tan fundamental en el análisis, debe consultar entre otros, por ejemplo: **Joseph Kitchen Jr.** Calculus of one variable ó de **Courant y John**. Introducción al Cálculo y al análisis Matemático, para afianzar sus conocimientos en cuanto a la Teoría.

5.8. Problemas Resueltos

1. Si $f(x) = x^2$ sobre $[0,1]$ y la partición $P = \{0,\ 0.5,\ 0.7,\ 0.9,\}$. Hallar : $\underline{S_4}$ y $\overline{S_4}$

   Solución.

   a) $$\overline{S_4} = \sum_{i=1}^{4} M_i \triangle x_i = 0.25(0.5-0) + 0.49(0.7-0.5)$$
   $$+0.81(0.9-0.7) + 1(1-0.9) = 0.485$$

   b) $$\underline{S_4} = \sum_{i=1}^{4} m_i \triangle x_i = 0(0.5-0) + \ 0.25(0.7-0.5) + 0.49(0.9-0.7)$$
   $$+0.81(1-0.9) = 0.229$$

2. *a*) Dé un ejemplo de una función para la cual la integral inferior sea igual a la integral superior.

   b) Si $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \quad \text{irracional} \\ \\ 1 & \text{si} \quad x \quad \text{racional} \end{cases}$ demuestre $\underline{S_n}$ no es igual a $\overline{S_n}$.

Solución.

   a) Supongamos $f(x) = 3 \; \forall x \in [a, b]$. Si $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, entonces $m_i = M_i = 3$, por lo tanto,

   $$\underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} 3(x_i - x_{i-1}) = 3(b-a); \quad \overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} 3(x_i - x_{i-1}) = 3(b-a)$$

   luego $\underline{S_n} = \overline{S_n}$.

   b) Si $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, es una partición, entonces $m_i = 0$, porque existe un número irracional en $[x_i, x_{i-1}]$ y $M_i = 1$, porque existe un número racional en $[x_i, x_{i-1}]$, por lo tanto:

   $$\underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} o(x_i - x_{i-1}) = 0, \; \overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = 1(b-a)$$

   $$\Longrightarrow \underline{S_n} \neq \overline{S_n}.$$

3. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \quad \text{es racional} \\ \\ 2 & \text{si} \quad x \quad \text{es irracional} \end{cases}$$

y sea $P = \{0, 0.1, 0.2, \cdots, 0.9, 1\}$,. Determine $\overline{S}_{10}$, $\underline{S_{10}}$ y calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ considerando $\overline{S_n}$

Solución.

$$\overline{S}_{10} = \sum_{i=1}^{10} 2(x_i - x_{i-1}) = 2 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,1 + \cdots + 2 \cdot 0,1 = 2$$

$$\underline{S}_{10} = \sum_{i=1}^{10} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,1 + \cdots + 0,9 \cdot 0,1$$

$= 0.1(0,1 + 0,2 + 0,3 + \cdots + 0,9) = 0.45$

Sea $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in [0,1]$; $\overline{S}_n = 2\triangle x_1 + 2\triangle x_2 + 2\triangle x_3 + \cdots + 2\triangle x_n$

$\overline{S}_n = 2(\triangle x_1 + \triangle x_2 + \cdots + \triangle x_n) = 2 \cdot 1 = 2$ luego $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S_n} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2$

4. Calcular la integral $\displaystyle\int_a^b kx\,dx,\ (b > a)$

Solución.

Desde el punto de vista geométrico, el problema se reduce al cálculo del área del trapecio limitado por las recta $y = kx$, $x = a$, $x = b$ e $y = 0$.

Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales la longitud $\triangle x$ de cada intervalo parcial será igual a

$$\triangle x = \frac{b-a}{n},\ \triangle x \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Las coordenadas de los puntos de división son:

$$a = x_0,\ x_1 = a + \triangle x,\ x_2 = a + 2\triangle x, \cdots, x_n = a + n\triangle x,$$

como ξ_i tomemos los extremos izquierdos de cada subintervalo, sean:

$\xi_1 = a,\ \xi_2 = a + \triangle x, \xi_3 = a + 2\triangle x, \cdots, \xi_n = a + (n-1)\triangle x$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = k\,\xi_1 \triangle x + k\xi_2 \triangle x + \cdots + k\xi_n \triangle x$$

$$= ka\triangle x + k(a + \triangle x)\triangle x + \cdots + k[a + (n-1)\triangle x]\triangle x$$

$$= k\{a + (a + \triangle x) + (a + 2\triangle x) + \cdots + [a + (n-1)\triangle x]\}\triangle x$$

$$= k\{na + [\triangle x + 2\triangle x + \cdots + (n-1)\triangle x]\}\triangle x$$

$$= k\{na + [1 + 2 + \cdots + (n-1)]\triangle x\}\triangle x, \text{ como } \triangle x = \frac{b-a}{n}, \text{ tenemos:}$$

$$S_n = k\left[na + \frac{n(n-1)}{2}\frac{(b-a)}{n}\right]\frac{(b-a)}{n} = k\left[a + \frac{n-1}{n}\frac{(b-a)}{2}\right](b-a),$$

$$\text{por lo tanto, } \lim_{n\to\infty} S_n = k\left[a + 1 \cdot \frac{b-a}{2}\right](b-a) = k \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} \quad \text{así:}$$

$$\int_a^b kx dx = k\frac{b^2 - a^2}{2}.$$

5. Demuestre que: $\displaystyle\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$

Demostración.

Dividimos el intervalo $[0, b]$ en n partes iguales mediante los puntos: $x_0 = 0,\ x_1 = \triangle x,\ x_2 = 2\triangle x, \cdots, x_n = n\triangle x = b \Longrightarrow \triangle x = \dfrac{b}{n},\ \triangle x \to 0$ si $n \to \infty$, como ξ_i tomemos los extremos derechos de cada intervalo:

$$S_n = x_1^2 \triangle x + x_2^2 \triangle x + \cdots + x_n^2 \triangle x = [(\triangle x)^2 \triangle x + (2\triangle x)^2 \triangle x + \cdots +$$

$$(n\triangle x)^2 \triangle x] = (\triangle x)^3 [1^2 + 2^2 + \cdots + n^2]$$

$$S_n = \frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b^3}{6}(1)\cdot(2) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b^3}{3} \quad \text{luego} \quad \int_0^b x^2dx = \frac{b^3}{3}.$$

6. Probar que: $\displaystyle\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$

   Prueba

   Dividamos el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales: $x_0 = a,\ x_1 = a+\triangle x, \cdots, x_n = a+n\triangle x$; $\triangle x = \dfrac{b-a}{n}$, como ξ_i, tomemos los extremos izquierdos, y formemos la suma: $S_n = e^a\triangle x + e^{a+\triangle x}\triangle x + \cdots + e^{x+(n-1)\triangle x}\triangle x = e^a(1+e^{\triangle x} + e^{2\triangle x} + \cdots + e^{(n-1)\triangle x})\triangle x$, la expresión entre paréntesis es una P.G. cuya razón es $e^{\triangle x}$ y su primer término es 1, luego:

   $$S_n = e^a\frac{e^{n\triangle x}-1}{e^{\triangle x}-1}\triangle x = e^a(e^{n\triangle x}-1)\frac{\triangle x}{e^{\triangle x}-1};\ \triangle x \to 0 \Longrightarrow n\to\infty$$

   $$\text{y como } \lim_{\triangle x\to 0}\frac{1}{(e^{\triangle x}-1)/\triangle x} = 1, \text{ así } \lim_{n\to\infty} S_n = e^a(e^{b-a}-1)1 = e^b - e^a$$

7. ¿Para qué $\delta > 0$ se deduce la relación

   $$\left|\int_0^{\pi} senx dx - \sum_{i=0}^{n-1} sen\xi_i \triangle x_i\right| < 0.001$$

   de la desigualdad máx $\triangle x_i < \delta$?

   Solución.

   Como $\underline{S_n} < I_n < \overline{S_n}$, entonces para que se cumpla la desigualdad pedida basta con que $0 < \overline{S_n} - \underline{S_n} < 0,001$, pero

   $$\overline{S_n} - \underline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\triangle x_i < \delta\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)$$

donde M_i y m_i los valores máximo y mínimo de la función $senx$ en $[x_i, x_{i+1}](i = 0, 1, \cdots, n-1)$.

Eligiendo para simplificar $x = \dfrac{\pi}{2}$ como uno de los puntos de división y como $senx$ es monótona en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ se tiene:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i) = 2\left(sen\frac{\pi}{2} - sen0\right) = 2$$

Por lo tanto, se satisface la desigualdad pedida si $2\delta < 0,001$, es decir, $\delta < 0,0005$.

8. Demuestre que:

$$\int_0^{\pi} senx\, dx = 2$$

Demostración.

Procediendo en forma análoga al ejercicio N° 5 se tiene: $\triangle x = \dfrac{\pi}{n}$ y la suma de los extremos derechos es $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(sen\ k\triangle x)\triangle x$ luego se tiene que:

$$S_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\, sen\, k\,\triangle x\, sen\frac{\triangle x}{2}}{2\, sen\frac{\triangle x}{2}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\triangle x - cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\triangle x\right]}{2sen\frac{\triangle x}{2}}$$

$$S_n = \frac{cos\dfrac{\triangle x}{2} - cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\triangle x}{2sen\dfrac{\triangle x}{2}}\triangle x = \frac{cos\dfrac{\triangle x}{2} - cos\left(\pi + \dfrac{\triangle x}{2}\right)}{2sen\dfrac{\triangle x}{2}}\triangle x$$

$$S_n = \frac{\dfrac{\triangle x}{2}}{sen\dfrac{\triangle x}{2}}\, 2cos\frac{\triangle x}{2} \quad \text{así:} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\triangle x \to 0}\frac{\dfrac{\triangle x}{2}}{sen\dfrac{\triangle x}{2}}\, 2cos\frac{\triangle x}{2} = 2$$

9. Mediante la definición, calcular la integral

   a) $\displaystyle\int_a^b x^p dx;\ p \neq -1;\ 0 < a < b$

   b) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x} dx;\ 0 < a < b$

Solución.

Para a) y b) tomaremos la misma partición de $[a, b]$, es decir los puntos siguientes: $x_0 = a$, $x_1 = a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\dfrac{1}{n}}, \cdots, x_i = a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\dfrac{i}{n}} = b$ que forman una P.G. de razón $q = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\dfrac{1}{n}} > 1(*)$; nótese evidéntemente que los $\triangle x_i$ no son iguales y valen $\triangle x_i = aq^i(q-1)$.

Por lo tanto, la longitud máxima de los subintervalos es igual a:

$$\text{máx}\,\triangle x_i = aq^{n-1}(q-1) = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\dfrac{n-1}{n}}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\dfrac{1}{n}} - 1\right]$$

y tiende a cero cuando n crece, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} q = 1$, ahora tomemos como los ξ_i los extremos: $\xi_i = aq^{i+1}(i = 0, 1, 2, \cdots, (n-1))$ y formamos la suma para a)

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^p \triangle x_i = \sum_{i=0}^{n-1} a^p q^{(i+1)p}\, aq^i(q-1)$$

$$S_n = a^{p+1}(q-1)q^p[1 + q^{p+1} + \cdots + q^{(n-1)(p+1)}],$$

sumando

$$= a^{p+1}(q-1)q^p \frac{q\,(p+1)n - 1}{q^{p+1} - 1} = (b^{p+1} - a^{p+1})q^p \frac{q-1}{q^{p+1} - 1}$$

Calculando el límite de la suma cuando $\max \triangle x_i \to 0$, es decir $q \to 1$, se tiene

$$\lim_{q\to 1} S_n = (b^{p+1} - a^{p+1}) \lim_{q\to 1} q^p \frac{q-1}{q^{p+1}-1}$$

$$= (b^{p+1} - a^{p+1}) \lim_{q\to 1} q^p \frac{1}{q^p + q^{p-1} + \cdots + q^0} = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

Para b), la suma queda:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\xi_i} \triangle x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{aq^{i+1}} aq^i (q-1) = \frac{(q-1)n}{q}$$

En (*) tomemos logaritmos y queda: $log(q) = \dfrac{1}{n} log\left(\dfrac{b}{a}\right)$, $n = \dfrac{log\left(\dfrac{b}{a}\right)}{log(q)}$, por lo tanto:

$$\lim_{q\to 1} S_n = \lim_{q\to 1} log\left(\frac{b}{a}\right) \frac{(q-1)}{q log(q)} = log\left(\frac{b}{a}\right) \lim_{q\to 1} \frac{1}{log[1+(q+1)]^{\frac{1}{q-1}} \cdot q}$$

$$log\left(\frac{b}{a}\right) \frac{1}{log(e)} = log(b) - log(a).$$

10. Demostrar que:

$$\int_0^a x^p dx = a^{p+1} \int_0^1 x^p dx; \; a \in \mathbb{R}, \, p \in \mathbb{N}$$

Demostración.

De inmediato, tenemos:

$$\int_0^a x^p dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a}{n} i\right)^p \frac{a}{n} = a^{p+1} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^p \frac{1}{n} = a^{p+1} \int_0^1 x^p dx$$

11. Sea f una función integrable tal que $f(c-x) = f(c+x)$, para un cierto número fijo c. Demostrar a partir de la definición de integral que:

$$\int_{c-a}^{c} f(x)dx = \int_{c}^{c+a} f(x)dx$$

Demostración.

Tenemos que:

$$\int_{c-a}^{c} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \tag{1}$$

donde: $\triangle x_i = \dfrac{c-(c-a)}{n} = \dfrac{c+a-c}{n} = \dfrac{a}{n}$, así continuando con (1),

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(c-a+i\frac{a}{n}\right)\frac{a}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[c-\left(a-i\frac{a}{n}\right)\right]\frac{a}{n}$$

aplicando la condición $f(c-x) = f(c+x)$, se tiene que: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left[c+(n-i)\dfrac{a}{n}\right]\dfrac{a}{n}$,
sea $n-i=k$ ahora si $i=1 \Longrightarrow k=n-1$; si $i=n \Longrightarrow k=0$ así queda:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[c+k\frac{a}{n}\right]\frac{a}{n} = \int_{c}^{c+a} f(x)dx$$

12. Demuestre usando la definición de integral que:

a) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x-k)dx$

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx,\ (k \neq 0)$

Demostración.

a)
$$\int_0^a f(x)dx = \lim_{\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \lim_{\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[(a - x_i) - (a - x_{i+1})]$$

y sea $a - x_i = t_i$ luego $x_i = 0 \Longrightarrow t_i = a$ y $x_i = a \Longrightarrow t_i = 0$, nótese que si $\triangle x_i \to 0 \Longrightarrow \triangle t_i \to 0$

$$= \lim_{\triangle t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a - t_i)(t_i - t_{i+1}) = - \lim_{\triangle t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a - t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$= - \int_a^0 f(a - x)dx = \int_0^a f(a - x)dx$$

b) $\displaystyle\int_{a+k}^{b+k} f(x - k) = \lim_{\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i - k)\triangle x_i$, pero nótese que:

$\triangle x_i = \dfrac{b + k - (a + k)}{n} = \dfrac{b - a}{n} = \triangle t_i$ donde $x_i - k = t_i$ de aquí si

$x_i = a + k \Longrightarrow t_i = a$ y si $x_i = b + k \Longrightarrow t_i = b$; luego:

$$= \lim_{\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\triangle t_i = \int_a^b f(x)dx$$

c) Por se análogo queda propuesto.

13. Sea f integrable, demostrar usando la definición de integral que:

a) Si f es par: $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)dx$

b) Si f es impar: $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx = - \int_a^0 f(x)dx$ y $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Demostración.

a) f par $\Longrightarrow f(x) = f(-x)$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} f[-a+(i-1)\triangle x]\triangle x$$

donde: $\triangle x = \dfrac{0-(-a)}{n} = \dfrac{a}{n} = \dfrac{a-0}{n}$; entonces

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} f(i\triangle x)\triangle x,$$

por demostrar

$$\sum_{i=1}^{n} f(-a+(i-1)\triangle x) = \sum_{i=1}^{n} f(i\triangle x), \text{ en efecto}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left[-a+(i-1)\frac{a}{n}\right] = f(-a) + f\left(\frac{1-n}{n}a\right) + \cdots + f\left(-\frac{2a}{n}\right) + f\left(-\frac{a}{n}\right)$$

como f es par:

$$= f\left(n\,\frac{a}{n}\right) + f(n-1)\frac{a}{n} + \cdots + f\left(2\,\frac{a}{n}\right) + f\left(1\,\frac{a}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} f(i\triangle x)$$

para demostrar $\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)dx$, f par usemos que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

pero por lo anterior

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

y queda lo pedido.

b) Es anóloga, queda propuesta.

14. Encontrar el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, si $a_n = \displaystyle\int_n^{3n} \frac{1}{2n}\left(\frac{sen2x}{x+1}\right)dx$

    Solución.

    Sabemos $-1 \leq sen2x \leq 1, \forall x \in [n, 3n], -\dfrac{1}{2n(x+1)} \leq \dfrac{sen2x}{2n(x+1)} \leq \dfrac{1}{2n(x+1)} \Longrightarrow -\displaystyle\int_n^{3n} \frac{1dx}{2n(x+1)} \leq \int_n^{3n} \frac{sen2x\ dx}{2n(x+1)} \leq \int_n^{3n} \frac{1dx}{2n(x+1)}$, ahora por el teorema del valor medio:

    $$\int_n^{3n} \frac{1}{2n}\frac{dx}{(x+1)} = \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{\xi+1}[3n-n] = \frac{1}{\xi+1}, \quad \text{con}$$

    $$\xi \in [n,3n] \therefore \lim_{n\to\infty}\left(\int_n^{3n} \frac{1dx}{2n(x+1)}\right) = \lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{\xi+1} = 0, \quad \text{además como:}$$

    $$-\int_n^{3n} \frac{dx}{2n(x+1)} \leq a_n \leq \int_n^{3n} \frac{dx}{2n(x+1)} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

15. Demuestre que:

    $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

    Demostración.

    Como $-f(x) \leq |f(x)|$ y $f(x) \leq |f(x)| \Longrightarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \forall x \in [a,b]$ entonces

    $$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

    como: $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx \geq 0$ entonces $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| \leq \displaystyle\int_A^b |f(x)|dx.$

16. Por medio del teorema del valor medio acote la integral:

    $$\int_1^5 \frac{x}{x^2+1}dx$$

Solución.

Teorema del valor medio si $f(x)$ continua en $[a,b]$, $\exists \xi \in [a.b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x) = (b-a)f(\xi)$, luego:

$\displaystyle\int_1^5 \frac{x}{x^2+1}dx = (5-1)f(\xi) = 4\,\frac{\xi}{\xi^2+1}$, como $\dfrac{4\xi}{\xi^2+1}$ es continua en $[1,5]$ y además es decreciente (verifíquelo),luego el menor valor que puede tomar es para $\xi = 5 \Longrightarrow \dfrac{4\xi}{\xi^2+1} = \dfrac{20}{26} = \dfrac{10}{13}$; y el menor $\xi = 1 \Longrightarrow \dfrac{4\xi}{\xi^2+1} = 2$, luego : $\dfrac{10}{13} \leq \dfrac{4\xi}{\xi^2+1} \leq 2$, por lo tanto:

$$\frac{10}{13} \leq \int_1^5 \frac{x}{x^2+1}dx \leq 2$$

17. Encuentre el límite de la siguiente sucesión:

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = a_n$$

Solución.

$\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = \left[1+\frac{1}{n}-1\right]f(\xi) = \frac{1}{n}f(\xi),\ \xi \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$

$a_n = \dfrac{1}{n}f(\xi) = \dfrac{1}{n}\dfrac{\sqrt{\xi}}{(1+\xi)}$; si $n \to \infty \Longrightarrow \xi \to 1$ luego:

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{\sqrt{\xi}}{(1+\xi)} = 0$, (este problema se puede resolver también por el método del problema 16).

18. Como $logx = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{u}du$; probar que $log\, e = 1$

Prueba

Como $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \Longrightarrow log\, e = log \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, la función $\o(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(x)dx$ es continua (verifíquelo) entonces $log\, x$ es continua, luego:

$$log\, e = \lim_{n\to\infty} log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\, log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

además: $log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{u}du = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\bar{u}};\ \bar{u}\in\left(1, \frac{1}{n}+1\right)$, con lo que:

$$log\, e = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\bar{u}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\bar{u}} = 1.$$

19. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_n^{2n}\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}dx$

Solución.

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{x\to 0}[log(1+x) - log(1-x)]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\int_1^{1+x}\frac{1}{t}dt - \int_1^{1-x}\frac{1}{t}dt\right] =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[(1+x-1)\frac{1}{\xi_1} - (1-x-1)\frac{1}{\xi_2}\right]$$

donde: $1<\xi_1<1+x;\ 1<\xi_2<1-x$, se usó el teorema del valor medio, así:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x}{\xi_1}+\frac{x}{\xi_2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\xi_1} + \lim_{x\to 0}\frac{1}{\xi_2} = 1+1 = 2$$

b) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{x^2+1} = \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{x^{3/2}+x^{-1/2}}$, como $n<x<2n \Longrightarrow 1+\dfrac{1}{x}<2 \Longrightarrow$

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} < \sqrt{2} \qquad (1)$$

y por otra parte $x^{3/2} + x^{-1/2} > x^{3/2}$ (2) luego por (1) y (2)

$$0 < \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{x^{3/2} + x^{-1/2}} < \sqrt{2}\, x^{-3/2}$$

de donde

$$0 < \int_n^{2n} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+1} dx < \sqrt{2} \int_n^{2n} x^{-3/2} dx,$$

ahora por ejercicio resuelto N° 9 (a) , con $p = -3/2$, resulta:

$$0 < \int_n^{2n} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+1} dx < -2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

de donde por el teorema del sandwich se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+1} dx = 0$$

20. Demostrar: $log \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right] = x$

Demostración.

Por la continuidad de la función logaritmo, se tiene:

$$log \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right] = \lim_{n\to\infty} log \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \lim_{n\to\infty} n \int_1^{1+\frac{x}{n}} \frac{1}{t} dt$$

ahora por el teorema del valor medio; se sigue:

$= \lim_{n\to\infty} n \, \frac{1}{\xi} \cdot \frac{x}{n}$ con $1 < \xi < 1 + \frac{x}{n}$, finalmente

$= x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\xi} = x$ ya que si $n \to \infty \Longrightarrow \xi \to 1$.

21. *a*) Demostrar usando la definición de logaritmo, que:

$$log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt, \quad x > -1$$

b) Aplicar a) para demostrar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log(1+x)}{x} = 1$

Solución.

a) $log(1+x) = \displaystyle\int_1^{1+x} \frac{1}{t}dt$, tomando la partición del intervalo $[1, 1+x]$, como: $t_0 = 1$; $t_1 = 1+\triangle t, \cdots, t_n = 1+n\triangle t = 1+x$ de donde: $\triangle t = \dfrac{x}{n}$ eligiendo $\xi_i = 1 + i\triangle t \Longrightarrow f(\xi_i) = \dfrac{1}{1+i\triangle t}$ se tiene

$$log(1+x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i\triangle t} \cdot \triangle t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i\dfrac{x}{n}} \cdot \frac{x}{n} \qquad (1);$$

por otra parte, para

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt \quad \text{se tiene;} \quad t_0 = 0;\ t_1 = \triangle t; \cdots; t_n = n\triangle t = x$$

de donde: $\triangle t = \dfrac{x}{n}$ y eligiendo $\xi_i = i\triangle t \Longrightarrow f(\xi_i) = \dfrac{1}{1+i\triangle t}$, luego:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i\triangle t} \cdot \triangle t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i\dfrac{x}{n}} \cdot \frac{x}{n} \qquad (2)$$

Por (1) y (2) se tiene lo pedido.

b) De inmediato se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(x-0)\frac{1}{1+\xi},$$

con $0 < \xi < x$, $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\xi} = 1.$

22. Demostrar

$$x - \frac{x^2}{2} < log(1+x) < x, \quad \text{si} \quad x > 0$$

Demostración.

Sea $t > 0$, entonces: $1 - t^2 < 1 < 1 + t$ de aquí

$$1 - t < \frac{1}{1+t} < 1; \qquad 1 + t > 0$$

luego:

$$\int_0^x (1-t)dt < \int_0^x \frac{1}{1+t}dt < \int_0^x dt$$

$$\int_0^x dt - \int_0^x t\,dt < log(1+x) < x$$

$$x - \frac{x^2}{2} < log(1+x) < x$$

Nótese que el límite de 21 b) también puede demostrarse usando esta desigualdad.

23. Demostrar:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ b) Si $a > 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = log(a)$

Demostración.

a) De inmediato por ejercicio 20.

$$log\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = x \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

b) Sea $a^x = z \Longleftrightarrow x\,log(a) = log\,(z) \Longleftrightarrow x = \dfrac{log(z)}{log(a)}$; si $x \to 0 \Longrightarrow z \to 1$

luego: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=log(a)\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{log(z)}=log(a)\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{\displaystyle\int_1^z\frac{1}{t}dt}$

ahora por el teorema del valor medio $\displaystyle = log(a)\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{(z-1)\frac{1}{\xi}}$ con $1<\xi<z$ de aquí resulta $=log(a)$ ya que si $z\to 1\Longrightarrow \xi\to 1$

Nota. Compare b) con ejercicio resuelto N° 30 (v) del capítulo 4.

Veremos más adelante otros métodos para mostrar estos límites con ayuda de la derivada.

24. *a*) Demostrar que $\forall\, n\in\mathbb{N}$

$$log(n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+log(n)$$

b) Sea $a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-logn$. Demostrar que la sucesión de los a_n es estríctamente decreciente.

c) Demostrar que la sucesión de los a_n converge a un número comprendido entre 0 y 1.

Solución.

a) Sea $k-1<x<k$, como $f(x)=\frac{1}{x}$ es estríctamente decreciente

$$\frac{1}{k}<\frac{1}{x}<\frac{1}{k-1} \tag{1}$$

de donde:

$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}dx<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\Longrightarrow\frac{1}{k}<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\Longrightarrow\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\Longrightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx$$

$$+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx \Longrightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx$$

$$\Longrightarrow 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+logn \qquad (2)$$

De (1):

$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k-1}dx \Longrightarrow \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k-1}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\right)<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} \Longrightarrow \int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

$$log\,n<log\,n+\frac{1}{n}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} \Longrightarrow logn<1+\frac{1}{2}$$

$$+\cdots+\frac{1}{n} \qquad (3)$$

así por (2) y (3): $log\,n<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+log\,n.$

b) Por demostrar $a_{n+1}<a_n$

Sea $a_n-a_{n+1}=\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-logn\right]-$
$\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)-log(n+1)\right].$

$$a_n-a_{n+1}=log(n+1)-log(n)-\frac{1}{n+1}=log\left(\frac{n+1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}$$

$$=log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=\int_{1}^{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{t}dt-\frac{1}{n+1},$$ por el teorema del valor medio

$\exists\xi, 1<\xi<1+\frac{1}{n} \Longrightarrow= f(\xi)\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, pero como
$1<\xi<1+\frac{1}{n} \Longrightarrow \frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$

así $log\left(\dfrac{n+1}{n}\right) > \dfrac{1}{n+1} \Longrightarrow a_n > a_{n+1}$

$c)$ De inmediato por (a)

$$log\, n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + log\, n$$

$$0 < \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - log\, n < 1$$

así: $0 < a_n < 1$, lo que prueba que está acotada y por b), entonces: a_n converge.

25. Pruebe que:

$$\int_1^n log\, x\; dx < \sum_{k=2}^{n} log\; k < \int_1^n log\, x dx + log\, n$$

y calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

Prueba

Como $log\, x$ es estríctamente creciente, se tiene

$$log(k-1) < log\, x < log\, k \tag{1}$$

Luego si:

$$log\, x < log\, k, \quad \text{entonces}$$

$$\int_{k-1}^{k} log\, x dx < \int_{k-1}^{k} log\, k dx \Longrightarrow \int_{k-1}^{k} log\, x dx < log\, k$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} log\, x\; dx < \sum_{k=2}^{n} log\, k$$

$$\Longrightarrow \int_1^2 logx\ dx + \int_2^3 log\, x + \cdots + \int_{n-1}^n log\, x dx < \sum_{k=2}^n log\, k$$

$$\Longrightarrow \int_1^n log\, x\ dx < \sum_{k=2}^n log\ k \tag{2}$$

análogamente de (1):

$$log(k-1) < log\, x \Longrightarrow \int_{k-1}^k log(k-1)dx < \int_{k-1}^k log\, x\ dx$$

$$\Longrightarrow log(k-1) < \int_{k-1}^k log\ x\ dx \Longrightarrow \sum_{k=2}^n log(k-1) < \sum_{k=2}^k \int_{k-1}^k log\, x\ dx$$

$$= \int_1^n log\, x\ dx \Longrightarrow \sum_{k=2}^n log(k-1) + log\ n < \int_1^n log\, x\ dx + log\, n$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=2}^n log\, k < \int_1^n log\, x\ dx + log\, n \tag{3}$$

de donde por (2) y (3):

$$\int_1^n log\, x\ dx < \sum_{k=2}^n log\, k < \int_1^n log\, x\ dx + log\, n$$

b)

$$\int_1^n log\, x\ dx < \sum_{k=2}^n log\, k < \int_1^n log\, x\ dx + log\, n$$

$$xlog\, n - x\ |_1^n < log\, n! < xlog\, x - x\ |_1^n + log\, n$$

$$nlog\, n - n - (0-1) < log\, n! < nlog\, n - n + 1 + log\, n$$

$$nlog\, n - n + 1 < log\, n! < nlog\, n - n + 1 + log\, n$$

$$log\, n - 1 + \frac{1}{n} < log\, n!^{\frac{1}{n}} < log\, n - 1 + \frac{1}{n} + \frac{log\, n}{n}$$

$$-1 + \frac{1}{n} < log\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right) < -1 + \frac{1}{n} + \frac{log\, n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-1 + \frac{1}{n}\right) < \lim_{n\to\infty} log\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right) < \lim_{n\to\infty}\left(-1 + \frac{1}{n} + \frac{log\, n}{n}\right)$$

$$-1 < \lim_{n\to\infty} log\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right) < -1 \Longrightarrow log \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = -1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = e^{-1}$$

26. Probar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} log\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 log\, x dx$$

y deducir de este resultado que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$$

límite que fue calculado en el ejercicio anterior.

Prueba

Como la función logarítmica es estríctamente creciente

$$\frac{k}{n} < x \Longrightarrow log\left(\frac{k}{n}\right) < log\, x \Longrightarrow \frac{1}{n} log\left(\frac{k}{n}\right) < \int_{k/n}^{(k+1)/n} log\, x\, dx$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} log\left(\frac{k}{n}\right) < \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} log\, x\, dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} log\, x\, dx \quad (1)$$

análogamente:

$$x < \frac{k+1}{n} \Longrightarrow log\, x < log\left(\frac{k+1}{n}\right) \Longrightarrow \int_{k/n}^{(k+1)/n} log\, x\, dx < \frac{1}{x} log\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Estas últimas desigualdades son válidas para $k = 0$, porque la función logaritmo es integrable en $(0, \frac{1}{n}]$; por lo tanto se deduce

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} log\left(\frac{k+1}{n}\right) > \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} log\, x\, dx = \int_{0^+}^{1} log\, x\, dx \qquad (2)$$

ahora, observando que $log\left(\frac{n}{n}\right) = 0$, se ve que las sumas consideradas en (1) y (2) son idénticas, luego:

$$\int_{0^+}^{1} log\, x\, dx < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} log\left(\frac{k}{n}\right) < \int_{1/n}^{1} dx$$

tendiéndo al límite y como $\frac{1}{n} \to 0$ la integral $\int_{1/n}^{1} log\, x\, dx$ tiene por límite $\int_{0^+}^{1} log\, x\, dx$, y por lo tanto, se tiene lo pedido.

Asumiendo que

$$\int_{0^+}^{1} log\, x\, dx = -1$$

(integración por partes como se verá más adelante), se tiene de inmediato que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} log\left(\frac{k}{n}\right) = -1 \tag{3}$$

y como:

$$u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \Longrightarrow \frac{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}}{n^n} \Longrightarrow log(u_n) =$$

$$\frac{1}{n}\left[log\left(\frac{1}{n}\right) + log\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + log\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow log(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} log\left(\frac{k}{n}\right) = -1 \quad \text{por (3)}$$

se tiene de inmediato que $u_n = e^{-1}$.

27. Sea f una función continua, estrictamente creciente y tal, que $f(0) = 0$. Sea g su función inversa. Mostrar gráficamente que, para todo par de números positivos a y b

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(x)dx \geq ab$$

Demostración.

Sea $a > b$; de la figura $\begin{array}{l} A_1 = \text{Area } OARO \\ A_2 = \text{Area } OBCO = \text{Area } \ OB_1PO \end{array}$

$A_1 + A_2 = ab+$ Area $PQRP$ de donde

$$A_1 + A_2 \geq ab$$

$\displaystyle\int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(x)dx \geq ab$ la igualdad se verifica cuando las curvas se intersectan sobre $y = x = a = b$.

28. Sea f una función monótona y positiva definida en $[a, b], 0 < a < b$. Sea g la inversa de f y tómense $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Por medio de la interpretación de la integral como área, mostrar que:

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(y)dy = b\beta - a\alpha - \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Solución.

De la figura se tiene:

$$A = \int_{a}^{b} f(x)dx \quad \text{y}$$

$$B = \int_{\alpha}^{\beta} g(y)dy$$

y de inmediato por geometría $A + B = b\beta - a\alpha$ de donde se obtiene el resultado.

29. Partiendo del significado geométrico de la integral, demostrar que

$$\int_{0}^{x} \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}Arc\,sen\frac{x}{a},\ 0 < x \leq a$$

Demostración.

La integral $\int_{0}^{x} \sqrt{a^2 - x^2}dx$ expresa el área $OAPX$ de la porción de círculo de radio a que cae en el primer cuadrante, así:

$$Area\ OAPX = Area\ \triangle OPX + Area\ OAP.$$

$$Area\ \triangle OPX = \frac{1}{2}xy = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{1}$$

Area del sector OAP, es:

$$Area\ OAP = \frac{1}{2}\theta r^2 \quad \text{donde}$$

$$sen\theta = \frac{x}{a} \quad \text{y} \quad \theta = Arc\,sen\frac{x}{a},$$

finalmente:

$$\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} Arc\,sen \frac{x}{a}$$

30. Sean $f(x)$ y $g(x)$ integrables en (a,b), demostrar la desigualdad de Schwarz-Bunyakovsky:

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

Demostración.

Sea la función $F(x) = [f(x)+\lambda g(x)]^2$, de donde λ es un número real cualquiera, y se sigue

$$[f(x)+\lambda g(x)]^2 \geq 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 \int_a^2 g^2(x)dx - 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$$

trinomio cuadrático respecto a λ, debido a la condición siempre positiva o cero de la desigualdad inicial, se debe tener

$$\triangle \leq 0 \Longleftrightarrow \left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \leq 0$$

de donde se obtiene lo pedido.

31. Demostrar, mediante un razonamiento geométrico:

a) Si f es creciente y tiene un gráfico cóncavo en $[a,b]$, entonces:

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

b) Si f es creciente y tiene un gráfico convexo en $[a,b]$, entonces:

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} < \int_a^b f(x)dx < (b-a)f(b)$$

Demostración.

a) Sin perder generalidad, supongamos $f(x) > 0$. Por la condición de concavidad la curva está por debajo de la recta que une los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$, por lo tanto:

Area trapezoide $aABb$ es mayor que del trapezoide curvilineo $aABb$, limitado por arriba por el gráfico f, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

y es inmediata la desigualdad

$$\int_a^b f(x)dx > (b-a)f(a)$$

así queda lo pedido.

b) El razonamiento es análogo, queda propuesto.

32. Demostrar las siguientes acotaciones:

a) $0.2 \leq \displaystyle\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{25 - cos^2 x}}dx < 0.21$

b) $0.21 < \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{senx}{x}dx < 0.24$

c) $0.5 \leq \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}}dx \leq 0.6$

Demostración.

a)

$$0 \leq cos^2x \leq 1 \Longleftrightarrow 25-1 \leq 25-cos^2x \leq 25 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{25-cos^2x}} \leq \frac{1}{\sqrt{24}} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{5}\int_3^4 dx \leq \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{25-cos^2x}}dx \leq \frac{1}{\sqrt{24}}\int_3^4 dx$$

$$\Longleftrightarrow 0.2 \ \leq \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{25-cos^2x}}dx \leq 0.2041 \ < 0.21$$

$b)$

$$M = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{sen\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} \cong \ 0.90$$

$$m = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{sen\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2} \cong \ 0.827$$

así entonces, $0.827 \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{senx}{x}dx \leq \ 0.90 \ \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow$

$0.21 \ < \ 0.2165 \ \leq \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{senx}{x}dx \leq 0.2356 \ < \ 0.24$

$c)$ queda propuesto.

33. Demostrar

$$1.01 \ < \int_0^1 \frac{1+x^4}{\sqrt{1+x^2}}dx < \ 1.042$$

Demostración.

Usando $1+x^2 < 1+x^2+\dfrac{x^4}{4} = \left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)^2$ obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{1+x^4}{\sqrt{1+x^2}}dx > \int_0^1 \frac{1+x^4}{1+\dfrac{x^2}{2}}dx = 2\int_0^1 \frac{1+x^4}{2+x^2}dx$$

de donde efectuando la división: $\dfrac{1+x^4}{2+x^2} = x^2-2+\dfrac{5}{x^2+2}$

$$2\int_0^1 x^2dx - 4\int_0^1 dx + 10\int_0^1 \frac{dx}{2+x^2} = \frac{2}{3}-4+\frac{10}{\sqrt{2}}Arc\,tg\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 1.0187$$

luego:

$$\int_0^1 \frac{1+x^4}{\sqrt{1+x^2}}dx > 1.01 \qquad (1)$$

Por otra parte, aplicando la desigualdad de Schwarz, con $f(x) = \dfrac{1+x^4}{\sqrt{1+x^2}}$ y $g(x)=1$, se tiene

$$\left(\int_0^1 \frac{1+x^4}{\sqrt{1+x^2}}dx\right)^2 \leq \int_0^1 \frac{(1+x^4)^2}{1+x^2}dx \int_0^1 dx$$

$$\int_0^1 \frac{1+x^4}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \int_0^1 \frac{1+2x^2+x^8}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^6dx - \int_0^1 x^4dx + 3$$

$$\int_0^1 x^2dx - 3\int_0^1 dx + 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2};\ \int_0^1 \frac{1+x^4}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq$$

$$\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+1-3+4\frac{\pi}{4} \cong 1.0413 \qquad (2)$$

así entonces por (1) y (2):

$$1.01 < \int_0^1 \frac{1+x^4}{\sqrt{1+x^2}}\,dx < 1.042$$

34. Demuestre que:

$$1 < \int_0^{\pi/2} \sqrt{senx}\, dx < \frac{\sqrt{\pi^3}}{3\sqrt{2}}$$

Demostración.

Para $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ se verifica que:

$$0 \leq senx \leq x \Longrightarrow \sqrt{senx} \leq \sqrt{x}$$

$$0 \leq senx \leq 1 \Longrightarrow senx \leq \sqrt{senx}$$

de donde: $senx \leq \sqrt{senx} \leq \sqrt{x}$; como para $x = \dfrac{\pi}{4}$ se cumple la desigualdad estricta $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{\dfrac{1}{2}} < \sqrt{\dfrac{\pi}{4}}$ se tiene

$$\int_0^{\pi/2} senxdx < \int_0^{\pi/2} \sqrt{senx}\, dx < \int_0^{\pi/2} x^{1/2}\, dx$$

aplicando resultados de ejercicios resueltos N^{os} 8 y 9 (I) se tiene lo pedido.

35. Demostrar:

$$\int_0^{\pi/2} e^{-ksenx}\, dx < \frac{\pi}{2k}(1 - e^{-k})\ (k > 0)$$

Demostración.

Como la función $f(x) = \dfrac{senx}{x}$ es decreciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, entonces $f(x) = \dfrac{senx}{x} > f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$, por lo tanto en este intervalo $senx > \dfrac{2}{\pi}x$ luego $e^{-ksenx} < e^{-\frac{2k}{\pi}x}$ y $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-ksenx}\, dx < \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2k}{\pi}x}\, dx$, por ejercicio N° 12 (c) que dice:

$$\int_{pa}^{pb} f\left(\frac{x}{p}\right)\, dx = p\int_a^b f(x)dx \quad \text{resulta :} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2k}{\pi}x} dx = -\frac{\pi}{2k}\int_0^{-k} e^x\, dx$$

y ahora por ejercicio N° 6, se tiene:

$$\int_0^{\pi/2} e^{-ksenx}dx < -\frac{\pi}{2k}(e^{-k}-e^0) = \frac{\pi}{2k}(1-e^{-k})$$

36. Estimar la integral $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}$ usando:

a) El teorema del valor medio.

b) El teorema de acotación.

c) El resultado del ejercicio resuelto N° 31 (a).

d) La desigualdad $\sqrt{1+x^4} < 1 + \dfrac{x^4}{2}$.

e) La desigualdad de Schwarz.

Solución.

a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx = \sqrt{1+\xi^4}; \quad 0 \leq \xi \leq 1$

pero

$$1 < \sqrt{1+\xi^4} < \sqrt{2} \Longleftrightarrow 1 < \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\, dx < \sqrt{2} \cong 1.414$$

b) Como $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ es creciente en $[0,1]; m = f(0) = 1$, $M = f(1) = \sqrt{2}$ que coincide con el resultado dado en (a).

c) Como $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ es cóncava en $[0,1]$, (verifíquelo usted), aplicando el ejercicio N° 30 (a):

$$1 < \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\, dx < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cong 1.207$$

d) De inmediato:

$$1 < \sqrt{1+x^4} < 1 + \frac{x^4}{2} \Longleftrightarrow 1 < \int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx < \int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 dx$$

de donde:

$$1 < \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\, dx < 1 + \frac{1}{10} = 1,1$$

e) Sean $f(x) = \sqrt{1+x^4}$, $g(x) = 1$, y usemos la desigualdad de Schwarz

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx\right)^2 < \int_0^1 (1+x^4)dx \int_0^1 dx \Longleftrightarrow$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx < \sqrt{1.2} \cong 1.095$$

37. Obtener una expresión para $\displaystyle\int_a^b f(Ax+B)$, $A \neq 0$ en términos de una integral de $f(x)$.

Solución.

Usando los resultados del ejercicio resuelto N° 12 (b y c) se tiene, sea $g(x) = f(Ax+B)$,por 12 (c)

$$\int_a^b g(x)dx = \frac{1}{A}\int_{Aa}^{Ab} g\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{1}{A}\int_{Aa}^{Ab} f(x+B),$$

ahora por 12 (b)

$$= \frac{1}{A}\int_{Aa+B}^{Ab+B} f(x+B-B)dx = \frac{1}{A}\int_{Aa+B}^{Ab+B} f(x)dx.$$

38. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx.$

Demostración.

Usando el ejercicio anterior sea $A = b - a$ y $B = a$, tenemos

$$(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx = (b-a)\frac{1}{b-a}\int_{(b-a)\cdot 0+a}^{(b-a)\cdot 1+a} f(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

39. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$; k constante positiva.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}\right\}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(1 + sec^2\dfrac{\pi}{4n} + sec^2\dfrac{2\pi}{4n} + \cdots + sec^2\dfrac{n\pi}{4n}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{n}\left(sen\dfrac{\pi}{n} + sen\dfrac{2\pi}{n} + \cdots + sen\dfrac{(n-1)}{n}\pi\right)$

Solución.

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^k + \left(\frac{2}{n}\right)^k + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^k\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}+\frac{1}{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\dfrac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=log(1+1)-log(1+0)=log\,2$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^2}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx$$

$$=-\left(\frac{1}{1+1}-\frac{1}{1+0}\right)=\frac{1}{2}$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{1+sec^2\frac{\pi}{4n}+sec^2\frac{2\pi}{4n}+\cdots+sec^2\frac{n\pi}{4n}\right\}$$

$$=\frac{4}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4n}\left\{sec^2\frac{\pi}{4n}+sec^2\frac{2\pi}{4n}+\cdots+sec^2\frac{n\pi}{4n}\right\}$$

$$=\frac{4}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}sec^2\,i\frac{\pi}{4n})\frac{\pi}{4n}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}sec^2xdx$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(tg\frac{\pi}{4}-tg0\right)=\frac{4}{\pi}$$

Nota. Hemos ocupado que:

$$\int_a^b sec^2 x dx = tgb - tga$$

e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(sen\frac{\pi}{n} + sen\frac{2\pi}{n} + \cdots + sen\frac{(n-1)}{n}\pi + sen\frac{n\pi}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} sen\frac{i\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n} = \int_0^{\pi} senxdx = 2$$

(resultado del ejercicio resuelto N° 8).

40. Mostrar $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k^2} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

Solución.

De inmediato:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1+k^2}$$

$$< \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad \text{luego}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k^2} < \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty}(Arctgn - Arctg1)$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

41. Demostrar que si un vehículo recorre un camino de 500 km. con velocidad promedio de 50 km/hr. debe haber un tramo de 50 km. , que fue recorrido exactamente en 1 hora.

Demostración.

Por demostrar $\exists t_0$ tal que

$$\int_{t_0}^{t_0+1} v(t)dt = 50$$

Sea

$$f(t) = \int_{t}^{t+1} v(t)dt,$$

se sabe que

$$\int_0^1 v(t)dt + \int_1^2 v(t)dt + \cdots + \int_9^{10} v(t)dt = 500,$$

es decir:

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(9) = 500,$$

casos: a) si todas las integrales valen 50 está listo, b) si no ocurre así, entonces alguna deberá ser mayor que 50 y otra menor que 50, pero como f es continua, porque $v(t)$ lo es, entonces debe tomar en algún punto el valor 50, es decir $\exists t_0$ tal que $f(t_0) = 50$.

42. Un vehículo recorre un camino de 1 Km. en el lapso de 1 hora; suponiendo que parte del reposo y termina en reposo, demostrar que en algún instante la aceleración debe ser mayor o igual que $4km/hr^2$.

Demostración.

Supongamos lo contrario $|a| < 4 \Longleftrightarrow -4 < a < 4$. Como $a < 4$ se tiene:

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt < \int_0^t 4dt < 4t$$

y también $a > -4$ se tiene $v(1) - v(t) = \int_t^1 a(t)dt \Longleftrightarrow -v(t) = \int_t^1 a(t)dt > \int_t^1 (-4)dt = -4 + 4t$ luego $v(t) < 4 - 4t$.

Por lo tanto,

$$1 = S(1) - S(0) = \int_0^1 v(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} v(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 v(t)dt < \int_0^{\frac{1}{2}} 4tdt$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 (4-4t)dt = 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 0\right) + 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 4 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 1$$

contradicción, ya que el desplazamiento no puede ser tan grande como 1, luego $|a| \geq 4km/hr^2$.

43. Demostrar que el valor medio de la función $f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$, es el límite de la media artimética de los valores de esta función tomada sobre intervalos iguales del argumento x.

Demostración.

Subdividamos el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales mediante los puntos $x_i = a + \dfrac{b-a}{n} i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ ahora formando la media aritmética de los valores de la función $f(x)$ en los $x_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$.

$$\bar{y} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

de donde:

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \triangle x_1,$$

donde $\triangle x_i = \dfrac{b-a}{n}$, y por lo tanto, tomando el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{y} = \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \triangle x_i = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

como se pedía.

44. Encontrar:

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}}$$

Solución.

Sea $a_n = \frac{1}{n}[(n{+}1)(n{+}2)\cdots(n{+}n)]^{\frac{1}{n}} \iff a_n = \left[\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}\right]^{\frac{1}{n}}$

$$log(a_n) = \frac{1}{n}log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$log(a_n) = \sum_{k=1}^{n} log\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} log(a_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} log\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$= log\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = \int_0^1 log(1+x)dx$, calculando por definición resulta

$$log\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = 2log\,2 - 1 = log\left(\frac{4}{e}\right) \iff \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{e}$$

así el resultado final es $e^{4/e}$.

Mas adelante, por el método por partes esta integral es inmediata.

45. Sea $A_a^b(f)$ el valor medio de f en $[a,b]$ dado por

$$A_a^b(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Si $a < c < b$, demostrar que existe un número t que satisface $0 < t < 1$ tal que

$$A_a^b(f) = t\,A_a^c(f) + (1-t)\,A_c^b(f)$$

Así pues $A_a^b(f)$ es una media aritmética ponderada de $A_a^c(f)$ y $A_c^b(f)$.

Demostración.

Sea $a < c < b$, se tiene entonces en $[a, c]$,

$$A_a^c(f)(c-a) = \int_a^c f(x)dx \qquad (1),$$

análogamente en $[c, b]$,

$$A_c^b(f)(b-c) = \int_c^b f(x)dx \qquad (2)$$

sumando (1) y (2).

$$(c-a)A_a^c(f) + (b-c)A_c^b(f) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$(c-a)A_a^c(f) + (b-c)A_c^b(f) = (b-a)A_a^b(f) \quad \text{de donde}$$

$$A_a^b(f) = \frac{c-a}{b-a}A_a^c(f) + \frac{b-c}{b-a}A_c^b(f) = \frac{c-a}{b-a}A_a^c(f) + \left(1 - \frac{c-a}{b-a}\right)A_c^b(f)$$

sea $t = \dfrac{c-a}{b-a}$ como $c > a \wedge b > a \Longrightarrow t > 0$, además $b > c \Longleftrightarrow$

$b - a > c - a \Longleftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a} < 1 \Longleftrightarrow t < 1$ así pues $0 < t < 1$ con lo que

$$A_a^b(f) = t\,A_a^c(f) + (1-t)A_c^b(f),\ \forall\, 0 < t < 1$$

46. Calcular el valor medio de la función f en el intervalo correspondiente.

a) $f(x) = x^2$ en $[a, b]$ b) $f(x) = sen 2x$ en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Solución.

a) $A_a^b(f) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b x^2dx = \dfrac{1}{b-a}\dfrac{1}{3}(b^3 - a^3) = \dfrac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$

b) $A_0^{\frac{\pi}{2}}(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} sen 2x dx$, aplicando la propiedad dada en ejercicio 12 c) resulta:

$$A_0^{\frac{\pi}{2}}(f) = \frac{2}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi/4} sent\, dt = \frac{2}{\pi}$$

47. Hallar la ordenada media de la sinusoide $y = senx$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución.

De inmediato

$$\bar{y} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} senx\, dx = \frac{2}{\pi}$$

5.9. Problemas Propuestos

1. Partiendo de la definición, calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{x} dx$ b) $\displaystyle\int_a^b cosx\, dx$

c) $\displaystyle\int^1 a^x\, dx \quad (a > 0)$ d) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2} dx$

donde: $0 < a < b$ para a), b) y d)

Indicación, para:

a) Hacer $\xi_i = aq_i (i = 0, 1, \cdots, n-1)$, $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$

b) Hacer $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}} (i = 0, 1, \cdots, n-1)$

Respuesta.

a) $\frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$ b) $senb - sena$

c $\frac{a-1}{log(a)}$ d) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

2. Calcular la integral $\int_1^4 x^3 dx$ por la definición, subdividiendo el intervalo $[1, 4]$:

   a) en partes iguales

   b) en puntos que formen una progresión geométrica. En ambos casos elegir ξ_i como:

      1) extremos derechos de los subintervalos

      2) extremos izquierdos y

      3) puntos medios de los subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$.

   Respuesta.

   $\dfrac{255}{4}$

3. Partiendo del significado geométrico de la integral definida demostrar que,

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi} sen2x\, dx = 0$ b) $\displaystyle\int_1^2 (2x+1)dx = 6$

   c) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}dx = \frac{9\pi}{2}$

4. Si $f(x) = x + 3$ sobre $[0, 5]$ y $P_1 = \{0, 2, 4, 5\}$; $P_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

   Hallar: $\underline{S_3}, \overline{S_3}, \underline{S_5}$ y $\overline{S_5}$

5. Partiendo de la definición de integral, hallar

   $$\int_0^T (v_0 + gt)dt$$

   dando v_0 y g son constantes.

   Respuesta.

   $v_0T + \dfrac{1}{2}gT^2$

6. Comprobar que la función

$$d(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], \text{ si } \quad x \neq 0$$

y $f(0) = 0$, es integrable en el intervalo $[0, 1]$.

7. Sea $f(x)$ una función integrable en $[a, b]$ y $c \leq f(x) \leq d$, para $a \leq x \leq b$, y sea $g(x)$ una función definida y continua en el intervalo $[c, d]$. Demostrar que la función $f\, o\, g$ es integrable en $[a, b]$.

8. Demostrar que aunque $f(x)$ no sea continua en $[a, b]$ su integral indefinida siempre lo es. (Recordar que f es acotada).

9. Estimar los integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{3 + x^3}dx$ b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2}dx$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \frac{1}{2}cosx}$ d) $\displaystyle\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x + 100}dx$

Respuesta.

a) $2 \leq I \leq \sqrt{11}$ b) $3 < I < 5$

c) $\dfrac{8\pi}{3} \pm \dfrac{4\pi}{3}\theta\, (|\theta| < 1)$ d) 0.01 - 0.005 $\theta\, (0 < \theta < 1)$

10. Determinar, (sin calcularlas) cuál de las siguientes integrales es mayor.

a) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ ó $\int_0^1 x\,dx$

b) $\int_0^1 x^2 senx\,dx$ ó $\int_0^1 x\,senx\,dx$

c) $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ ó $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

d) $\int_0^{\pi} e^{-x^2}cos^2x\,dx$ ó $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}cos^2x\,dx$

e) $\int_0^1 \sqrt{x}dx$ ó $\int_0^1 x^3\,dx$

Respuesta.

a) la primera
b) la segunda
c) la segunda
d) la primera
e) la primera.

11. Demostrar que:

a) $0 < \int_0^1 \frac{x^7 dx}{\sqrt[3]{1+x^8}} < \frac{1}{8}$

b) $1 < \int_0^1 e^{x^2}dx < e$

c) $\frac{\pi}{2} < \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}sen^2x dx} < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

d) $\frac{2\pi}{13} < \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3cosx} < \frac{2\pi}{7}$

e) $\int_0^4 \sqrt{1+x^3} < \frac{\sqrt{5}}{2}$

$f)$ $\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \displaystyle\int_0^2 e^{x^2-x}dx \leq 2e^2$

$g)$ $0.692 \leq \displaystyle\int_0^1 x^x \leq 1$

12. Demostrar, usando la desigualdad $senx \geq x - \dfrac{x^3}{6}$ $(x \geq 0)$ y la desigualdad de Schwarz, que:

$$1.096 \ < \int_0^{\pi/2} \sqrt{xsenx}dx < \ 1.111$$

13. Hallar el valor medio de la velocidad de la caída libre de un cuerpo cuya velocidad inicial es igual v_0.

Respuesta.

$\dfrac{1}{2}(v_0 + v_1)$ donde v_1 es la velocidad final.

14. Si $f(x)$ es periódica cn período T, demostrar que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx$$

donde n es entero.

15. Demostrar (sin calcular las integrales) que:

$a)$ $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} cosxlog\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx = 0$

$b)$ $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} e^{cosx}dx = 2\int_0^{1/2} e^{cosx}dx$

$c)$ $\displaystyle\int_{-a}^{a} senx\, f(cosx)dx = 0$

16. Demostrar, con ayuda de $x \geq senx \geq \dfrac{2}{\pi}x,\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, que

$$1 < \int_0^{\pi/2} \frac{senx}{x} dx < \frac{\pi}{2}$$

17. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ (2-x)^2 & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Probar que la función

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

es continua en $[0, 3]$.

18. ¿Se puede afirmar que si existe $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ entonces existe $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$?

Respuesta.

No (estudie un ejemplo).

19. Calcular los límites de las siguientes sumas:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1^2}{n^3+1^3} + \frac{2^2}{n^3+2^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n^3} \right]$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + cos\dfrac{\pi}{2n} + cos\dfrac{\pi}{n} + \cdots + cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n}\right)$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\dfrac{n}{n+3(k-1)}}$

Respuesta.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{\pi}{4}$ c) $\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ d) $\dfrac{1}{3}L(2)$

e) $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ f) $\dfrac{3}{4}$ g) $\dfrac{2}{\pi}$ h $\dfrac{\pi}{6}$

i) 2

20. Demostrar que las siguientes integrales están acotadas como se indica

a) $\dfrac{2}{3} < \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) $2^{-q} < \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{(x^p+1)^q} \leq 1$ (p y q enteros positivos)

c) $\displaystyle\int_{1/3}^{2/3} \dfrac{1}{\sqrt{2-3x^2+x^4}}dx < \dfrac{3}{2}$

Indicación: verifique que $3x^2 < 2$ en $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right]$

21. Demostrar que si f es continua y monótona la integral $\displaystyle\int_{k-a}^{k+a} f(x^2 - 2kx + q)dx$ está comprendida entre $2af(q-k^2)$ y $2af(a^2+q-k^2)$. En particular

demostrar que $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{(x^2-4x+6)^r}$ está entre $2\cdot 4^{-r}$ y $2\cdot 3^{-r}$.

22. Si f es periódica con período P, demostrar que

   a) $\displaystyle\int_a^{a+P} f(x)dx = \int_0^P f(x)dx$

   b) $\displaystyle\int_a^{a+nP} f(x)dx = \int_a^{nP} f(x)dx = n\int_0^P f(x)dx,\ n\in\mathbb{N}$

23. Sea f una función tal que $|f(u)-f(v)|\le |u-v|$ para todos los valores de u y v de un intervalo $[a,b]$.

   a) Probar que f es continua en cada punto de $[a,b]$

   b) Suponiendo que f sea integrable en $[a,b]$, demostrar que:

   $$\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(a)\right|\le \frac{(b-a)^2}{2}$$

   c) Mas general. Demostrar que para cualquier ξ de $[a,b]$, se tiene:

   $$\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(\xi)\right|\le \frac{(b-a)^2}{2}$$

24. Teniendo en cuenta que $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ demostrar

   $$\frac{11}{24}\le \int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,dx\le \frac{11}{24}\sqrt{\frac{4}{3}}$$

25. Utilizar la identidad $1+x^6=(1+x^2)(1-x^2+x^4)$ para demostrar que para $a>0$, tenemos

   $$\frac{1}{1+a^6}\left(a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}\right)\le \int_0^a \frac{dx}{1+x^2}\le a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}$$

26. Sea f continua en $[a,b]$. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=0$, demostrar que $f(c)=0$ por lo menos para un c de $[a,b]$.

27. Supóngase que f es integrable y no negativa en $[a,b]$. Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ demostrar que $f(x) = 0$ en cada punto de continuidad de f (Indicación: Si $f(c) > 0$ en un punto de continuidad c, existe un entorno de c en el cual $f(x) = \frac{1}{2}f(c)$).

28. Supóngase que f es continua en $[a,b]$ y que $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ para toda función g que sea continua en $[a,b]$. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo x en $[a,b]$.

29. Sea $A_a^b(f)$ el valor medio de f en $[a,b]$ (ver ejercicio 43). Demostrar que tiene las propiedades siguientes:

    $A_a^b(f+g) = A_a^b(f) + A_a^b(g)$

    $A_a^b(cf) = c\ A_a^b(f)$, c un número real cualquiera.

    $A_a^b(f) \leq A_a^b(g)$ si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x$ en $[a,b]$

30. Calcular el promedio $A(f)$ para la función dada f en el intervalo correspondiente:

    a) $f(x) = x^2 + x^3$ en $[0,1]$

    b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ en $[1,8]$

    c) $f(x) = cosx$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

    d) $f(x) = senx\, cosx$ en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

    Respuesta.

    a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{45}{28}$ c) $\frac{2}{\pi}$ d) $\frac{1}{\pi}$

31. Hallar la longitud media de todas las ordenadas positivas de círculo $x^2+y^2 = 1$.

    Respuesta.

    $\frac{\pi}{4}$

32. Dado en $\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$, hacer uso de las propiedades de la integral para calcular las siguientes en función de π.

    a) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$

    b) $\int_{0}^{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2dx}$

    c) $\int_{-2}^{2}(x-3)\sqrt{4-x^2}dx$

    Respuesta.

    a) $\frac{9\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) -6π

33. Demostrar que la función $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ donde $f(t)$ es una función periódica continua de período p, en el caso general, es una suma de una función lineal y una función periódica de período p.

34. Demostrar que

    a) $(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

    b) $\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2dx = \frac{16}{15}$

    Indicación: Use el teorema del binomio.

35. Si f es acotada sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$ sii, $\forall \xi > 0$ existe una partición p de $[a, b]$, tal que:

$$|\overline{S}(f, p) - \underline{S}(f, p)| < \xi$$

36. Hallar dos funciones integrales f y g tal que $g\,o\,f$ no lo sea.

37. Hallar el límite de la sucesión

$$a_n = \int_n^{3n} \frac{1}{2n} \frac{sen\, 2x}{x+1} dx$$

Respuesta.

0

38. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \leq x < c \\ k & \text{si} \quad x = c \\ 1 & \text{si} \quad c < x \leq b \end{cases}$$

Probar que f es integrable y que $\int_a^b f(x)dx = b - c$, independiente del valor de k.

39. Dé un ejemplo de dos funciones cuya suma sea integrable y que nínguna de las dos sea integrable.

40. Sea p un entero positivo. Probar que la función $f(x) = \{log(x)\}^p$ es integrable en el intervalo $(0, 1]$ y calcular

$$\int_0^1 \{log(x)\}^p dx$$

41. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$$

Respuesta.

$e^{2log2-1}$

42. Calcúlese $\displaystyle\int_0^{\pi/2} senx\, dx$ y $\displaystyle\int_0^{\pi/2} cosx\ dx$. Explíquese en términos geométricos la razón por la que tienen que ser iguales. Además, explíquese la razón por la que

$$\int_a^{a+2\pi} senx\, dx = \int_b^{b+2\pi} cosx\ dx$$

para todos los valores de a y b.

43. Demostrar $log\left(\dfrac{b}{a}\right) \leq \sqrt{\dfrac{b-a}{a}} \quad (a \leq b)$

Indicación: Aplicar la desigualdad de Schwarz a:

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx$$

44. Demuéstrese que para todo entero $n \geq 2$, se cumple

$$n + log\left(\frac{n+2}{3}\right) < \sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}$$

45. Sean $f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a,b]$, demostrar que si se tiene $f(x) \geq g(x)$ y si la desigualdad estricta $f(\xi) > g(\xi)$ se cumple por lo menos para un punto del intervalo, entonces la desigualdad estricta se cumple para las integrales

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$$

46. Calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[(na+1)(na+2)\cdots(na+n)]^{\frac{1}{n}}$$

Respuesta.

$\dfrac{1}{ea^a}(a+1)^{a+1}$