Capítulo 4

Límites de funciones y continuidad

4.1. Definición

Sea f definida en un entorno reducido de $x_0(0 < |x - x_0| < \delta)$, pero no necesariamente en el mismo punto x_0. Diremos que f tiene el límite "L" en x_0 cuando para toda sucesión $x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots$ (pertenecientes al $Domf$, distintos de x_0), es válido que, si la sucesión converge a x_0, la sucesión correspondiente $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$ converge a "L" cuando $n \to \infty$, este hecho denotaremos por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Si nos limitamos a considerar las sucesiones que convergen a x_0 por la derecha $(x > x_0)$, pondremos $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$, de forma análoga por la izquierda $(x < x_0)$, denotaremos $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$.
Evidentemente si f tiene límite en $x = x_0, L_1 = L_2 = L$. La definición anterior dada, es equivalente a la siguiente definición:

Definición

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0;\ \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

análogamente definimos:

a) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L_1 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0;\ \forall x, 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$

b) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L_2 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0;\ \forall x, 0 < x_0 - x\delta \Longrightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$

c) Si $x_0 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow, \forall\varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0;\ \forall x, x > M(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ en forma similar para $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Observación.

Evidentemente $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow L_1 = L_2 = L$.

4.2. Teoremas Básicos

Es facil verificar los teoremas básicos antes mencionados para las sucesiones convergentes, dan lugar a los correspondientes teoremas básicos para límites de funciones.

Supongamos: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_2$; entonces se verifican

i) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_1 L_2$

iii) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}, \quad (L_2 \neq 0)$

De aquí se sigue que una serie de operaciones matemáticas elementales verificadas con funciones todas las cuales tienen límite en x_0, originará una nueva función que también tendrá un límite en x_0, el que se obtiene verificando las mismas operaciones con los correspondientes de las funciones dadas (siempre que no aparezca el cero en el denominador).

Notas

1. Para todas las funciones elementales en cualquier punto de su dominio, se cumple
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0)$$
2. Son de uso frecuente los límites siguientes:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{senx}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e;$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{log(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = log(a), \qquad (a>0)$$
3. Nótese que la idea de límite descarta lo que sucede en "x_0" se interesa únicamente lo que ucede en los entornos de x_0.

4.3. Continuidad

Sea f definida en algún entorno del punto x_0. Diremos que f es continua en x_0, si tiene límite en x_0 y este límite es igual a $f(x_0)$, es decir:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$
De manera análoga decimos que la función es continua a la derecha (izquierda) en x_0, cuando $f(x)\to f(x_0)$ cuando $x\to x_0^+$ $(x\to x_0^-)$. Las reglas básicas para límites dados anteriormente muestran en forma inmediata que cualquier serie de operaciones matemáticas elementales permisibles llevadas a cabo con funciones que sean continuas en x_0, lleva a otra función que también es continua en x_0.

El que una función sea continua en un intervalo completo significa simplemente que es continua en todos los puntos de dicho intervalo, en forma **gráfica** no tiene "saltos.^{en} el intervalo.

4.4. Notas

1. La afirmación (1) es equivalente a:
$$\lim_{\triangle x\to x_0} [f(x_0+\triangle x) - f(x_0)] = 0$$

2. Evidentemente, la afirmación (1) también es equivalente a
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0;\ \forall\, x : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
3. Las funciones que no cumplen con (1), se llaman **discontinuas** en x_0 y se tienen: dos tipos de discontinuidades que llamaremos **evitables** y **no evitables**.
   i) Sea $x_0 \in Dom f$, se llama discontinuidad de **primera especie, evitable**
   $$sii \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$
   y se llama discontinuidad de **primera especie, no evitable**
   $$sii \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$
   ii) Si al menos uno de los límites: $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ó $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, no existe o es infinito, entonces se dice que el punto x_0 es una **discontinuidad** de **segunda especie**. (evidéntemente no evitable)
4. Si la función $u = g(x)$ es continua en x_0 y la función $y = f(u)$ es continua en $u_0 = g(x_0)$, entonces la función $y = f(g(x))$ es continua en x_0.

4.5. Propiedades de una función continua en $[a, b]$

1. Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$, entonces posee las siguientes propiedades:
   i) $f(x)$ está acotada en $[a, b]$
   ii) $f(x)$ tiene los valores máximo y mínimo en $[a, b]$
   iii) (**Valor intermedio**) Si $m =$ mín. de $f(x)$ y $M =$ máx. de $f(x)$; $\forall x \in [a, b]$ entonces $\forall\, \varepsilon$, que satisfaga:
   $$m \leq \varepsilon \leq M,\ \exists x_0 \in [a, b] \quad \text{tal que:} \quad f(x_0) = \varepsilon$$
   En particular si $f(a) \cdot f(b) < 0 \Longrightarrow \exists x_0 \in (a, b)$ tal que: $f(x_0) = 0$.
2. Si la función $f(x)$ esta definida y es continua y estríctamente monótona en un intervalo, entonces **existe** una función inversa $x = g(y)$ definida, continua y también estríctamente monótona en el campo de la función $y = f(x)$.

4.6. Funciones Infinitesimales e Infinitas

Definición

Diremos que la función $\o(x)$ es **infinitesimal** cuando $x \to x_0$ ó $x \to \infty$ sii

$$\lim_{x \to x_0} \o(x) = 0 \text{ ó } \lim_{x \to \infty} \o(x) = 0$$

y se dice que es infinita sii:

$$\lim_{x \to x_0} \o(x) = \infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to \infty} \o(x) = \infty$$

Las funciones infinitesimales poseen las propiedades siguientes:

1. La suma y el producto de cualquier número finito de funciones infinitesimales cuando $x \to x_0$ son también infinitesimales.

2. El producto de una función infinitesimal por una función acotada es una función infinitesimal.

4.7. Comparación de Infinitesimales

Sean las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ infinitesimales cuando $x \to x_0$ y si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$, donde c es finito distinto de cero, entonces, las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se llaman inifinitesimales del **mismo orden**.

Si $c = 1$, entonces $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se llaman **equivalentes** y se denotan: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Si $c = 0$, entonces se dice que la función $\alpha(x)$ es infinitesimal de orden superior respecto de $\beta(x)$, y se denota por $\alpha(x) = o(\beta(x))$, ($\beta(x)$ es infinitesimal de orden inferior respecto de $\alpha(x)$).

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = c;\ 0 < |c| < +\infty$ entonces se dice que la función $\alpha(x)$ es infinitesimal de n-ésimo orden respecto de $\beta(x)$.

De manera análoga se introduce el concepto de funciones infinitas de diversos ordenes.

4.8. Aplicación para calcular límites

Si $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son infinitesimales cuando $x \to x_0$ y si $\alpha(x) \sim \gamma(x)$, $\beta(x) \sim \delta(x)$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)}$$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k;\ 0 < |k| < \infty$ entonces $f(x)\alpha(x) \sim k\alpha(x)$.

Si $\alpha(x) \sim \gamma(x) \wedge \beta(x) \sim \gamma(x)$ entonces $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Nota.

Para que dos funciones infinitesimales sean equivalentes es necesario y suficiente que su diferencia sea un infinitesimal de orden superior respecto de cada una de las dos.

4.9. Funciones Infinitesimales comunes

Sea $\alpha(x)$ infinitesimal cuando $x \to 0$

1. $sen\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$

2. $tg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$

3. $1 - cos\alpha(x) \sim \dfrac{1}{2}(\alpha(x))^2$

4. $Arc\,sen\alpha(x) \sim \alpha(x)$

5. $Arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$

6. $log[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x)$

7. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)log(a)$ $(a > 0)$ en particular $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$

8. $[1 + \alpha(x)]^p - 1 \sim p\alpha(x)$, en particular, $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{1}{n}\alpha(x)$

4.10. Asíntotas

Una recta recibe el nombre de asíntota de la función $y = f(x)$ si la distancia desde el punto variable M de $f(x)$ a la recta tiende a cero cuando el punto M tiende hacia infinito a lo largo de la curva.

Distinguiremos 3 clases de asíntotas: **verticales, horizontales y oblicuas**.

Asíntotas Verticales

$x = x_0$ es una asíntota vertical si al menos uno de los límites de $f(x)$:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Asíntotas Horizontales

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A$, entonces la recta $y = A$ es una asíntota horizontal.

Asíntotas Oblicuas

Si los límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m_1, \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - m_1x] = n_1,$$

existen, entonces la recta $y = m_1x + n_1$ es una asíntota oblicua (a la derecha) y si:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m_2, \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - m_2x] = n_2$$

existen, entonces la recta $y = m_2x + n_2$ es una asíntota oblicua (a la izquierda).

OBSERVACION

Para $m_1 = m_2 = 0$, se tiene una asíntota horizontal.

4.11. Gráfico de curvas

Hasta aquí podemos enriquecer un poco más el trazado del gráfico de una función $f(x)$ visto en el párrafo 2., es decir, podemos seguir la pauta: Dominio, raíces y signos, simetrías periodicidad y acotamiento, **Asíntotas** (que no son otra cosa que el comportamiento de $f(x)$: en las fronteras de su dominio y para valores extremos de x).

Como lo dicho anteriormente estos puntos no agotan el análisis para la Gráfica de $f(x)$, como se verá más adelante.

4.12. Ejercicios Resueltos

1. Comprobar, usando directamente la definición, que las

   a) $f(x) = mx + n$

   b) $f(x) = x^2$

   c) $f(x) = x^n$

   d) $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$; $(a_n \neq 0)$,

   son continuas en $\mathbb{R}$

   Solución.

   a) $\forall \varepsilon > 0$, $|f(x) - f(x_0)| = |mx + n - mx_0 - n| = |m||x - x_0| < \varepsilon$ de donde: $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{|m|}$, así $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|m|}$, $m \neq 0$

   En caso $m = 0$, cualquier número positivo sirve para δ, pero esto se puede incluir tomando a, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + |m|}$ que es menor que $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|m|}$, por lo tanto: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + |m|}$; $\forall x$, $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

   b) Consideremos los x tales que $|x - x_0| < 1 \Longrightarrow -1 < x - x_0 < 1 \Longrightarrow x_0 - 1 < x < x_0 + 1 \Longrightarrow 2x_0 - 1 < x + x_0 < 2x_0 + 1$, sea $M = \max\{|2x_0 - 1|, |2x_0 + 1|\}$ entonces $|x + x_0| < M$, ahora como $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\ |x + x_0|$ bastará que $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ y que $|x - x_0| < \varepsilon$ así: $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\forall \varepsilon > 0$, siendo

$$\delta = \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{M}\right);\ \forall x, |x - x_0| \Longleftrightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

c) De inmediato se tiene:

$$|x^n - x_0^n| = |x_{-}x_0|\ |x^{n-1} + x_0x^{n-2} + x_0^2x^{n-3} + \cdots + x_0^{n-1}|$$

luego si $|x - x_0| < \delta$

$|x - x_0|\ |x^{n-1} + x_0x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-1}| < \delta|x^{n-1} + x_0x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-1}|$

$< \delta\{|x|^{n-1} + |x_0||x^{n-2}| + |x_0^2||x^{n-3}| + \cdots + |x_0^{n-1}|\}$

tomando $\delta < 1$ de manera que $|x| < |x_0| < |x_0| + 1$

$< \delta\{|x_0|^{n-1} - |x_0|^{n-1} + |x_0|^{n-1} + \cdots + |x_0|^{n-1}\}$

$< \delta\{(|x_0| + 1)^{n-1} + (|x_0| + 1)^{n-1} + \cdots + (|x_0| + 1)^{n-1}\}$

$< \delta n(|x_0| + 1)^{n-1}.$

Por lo tanto, bastará que: $\delta n(|x_0| + 1)^{n-1} < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \delta < \dfrac{\varepsilon}{n(|x_0| + 1)^{n-1}}$ luego es suficiente escoger $\delta = \dfrac{\varepsilon}{n(|x_0| + 1)^{n-1}}$ ó $\delta < 1$.

d) De inmediato

$|f(x) - f(x_0)| = |a_n(x^n - x_0^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_0^{n-1}) + \cdots\cdots$

$+a_0(x^0 - x_0^0)| \leq |a_n|\,|x^n - x_0^n| + \cdots + |a_1|\,|x - x_0|$

de donde podemos concluir (por c), que:

$$|f(x) - f(x_0)| < M\delta\{n(|x_0| + 1)^{n-1} + (n - 1)(|x_0| + 1)^{n-2} + \cdots\}$$

donde M es el mayor de los $|a_i|; i = 0, 1, \cdots, n.$

En consecuencia $|f(x) - f(x_0)| < M\delta\{n(|x_0| + 1)^{n-1} + n(|x_0| + 1)^{n-1} + \cdots\}$ luego es suficiente escoger $\delta < \dfrac{\varepsilon}{Mn^2(|x_0| + 1)^{n-1}}$ ó $\delta < 1$ según lo que sea menor.

2. Pruebe que:

   a) $f(x) = 4x + 2$ es continua en $x_0 = 1$

   b) $f(x) = x^2 - x - 12$ es continua en $x_0 = 5$

   Solución.

   En una aplicación inmediata del problema anterior, es decir para:

   a) Tómese, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+4} = \dfrac{\varepsilon}{5}, \varepsilon > 0$ nótese que también sirve $\dfrac{\varepsilon}{4}$.

   b) Tómese, $\delta = \text{mín}\left(1, \dfrac{\varepsilon}{10}\right), \forall \varepsilon > 0$ luego si,

   $|x - 5| < \delta \Longrightarrow |x - 5| < \dfrac{\varepsilon}{10}$ y

   $|x - 5| < 1 \Longleftrightarrow -4 < x < 6 \Longleftrightarrow$ o $< x + 4 < 10 \Longleftrightarrow |x + 4| < 10$

   por tanto: $|x - 5||x + 4| < \frac{\varepsilon}{10} \cdot 10 = \varepsilon \Longleftrightarrow |x^2 - x - 20| < \varepsilon$

   $\Longleftrightarrow |(x^2 - x - 12) - 8| < \varepsilon \Longleftrightarrow |f(x) - f(5)| < \varepsilon.$

3. Pruebe que $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ es continua en $x_0 = 3$.

   Solución.

   Como

   $$\left|\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} - \frac{6}{5}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow |x - 3| < 20\varepsilon \quad \text{si} \quad |x + 2| > 4$$

   $\forall \varepsilon > 0$, elegimos $\delta = \text{mín}\ (1, 20\varepsilon)$. Así, si $|x - 3| < \delta$

   $$\Longrightarrow |x - 3| < 20\varepsilon \quad \text{y} \quad |x - 3| < 1 \Longleftrightarrow \frac{|x - 3|}{20} < \varepsilon \quad \text{y}$$

   $$3 - 1 < x < 3 + 1 \Longleftrightarrow \frac{|x - 3|}{5 \cdot 4} < \varepsilon \quad \text{y} \quad 4 < x + 2 < 6 \Longleftrightarrow \frac{|x - 3|}{5 \cdot 4} < \varepsilon$$

$$\text{y} \quad |x+2| > 4 \Longleftrightarrow \frac{|x-3|}{5|x+2|} < \varepsilon \Longleftrightarrow \left| \frac{5x+15-6x-12}{5(x+2)} \right| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \left| \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{6}{5} \right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left| \frac{x^2+x-6}{x^2-4} - \frac{6}{5} \right| < \varepsilon$$

4. Demuestre que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en todo intervalo de la forma $[n, \infty]$, con $n \in Z$, $n \geq 1$.

   Solución.

   $\forall \varepsilon > 0$, se desea hallar δ de tal modo que: $\forall\, x_1, x_2 \geq n$

   $|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |x_1 - x_2| < f \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = \left| \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} \right| = \dfrac{|x_1 - x_2|}{|x_1 x_2|} <$ ε en efecto para $x_1 \geq n$ y

   $x_2 \geq n$, $\dfrac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} \leq \dfrac{|x_1 - x_2|}{n^2}$ es suficiente escoger $\delta = n^2 \varepsilon$ luego $\forall \varepsilon >$ 0, $\delta = n^2 \varepsilon$se tiene $|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = \dfrac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} \geq$ $\dfrac{|x_1 - x_2|}{n^2} < \dfrac{n^2 \varepsilon}{n^2} = \varepsilon$.

5. Demostrar que si $f(x) = \dfrac{senx}{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}$. Para algún x entre 0 y π.

   Solución.

   Como $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi} > \dfrac{1}{2}$ y $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{5\pi} < \dfrac{1}{2}$ por el teorema del valor intermedio y como $f(x)$ es continua en $(0, \pi)$ y más aún en $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$ entonces $f(x_0) = \dfrac{1}{2}$ para algún $x_0 \varepsilon \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

6. Si $f(x)$ es continua en $x = x_0$ y si $f(x_0) > 0$ demuéstrese que el dominio de f contiene un intervalo abierto en torno a x_0 tal que $f(x) > 0$.

   Solución.

$\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$ existe δ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ siempre que $|x - x_0| < \delta$. Por lo tanto, en un entorno δ de x_0, $-\dfrac{1}{2}f(x_0) < f(x) - f(x_0) \Longrightarrow f(x) > \dfrac{1}{2}f(x_0) > 0$.

7. Demuéstrese que si $f(x)$ es monótona en $[a, b]$ y satisface la propiedad del valor intermedio, entonces $f(x)$ es continua.

Solución.

Supongamos que f no es continua en x_0, entonces para algún $\varepsilon > 0$ y $\forall \delta > 0, \exists x : |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$ y $|x - x_0| < \delta$. De aquí se desprende que todo entorno de x_0 contiene una infinidad de estos valores, en particular para los intervalos $(x_0 - a,\, x_0)$ ó $(x_0, x_0 + a)$. Todo intervalo de por lo menos uno de los dos conjuntos contiene esos valores de x. Supongamos $f(x)$ creciente y que todo intervalo $(x_0, x_0 + a)$ contiene un punto x_i tal que $|f(x_i) - f(x_0)| > \varepsilon$, entonces $f(x_0 + a) \geq f(x_i) > f(x_0) + \varepsilon > f(x_0)$. El valor $f(x_0) + \varepsilon$ no puede ser tomado, lo que contradice la suposición de la propiedad del valor intermedio. Luego f es continua.

8. *a*) Demuestre que x^n es monótona $\forall x > 0$. Por lo tanto, pruebe para $a > 0$ que $x^n = a$ tiene una solución positiva única: $\sqrt[n]{a}$

   b) Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$; $a_n \neq 0$. Demuéstrese que:

   i) Si n es impar, entonces $f(x)$ tiene por lo menos una raíz real;

   ii) Si a_n y a_0 son de signos opuestos, entonces $f(x)$ tiene por lo menos una raíz positiva, si n es par $(n \neq 0)$, entonces $f(x)$ tiene también una raíz negativa.

Solución.

a) Si $x_1 > x_2 > 0 \Longrightarrow x_1^2 > x_2^2 > 0$ y al multiplicar repetídamente, se tiene $x_1^n > x_2^n > 0$.

Si $0 < a \leq 1$, entonces a es valor intermedio entre 0 y 1^n.

Si $a \geq 1$, entonces a es valor intermedio entre 1 y a^n. En ambos casos queda asegurada la existencia de una raíz positiva, puesto que x^n es monótona, no puede haber dos raíces positivas distintas.

b) i) Si n es impar, podemos poner

$$f(x) = a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-2}x^{2n-2} + a_{2n-3}x^{2n-3} + \cdots$$

$$f(x) = a_{2n-1}x^{2n-1}\left[1 + \frac{a_{2n-2}}{xa_{2n-1}} + \frac{a_{2n-3}}{x^2a_{2n-1}} + \cdots\right]$$

Si $|x| > nk + 1$, donde k es el mayor de los números $\left|\dfrac{a_i}{a_{2n-1}}\right|$, $i = 0, 1, \cdots, 2n-2$, entonces: $\left|\dfrac{a_{2n-2}}{xa_{2n-1}} + \dfrac{a_{2n-3}}{x^2a_{2n-1}} + \cdots\right| < 1 \Longrightarrow f(x)$ tiene el mismo signo que $a_{2n-1}x^{2n-1}$. De esta manera para x positivos y negativos grandes $f(x)$ cambia de signo, luego el teorema del valor intermedio, $f(c) = 0$, $c \in \mathbb{R}$.

ii) Si a_n y a_0 tienen signos opuestos, entonces para los valores positivos y grandes de x, $f(x)$ tiene el signo de a_n y como $f(0) = a_0$ entonces $f(x)$ tiene una raíz positiva (por el teorema del valor intermedio).

Si n es par, entonces $f(x)$ tiene el signo a_n, cuando los valores de x son negativos y grandes en valor absoluto, entonces análogamente $f(x)$ tiene una raíz negativa.

9. *a*) Demostrar que dado cualquier triángulo, hay en cada dirección del plano que la contiene, una recta que lo bisecta, esto es, que lo divide en dos partes de igual área.

b) Demostrar que dados dos triángulos en el mismo plano hay una recta que los bisecta simultaneamente.

Solución.

a) Sea A_l área de la parte del triángulo que queda sobre la recta l. Sea B_l área de la parte del triángulo que queda por debajo de la recta l, por demostrar que $A_l = B_l$. En efecto: sea $\o(l) = A_l - B_l$, $\o$ continua, al desplazar l manteniendo su dirección A_l aumenta o disminuye en la misma cantidad en que B_l disminuye o aumenta, luego existe l_0 tal que:

$$\o(l_0) = A_{l_0} - 0 = A_{l_0} \quad (> 0).$$

Existe l_1 tal que $\o(l_1) = 0 - B_{l_1} = -B_{l_1} \quad (< 0)$, así por el teorema del valor intermedio: $\exists l$ tal que $\o(l) = 0 \Longrightarrow A_l - B_l = 0 \Longrightarrow A_l = B_l$.

b) Tomemos, para cada dirección $\o$, la recta $L(\o)$ que divide al primer triángulo en dos partes iguales. Sea $L(\o)$ orientada positivamente en la dirección $\o$. Sea $g(\o) = A(\o) - B(\o)$, donde $A(\o)$ y $B(\o)$ constituyen las porciones del área del segundo triángulo que quedan a la derecha y a la izquierda de $L(\o)$. Si $g(\o) > 0$ entonces $g(\pi + \o) = B(\o) - A(\o) < 0$, y por el teorema del valor intermedio, $g(\o) = 0 \Longrightarrow A(\o) = B(\o)$ para algún valor determinado de $\o$.

10. *a*) Muéstrese que una recta sólo puede cortar la gráfica de una función polinomial de grado mayor que uno en un número finito de puntos.

b) Obténgase el mismo resultado para las funciones racionales.

c) Verifíquese que las funciones trigonométricas no son racionales.

Solución.

a) Los gráficos de $y = mx + b$ e $y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ se intersectan para los puntos en que: $mx + b = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ es decir:

$$(a_0 - b) + (a_1 - m)x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0 \qquad (1)$$

cuando el número de intersecciones es infinito, (1) tiene que ser nulo y así $a_0 = b$, $a_1 = m$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$, lo que contradice la suposición de que $n > 1$.

b) Propuesto.

c) Debido a la periodicidad, la recta $y = 1$ tiene una infinidad de intersecciones con el gráfico de cualquier función trigonométrica, luego por b) las funciones trigonométricas no son racionales.

11. Demuéstrese que las funciones trigonométricas elementales $sen\, x$ y $cos\, x$ son continuas en $\mathbb{R}$.

Demostración.

Sea $f(x) = senx$, demostraremos que $senx$ es continua para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

Así:

$$|f(x) - f(\alpha)| = |senx - sen\alpha| = \left|2sen\frac{x-\alpha}{2}\,cos\frac{x+\alpha}{2}\right|$$

$$= 2\left|sen\frac{x-\alpha}{2}\right|\left|cos\frac{x+\alpha}{2}\right| \leq 2\left|sen\frac{x-\alpha}{2}\right| \quad \text{y dado que:}$$

$$|x-\alpha| < \delta \quad \text{y que:} \quad \left|sen\frac{x-\alpha}{2}\right| < \left|\frac{x-\alpha}{2}\right| \quad \text{se tiene:}$$

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq 2\frac{|x-\alpha|}{2} < \delta; \text{así sea} \quad \delta = \xi \quad \text{con} \quad \xi > 0,$$

arbitrariamente pequeño, queda demostrada la continuidad de $f(x) = senx$. Análogo para $f(x) = cosx$.

12. Demostrar que si f es continua en $[a, b]$, con $f(a) < a$ y $f(b) > b$, necesariamente hay algún x en $[a, b]$ donde $f(x) = x$. Interpretar geométricamente.

Demostración.

Sea $g(x) = f(x) - x$, también continua en $[a, b]$, entonces:

$$g(a) = f(a) - a < 0$$

$$g(b) = f(b) - b > 0$$

luego por el teorema del valor intermedio, $\exists x \in [a,b]$ tal que $g(x) = 0$, es decir, $f(x) - x = 0 \Longrightarrow f(x) = x$.

13. Demostrar que si f es continua en (a,b) y $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son valores cualquiera de este intervalo, hay entre el mayor y el menor de los x_i un valor ξ tal que

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].$$

Demostración.

Sean $f(x_j)$ y $f(x_k)$ el máximo y el mínimo de $\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$ así:

$$\frac{1}{n} \cdot n\, f(x_k) \leq \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \leq \frac{1}{n} \cdot n\, f(x_j)$$

$$\text{de donde} \quad f(x_k) \leq \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \leq f(x_j)$$

Luego por teorema del valor intermedio $\exists \xi \in [x_k, x_j]$ tal que $f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$, con mayor razón $\exists \xi$ en el intervalo formado por el menor y el mayor de los x_i tal que $f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

14. Demostrar que toda función periódica y continua en toda la recta real es acotada, alcanza un máximo y un mínimo y además tiene cuerdas horizontales de cualquier longitud dada.

Demostración.

i) Si f es constante de inmediato es acotada. Si no es constante tiene un período p, asi la estudiaremos en un intervalo $[a,b]$, f continua en $[a,b] \Longleftrightarrow \forall x_0 \in [a,b]$, $\forall \xi > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \xi \Longleftrightarrow f(x_0) - \xi < f(x) < f(x_0) + \xi$.

Si $\xi = 1$ resulta de inmediato que $f(x_0) - 1$ es cota inferior de $f(x)$y $f(x_0) + 1$ es cota superior de f, luego es acotada.

ii) Ahora demostraremos que f alcanza su máximo en $[a, b]$. El conjunto $\{f(x)/x \in [a, b]\}$ es acotado superiormente, luego tiene supremo s luego $s - f(x) < \xi$, si $s \neq f(x)$ entonces $\dfrac{1}{s - f(x)} > \dfrac{1}{\xi}$ con lo que esta función siendo continua no es acotada **contradicción**, luego $\exists x \in [a, b]$ tal que $f(x) = s$ un máximo de f en $[a, b]$. En forma análoga se demuestra que f alcanza un mínimo en $[a, b]$.

iii) Cuerdas de cualquier longitud dada, $\forall\, l \in \mathbb{R}$ buscamos puntos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$ y $x_2 - x_1 = l$ luego $x_2 = x_1 + l$, así bastará buscar $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = f(x_1 + l)$, tal punto se encuentra en la intersección de los gráficos de : $y = f(x)$ e $y = f(x + l)$, así entonces:

Sea c donde f alcanza su máximo M, y sea d donde f alcanza su mínimo m y también la función $g(x) = f(x) - f(x - l)$, entonces $g(c) = f(c) - f(c - l) \geq 0 \wedge g(d) = f(d) - f(d - l) < 0$ luego por el teorema del valor intermedio, $\exists x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) - f(x_1 - l) = 0 \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_1 - l)$ como se quería.

15. Demostrar las siguientes propiedades de las funciones continuas. Si f es continua en x_0, y

a) $f(x_0) > 0$, hay un intervalo $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ donde f es positiva.

b) $f(x)$ se anula en puntos arbitráriamente cerca de x_0, necesariamente $f(x_0) = 0$.

Demostración.

a) f continua en x_0 sii $\forall \xi > 0,\ \exists \delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \xi \Longleftrightarrow f(x) - \xi < f(x) < f(x_0) + \xi$ tomando $\xi < f(x_0)$ y como $f(x_0) > 0$ por continuidad $\exists \delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow 0 < f(x_0) - \xi < f(x) < f(x_0) + \xi$ lo que nos asegura que $f(x)$ es positiva para $|x - x_0| < \delta$.

Compare esta demostración con la del ejercicio 6.

b) Supongamos $f(x_0) \neq 0$, entonces $f(x_0) > 0$ ó $f(x_0) < 0$, en cualquiera de estos casos, por ejemplo $f(x_0) > 0$ para $\xi < f(x_0)$, $\exists\delta < 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow 0 < f(x) < f(x_0) + \xi$ así $f(x)$ no se anula para puntos arbitrariamente cercanos a x_0 **contradicción**, luego $f(x_0) = 0$.

16. ¿Será necesariamente discontinua en un punto dado x_0 el producto, de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ si

a) La función $f(x)$ es continua y la función $g(x)$ es discontinua en este punto.

b) Ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ son discontinuas en x_0.

Solución.

a) No. Por ejemplo $f(x) = x$ es continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$g(x) = sen\dfrac{1}{x}$ es discontinua en $x = 0$ y $f(x) \cdot g(x) = x\, sen\dfrac{1}{x}$ es continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ya que $\lim\limits_{x \to 0} x\, sen\dfrac{1}{x} = 0$.

b) No. Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \\ -2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = -f(x)$$

son funciones discontinuas en $x = 0$, pero en cambio $f(x) \cdot g(x) = -4$, continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

17. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)} & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

Asegurarse de que la función toma en $[-2,2]$, todos los valores desde $f(-2)$ hasta $f(2)$ aunque es discontinua (¿en qué punto?).

Solución.

Nótese que $f(x)$ la podemos escribir como:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & si \quad -2\leq x<0\\ 0 & si \quad x=0\\ (x+1)2^{-\frac{2}{x}} & si \quad 0<x\leq 2\end{cases}$$

además en $[-2,0]$, $f(x)=x+1$ es creciente y continua es decir, toma todos los valores desde -1 a 1 análogamente en el intervalo $[0,2]$, $f(x)=(x+1)2^{-\frac{2}{x}}$ toma todos los valores desde 0 a $\frac{3}{2}$. La función es discontinua en $x=0$ ya que $f(0)_+=0$, $f(0)_-=1$.

18. Sea $f(x)=2x-1$. Si $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$, hallar δ para $\xi=0.001$ tal que $|f(x)-1|<0.001$ cuando $0<|x-1|<\delta$.

Solución.

$|f(x)-1|=|(2x-1)-1|=|2x-2|=2|x-1|$; por lo tanto, como se quiere: $2|x-1|<0.001$ cuando $0<|x-1|<\delta$ ó $|x-1|<0.0005$ cuando $0<|x-1|<\delta$, luego si tomamos $\delta=0.0005$ se tiene que:

$$0<|x-1|<0.0005 \quad \Longrightarrow |f(x)-1|<\ 0.001$$

Observe que cualquier número positivo menor que 0.0005 se puede emplear para el mismo efecto, en general si $0 < \delta' < 0.0005$, entonces si

$$0 < |x-1| < \delta' \Longrightarrow |f(x)-1| < 0.001.$$

19. Demuestre que $\lim\limits_{x\to -2}(3x+5) = -1$

Demostración.

Queremos demostrar $\forall\, \xi > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|(3x+5)-(-1)| < \xi$ cuando: $0 < |x-(-2)| < \delta$, en efecto: como $|(3x+5)-(-1)| = |3(x+2)| = 3|x+2|$, entonces se quiere que $3|x+2| < \xi$ cuando $0 < |x+2| < \delta$, lo cual nos indica que basta tomar $\delta = \dfrac{\xi}{3}$, puesto que: $(\forall\, \xi > 0)\left(\exists \delta = \dfrac{\xi}{3}\right)$; $0 < |x+2| < \delta \Longrightarrow 3|x+2| < 3\delta \Longrightarrow 3|x+2| < 3\dfrac{\xi}{3} \Longrightarrow |(3x+5)-(-1)| < \xi.$

20. Demuestre que la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$, no tiene límite en $x = 0$.

Demostración.

Debemos demostrar que para cualquier número $L, \forall\, \xi > 0$ tal que $\exists \delta > 0 :$ $0 < |x-0| < \delta \Longrightarrow |f(x)-L| > \xi$, en efecto:

Caso 1: Si $L \geq 0$ tomemos $\xi = 1$, para cualquier $\delta > 0$, tomemos a x de tal manera que, $-\delta < x < 0$ entonces,

$$|f(x)-L| = |-1-L| = L+1 \geq 1 = \xi.$$

Caso 2: Si $L < 0$, tomamos $\xi = 1$, para cualquier $\delta > 0$, tomemos a x de tal manera que: $0 < x < \delta$ entonces

$$|f(x)-L| = 1-L > 1 = \xi$$

21. Demostrar que:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ b) $\lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$

aplicar para $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$

Demostración.

a) $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \xi$ como $0 < |x - x_0| < \delta$ bastará tomar $\delta = \xi$, luego

$$(\forall \xi > 0)(\exists \delta = \xi)(0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x - x_0| < \xi)$$

luego $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

b) Por ejercicio resuelto N° 11 del capítulo 1, resulta de inmediato $|xy - ab| \leq |(1 + |a|)|y - b| + |b|\,|x - a|$ si $|x - a| < 1$, ahora en la expresión $|x^2 - x_0^2|$ se obtiene

$$|xx - x_0 x_0| \leq (1 + |x_0|)|x - x_0| + |x_0|\,|x - x_0| \quad \text{si} \quad |x - x_0| < 1;$$

si $0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| \leq (1+|x_0|)\delta + |x_0|\delta = (1+2|x_0|)\delta$, como $|x^2 - x_0^2| < \xi$ queda $(1+2|x_0|)\delta < \xi \Longrightarrow \delta = \text{mín}\left(1, \dfrac{\xi}{1+2|x_0|}\right)$, lo cual demuestra que $\lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$

Para $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$, resulta $x_0 = 3$, $|x^2 - 9| \leq (1 + 2|3|)\delta < \xi$ de donde $\delta < \dfrac{\xi}{7}$ si $|x - 3| < 1$ es decir debemos tomar un $\delta = \text{mín}\left(1, \dfrac{\xi}{7}\right)$.

22. Demostrar que: $\lim\limits_{x\to 4}(x^2 - 3x + 5) = 5$

Demostración.

Debemos demostrar $\forall \xi > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que $|(x^2 - 3x + 1) - 5| < \xi$ cuando: $0 < |x - 4| < \delta$, en efecto como: $|(x^2 - 3x + 1) - 5| = |(x - 4)(x + 1)| = |x - 4||x + 1|$

Si $|x - 4| < 1 \Longrightarrow 3 < x < 5 \Longrightarrow 4 < x + 1 < 6 \Longrightarrow |x + 1| < 6$, luego $|(x^2 - 3x + 1) - 5| < 6|x - 4|$ si $|x - 4| < \dfrac{\xi}{6}$, entonces $|(x^2 - 3x + 1) - 5| < \xi$ lo cual nos dice que debemos tomar $\delta = \text{mín}\left(1, \dfrac{\xi}{6}\right)$ $(0 < |x - 4| < 1 \Longrightarrow$

$$|(x^2 - 3x + 1) - 5| < 6|x - 4| \text{ y } |x - 4| < \frac{\xi}{6} \Longrightarrow |(x^2 - 3x + 1) - 5| < \xi).$$

23. Demostrar que: $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0.$

Demostración.

Debemos encontrar $\exists\delta > 0,\ \forall\xi > 0$, si $0 < |x - 0| < \delta \Longrightarrow |\sqrt{|x|} - 0| < \xi$ en efecto, como: $|\sqrt{|x|} - 0| = |\sqrt{|x|}| = \sqrt{|x|}$ y $|x - 0| = |x| < \delta$ hacemos $\delta = \xi^2$, tenemos entonces $0 < |x| < \xi^2 = \delta \Longrightarrow 0 < \sqrt{|x|} < \xi$, así $0 < |x - 0| < \delta = \xi^2 \Longrightarrow |\sqrt{|x|} - 0| < \xi$, lo que queríamos demostrar.

24. Hallar el $\lim\limits_{x\to -1}(x^2 - 2x + 5).$

Solución.

Aplicando los teoremas básicos pertinentes y la **continuidad** de las funciones en $x_0 = -1$, se tiene

$$\lim_{x\to -1}(x^2 - 2x + 5) = \lim_{x\to -1} x^2 - 2\lim_{x\to -1} x + \lim_{x\to -1} 5 = (-1)^2 - 2(-1) + 5 = 8$$

obsérvese que $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 5 = 8 = \lim\limits_{x\to -1}(x^2 - 2x + 5)$ no siempre es cierto, esta propiedad sólo la tienen las funciones continuas en el punto en cuestión.

25. Hallar $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$

Solución.

Aquí $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \neq f(-1)$;ya que la función no está definida para $x = -1$ y para calcular el límite procederemos de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x + 2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x - 1}{x + 2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -1} x - \lim\limits_{x\to -1} 1}{\lim\limits_{x\to -1} x + \lim\limits_{x\to -1} 2} = \frac{-1 - 1}{-1 + 2} = -2$$

observemos dos cosas fundamentales, primero que el concepto de límite no involucra al punto $x_0 = -1$ (en este caso), por consiguiente podemos proceder a simplificar y segundo que la función $\dfrac{x-1}{x+2}$ es continua en $x_0 = -1$, luego aplicamos el teorema de continuidad, es decir, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nota: En ejercicios posteriores supondremos el conocimiento de los teoremas pertinentes que se aplican, tratando de ser lo más escuetos posible.

26. Demuestre que $f(x) = 1 + x^2\, sen\dfrac{1}{x}$; $x \neq 0$ es convergente en $x_0 = 0$ y determine su límite.

Demostración.

De inmediato: $-1 \leq sen\dfrac{1}{x} \leq 1,\ \forall x \neq 0 \Longrightarrow -x^2 \leq x^2\, sen\dfrac{1}{x} \leq x^2 \Longrightarrow$ $1 - x^2 \leq 1 + x^2\, sen\dfrac{1}{x} \leq 1 + x^2$ y como $\lim\limits_{x\to 0}(1 - x^2) = 1 = \lim\limits_{x\to 0}(1 + x^2)$ se tiene que $1 + x^2 sen\dfrac{1}{x}$ es convergente y por el teorema del sandwich $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x^2 sen\dfrac{1}{x}\right) = 1.$

27. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x} = 1$

Demostración.

De la figura se tiene:

Area $\triangle OSP <$área sector circular $OSP <$ área $\triangle OSQ$ por tanto,

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot sen\,x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot tgx \Longrightarrow senx < x < tgx \Longrightarrow$$

$$1 < \frac{x}{senx} < \frac{1}{cosx} \Longrightarrow cosx < \frac{senx}{x} < 1 \text{ esto para } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

también la relación se cumple para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ y como $\lim_{x\to 0} 1 = 1$

y $\lim_{x\to 0} cosx = cos0 = 1$ se tiene $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$

28. Demuestre que la existencia del límite, $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$, no implica la existencia de los límites: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

Demostración.

La haremos con un contraejemplo. Sean $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, y $g(x) = 1 - sen\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, observemos que ninguna de las dos funciones tiene límite cuando x se aproxima a cero, pero en cambio:

$$\lim_{x\to 0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to 0}\left[sen\frac{1}{x} + 1 - sen\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

29. Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$, aplicar para $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

Demostración.

Sea $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y definamos $g(h) = f(a+h)$ así:

$$(\forall\xi > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < |x-a| < \delta) \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \xi$$

ahora si $\quad 0 < |h| < \delta \Longrightarrow 0 < |(a+h) - a| < \delta \quad$ y por lo tanto,

$$|f(a+h) - L_1| < \xi \Longrightarrow |g(h) - L_1| < \xi \quad \text{luego} \quad \lim_{h\to 0} g(h) = L_1$$

es lo mismo que $\lim_{h\to 0} f(a+h) = L_1$, análogamente se prueba que si $\lim_{h\to 0} f(a+h) = L_2$ $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$. Así, un límite existe si existe el otro y viceversa y en este caso son iguales.

Para $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$; $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $a = 1$, así:

$$f(1+h) = \frac{(1+h)^2-1}{1+h-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h \quad \text{y}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{h \to 0}(2+h) = 2.$$

30. Calcular los límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt{cosx}}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Arcsenx}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} cotg2x \; cotg\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 sen\frac{1}{x} + senx}{1-x-cosx}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \, sen\frac{1}{x}}{senx}$ h) $\lim\limits_{x \to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} cos\left(\pi\dfrac{senx}{x}\right)$ j) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{\pi}{2}-Arctgx}{sen\frac{1}{x}}$

k) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2cosx}$ l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\pi x(1-cos\pi x)}{x^2 senx}$

m) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{tg^3x-3tgx}{cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$ n) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}; n \in \mathbb{N}$

o) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}; n \in \mathbb{N}$

p) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{1-x^3} \right)$

q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$

r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log(1+x)}{x}$

s) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$

t) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+tgx}{1+senx} \right)^{\dfrac{1}{senx}}$

u) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{log(x) - log(a)}; (a > 0)$

v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$; $(a > 0)$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

x) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{a} - 1)$; $(a > 0)$

y) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$; $(a, b > 0)$

z) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{senx}}{x - senx}$

α) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

β) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{\dfrac{a+x}{a-x}}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)^{\dfrac{1}{x}}$; $(a, b > 0)$

δ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$; $m, n \in \mathbb{N}$

Solución.

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1})}{(\sqrt[3]{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)} + \sqrt[3]{1})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1})}{(1+x-1)(\sqrt{1+x} + 1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)} + \sqrt[3]{1}}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{3}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{cosx}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2(1+\sqrt{cosx})}\cdot\frac{1+cosx}{1+cosx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x^2}\frac{1}{(1+\sqrt{cosx})}\frac{1}{1+cosx}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arcsenx}{x}$; sea $Arcsenx=\theta\Longleftrightarrow sen\theta=x,\ x\to 0\Longrightarrow\theta\to 0$

Así queda: $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\theta}{sen\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1}{\frac{sen\theta}{\theta}}=\dfrac{1}{1}=1.$

e)

$$\lim_{x\to 0}cotg\,2x\,cotg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\lim_{x\to 0}cotg\,2x\,tgx$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{cos\,2x}{sen\,2x}\cdot\frac{senx}{cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{cos2x}{2cos^2x}=\frac{1}{2}$$

f)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2sen\frac{1}{x}+senx}{1-x-cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{xsen\frac{1}{x}+\frac{senx}{x}}{\frac{1-cosx}{x}-1}\qquad(1)$$

nótese que $-x\leq x\,sen\frac{1}{x}\leq x$, si $x>0$ de aquí $\lim\limits_{x\to 0^+}x\,sen\frac{1}{x}=0$ análogamente $\lim\limits_{x\to 0^-}x\,sen\frac{1}{x}=0$, luego $\lim\limits_{x\to 0}x\,sen\frac{1}{x}=0$, ahora

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x(1+cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\frac{senx}{(1+cosx)}=0$$

así (1) queda: $\dfrac{0+1}{0-1}=-1$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2sen\frac{1}{x}}{senx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,sen\frac{1}{x}}{\frac{senx}{x}}=\dfrac{0}{1}=0$

h)

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}(1-x)tg\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}(1-x)\right]=\lim_{x\to 1}(1-x)cotg\frac{\pi}{2}(1-x)$$

$$=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{cos\frac{\pi}{2}(1-x)}{sen\frac{\pi}{2}(1-x)}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{cos\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{sen\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{\pi}$$

i) $\lim\limits_{x\to 0} cos\left(\pi\dfrac{senx}{x}\right)$ de inmediato como la función coseno es continua, éste límite vale -1.

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-Arctgx}{sen\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(\frac{\pi}{2}-Arc\,tgx\right)}{xsen\frac{1}{x}}$; notemos que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

Luego calculemos $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-Arc\,tgx\right)$, sea $Arc\,tgx=\theta\Longleftrightarrow tg\theta=x$, si $x\to\infty\Longrightarrow\theta\to\dfrac{\pi}{2}$, así queda:

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} tg\,\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} cotg\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=1$$

finalmente entonces el límite pedido tiende a 1.

k)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2cosx} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2cos\left[\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\left[\frac{1}{2}cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\,sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

sea $x-\frac{\pi}{3}=z$, si $x\to\frac{\pi}{3}\Longrightarrow z\to 0$, así:

$$= \lim_{z\to 0}\frac{senz}{z}\frac{1}{\left(\frac{1-cosz}{z}+\sqrt{3}\frac{senz}{z}\right)} = 1\frac{1}{0+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

l)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,\pi x(1-cos\pi x)}{x^2 senx} = \pi^3 \lim_{x\to 0}\frac{sen\pi x}{\pi x}\cdot\frac{sen^2\pi x}{\pi^2x^2}\cdot\frac{1}{\frac{senx}{x}}$$

$$\cdot\frac{1}{(1+cos\pi x)} = \frac{\pi^3}{2}.$$

m)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{tg^3x-3tgx}{cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{tgx(tg^2x-3)}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,cosx-senx)}$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{senx}{cos^3x}\frac{sen^2x-3cos^2x}{\frac{1}{2}(senx-\sqrt{3}cosx)} = -2\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{senx}{cos^3x}(senx+\sqrt{3}cosx)$$

$$= -2\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -24$$

$n)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}, n\in\mathbb{N}$

Sea $x=z+1,\quad$ si $x\to 1\Longrightarrow z\to 0$

$$\lim_{z\to 0}\frac{(z+1)^{n+1}-(n+1)(z+1)+n}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}z^k-(n+1)(z+1)+n}{z^2}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{1+(n+1)z+\dfrac{(n+1)n}{1\cdot 2}z^2+\cdots+z^{n+1}-(n+1)z-n-1+n}{z^2}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{(n+1)n}{1\cdot 2}z^2+\dfrac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3+\cdots+z^{n+1}}{z^2}=\frac{1}{2}n(n+1)$$

o) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})}{(x-a)}=na^{n-1}$

p) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1-3}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=1$

q) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$, sea $z^{12}=x,\quad$ si $x\to 1\Longrightarrow z\to 1$, asi se tiene

$\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z^4-1}{z^3-1}=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)}=\dfrac{4}{3}$

r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{log(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}log(1+x)^{\frac{1}{x}}=log\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=log(e)=1$

nótese que la función logaritmo es continua para los positivos.

s)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x-1}-1\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\dfrac{x-1}{4}\cdot\dfrac{4(x+3)}{x-1}}=e^{4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{x-1}}=e^4$$

t)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+senx}\right)^{\dfrac{1}{senx}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+tgx-1-senx}{1+senx}\right)^{\dfrac{1}{senx}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{tgx-senx}{1+senx}\right)^{\dfrac{1+senx}{tgx-senx}\cdot\dfrac{1}{senx}\dfrac{tgx-senx}{1+senx}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx(1-cosx)}{senx(1+senx)cosx}}=e^0=1$$

Nota: como en s y t hemos calculado $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}$, donde $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$, entonces se puede recomendar la transformación

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}(1+f(x)-1)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)[f(x)-1]}$$

u)

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{log(x)-log(a)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{log\left(\dfrac{x}{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\dfrac{x}{a}-1\right)a}{log\left(\dfrac{x}{a}\right)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{a}{log\left(1+\dfrac{x}{a}-1\right)^{\dfrac{1}{\frac{x}{a}-1}}}=\frac{a}{log\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{x}{a}-1\right)^{\dfrac{1}{\frac{x}{a}-1}}}=\frac{a}{log(e)}=a$$

nótese que $a>0$.

v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$; $(a>0)$, como $e^{loga}=a$ tenemos

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{xloga}-1}{x}$, sea $e^{xloga}-1=z$ si $x\to 0$

$\Longrightarrow z\to 0$, con lo que $e^{xloga}=z+1\Longrightarrow$

$xloga\ loge=log(z+1)\Longleftrightarrow xloga=log(1+z)\Longleftrightarrow x=\dfrac{log(1+z)}{loga}$

luego $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{xloga}-1}{x}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{zloga}{log(1+z)}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{loga}{log(1+z)^{\frac{1}{z}}}=loga$

de inmediato $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=loge=1$

x) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt[x]{a}-1)$, $(a>1)=\lim\limits_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-1)$;

sea $\dfrac{1}{x}=z$, si $x\to\infty\Longrightarrow z\to 0$

$=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{a^z-1}{z}=loga$, por ejercicio (v).

y) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1-(b^x-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b^x-1}{x}=$ $log\dfrac{a}{b}$.

z) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{senx}}{x-senx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-senx}-1}{(x-senx)e^{-senx}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-senx}-1}{x-senx}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^{-senx}}$

como $(x-senx)\to 0$, tenemos que el límite vale 1.

α)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$$

$\beta)$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\frac{a+x}{a-x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a+x}{a-x}-1\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{a-x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{a-x}\right)^{\frac{a-x}{2x}\cdot\frac{1}{x}\frac{2x}{a-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{a-x}}=e^{\frac{2}{a}}$$

$\gamma)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^x-2}\frac{a^x+b^x-2}{2x}}=$$

$$e^{\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{2}(loga+logb)}=e^{log(\sqrt{ab})}=\sqrt{ab}$$

$\delta)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(mx)^k-\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(nx)^k}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}n(n-1)m^2x^2+\cdots+(mx)^n-\left(\frac{1}{2}m(m-1)n^2x^2+\cdots+(nx)^m\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}n(n-1)m^2-\frac{1}{2}m(m-1)n^2+\binom{n}{3}m^3x+\cdots+\binom{n}{n}m^nx^{n-2}\right.$$

$$\left.+\cdots-\tbinom{m}{m}n^mx^{m-2}\right]=\frac{1}{2}nm(mn-m-nm+n)=\frac{1}{2}nm(n-m).$$

31. Calcular

$a)$ $\lim\limits_{z\to+\infty}(sen\sqrt{z+1}-sen\sqrt{z})$

$b)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$

$c)$ $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2+3^{\frac{1}{x}}}{3+3^{\frac{1}{x}}}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2+3^{\frac{1}{x}}}{3+3^{\frac{1}{x}}}$

$d)$ $\lim\limits_{x\to0^{\pm}}\dfrac{\sqrt{1-cosx}}{senx}$

Solución.

$a)$ Sea $z=\dfrac{1}{x}$, si $z\to+\infty\Longrightarrow x\to0^+$, luego queda

$$\lim_{z\to+\infty}(sen\sqrt{z+1}-sen\sqrt{z})=\lim_{x\to0^+}(sen\sqrt{1+\frac{1}{x}}-sen\sqrt{\frac{1}{x}})$$

por otra parte: $\left|sen\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-sen\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right|=2\left|sen\left(\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}}{2}\right)\right|$

$\left|cos\left(\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{2}\right)\right|$

pero como:$|cos\mu|\leq1,\ \forall\mu$ se tiene que:

$$\left|sen\sqrt{1+\frac{1}{x}}-sen\sqrt{\frac{1}{x}}\right|\leq2\left|sen\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}}{2}\right)\right|$$

y también: $|sen\,\mu|\leq\mu,\quad\forall\mu$

$$\left|sen\sqrt{1+\frac{1}{x}}-sen\sqrt{\frac{1}{x}}\right| \leq 2\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}}{2}\right)=\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\left|sen\sqrt{1+\frac{1}{x}}-sen\sqrt{\frac{1}{x}}\right| \leq \frac{(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x}}\frac{(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+1)}=$$
$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1}$$

ahora como $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1}=0$ por el teorema del sandwich

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left|sen\sqrt{1+\frac{1}{x}}-sen\sqrt{\frac{1}{x}}\right|=0$, además como: $\lim\limits_{x\to 0^+}|f(x)|=a\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=a$, se tiene de inmediato

$$\lim_{x\to 0^+}\left(sen\sqrt{1+\frac{1}{x}}-sen\sqrt{\frac{1}{x}}\right)=0$$

nótese que $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(sen\sqrt{1+\frac{1}{x}}-sen\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$, no existe.

b) De inmediato:

$$(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})\frac{(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1})}{(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1})}$$

$$=\frac{2x-2}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{2x-2}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)},$$

así:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{2}{2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=-\frac{2}{2}=-1$$

c) Si $x \to 0^- \Longrightarrow 3^{\frac{1}{x}} \to 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2+3^{\frac{1}{x}}}{3+3^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{2}{3}$

Si $x \to 0^+$ entonces, $\dfrac{2+3^{\frac{1}{x}}}{3+3^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{2\cdot 3^{-\frac{1}{x}}+1}{3\cdot 3^{-\frac{1}{x}}+1}$ y como $\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{-\frac{1}{x}} = 0$

así: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\cdot 3^{-\frac{1}{x}}+1}{3\cdot 3^{-\frac{1}{x}}+1} = 1$

d)

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-cosx}}{senx} = \frac{\sqrt{1-cos^2x}}{senx\,\sqrt{1+cosx}} = \frac{\sqrt{sen^2x}}{senx\sqrt{1+cosx}} = \frac{|senx|}{senx\sqrt{1+cosx}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

32. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(-1)^{[x]}}{x-1} = -\infty$ ¿Cuál es el mayor valor de δ tal que $0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow \dfrac{(-1)^{[x]}}{x-1} < -1000$?

Demostración.

Si $1 < x < 2 \Longrightarrow \dfrac{(-1)^{[x]}}{x-1} = \dfrac{(-1)^{[+1]}}{x-1} = -\dfrac{1}{x-1} \to -\infty$ cuando $x \to 1^+$.

Si $0 < x < 1 \Longrightarrow \dfrac{(-1)^{[x]}}{x-1} = \dfrac{(-1)^{0}}{x-1} = \dfrac{1}{x-1} \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$, luego $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(-1)^{[x]}}{x-1} = -\infty$.

Como $\dfrac{(-1)^{[x]}}{x-1} = -\dfrac{1}{x-1} < -\dfrac{1}{\delta}$ si $0 < |x-1| < \delta < 1$, $\delta = 10^{-3}$ es el número más pequeño tal que $0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow \dfrac{(-1)^{[x]}}{x-1} < -1000$.

33. Calcular los límites cuando $x \to 0$, de

a) $f(x) = x|cotgx| - \dfrac{x}{|x|}$

b) $g(x) = \left(\left[\dfrac{1}{x}\right] - \dfrac{1}{x}\right) senx$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x|cotgx| - \dfrac{x}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(|x|\left|\dfrac{cosx}{senx}\right| - 1\right)}{|x|}$

de donde:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\frac{cosx}{senx} - 1\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{cosx}{\frac{senx}{x}} - 1 = 0 \quad \text{y}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(-x\dfrac{cosx}{senx} - 1\right)}{-x} = \lim_{x\to 0^-}(-1)\left(-\frac{cosx}{\dfrac{sen(-x)}{(-x)}}\right) - 1 = 0$$

luego $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(|x|\left|\dfrac{cosx}{senx}\right| - 1\right)}{|x|} = 0$

b) Como:

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} \Longrightarrow -1 < \left[\frac{1}{x}\right] - \frac{1}{x} \leq 0, \ \forall x, \ x \neq 0$$

luego $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left[\dfrac{1}{x}\right] - \dfrac{1}{x}\right) senx = 0$, por estar $\left(\left[\dfrac{1}{x}\right] - \dfrac{1}{x}\right)$acotada.

34. Sea F centro de una circunferencia dada de radio r. $\triangle ABC$ isósceles, $AC = BC$ inscrito en la circunferencia. Calcular:

a) $\lim\limits_{AB\to 0}\dfrac{Area\ \triangle AFC}{\text{Area sector circular}AFB}$

b) $\lim\limits_{AB\to 0}\dfrac{Area\ \triangle ABC}{\text{Area sector circular}AFB}$

Solución.

a) Area sector circular $AFB = \dfrac{1}{2}\,\alpha r^2,$

$\overline{DF} = r sen\dfrac{\alpha}{4} \wedge \overline{AC} = 2AD = 2r\,cos\dfrac{\alpha}{4}$

Area $\triangle AFC = \dfrac{1}{2} \quad \overline{AC}\cdot\overline{DF} = r^2 sen\dfrac{\alpha}{4}\,cos\dfrac{\alpha}{4}$

Area $\triangle AFC = \dfrac{r^2}{2} sen\dfrac{\alpha}{2}$ ahora como $\overline{AB} \to 0 \Longrightarrow \alpha \to 0$, se tiene que

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\frac{r^2}{2} sen\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}\alpha r^2} = \frac{1}{2} \lim \frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}$$

b) Area $\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \quad \overline{AB}\cdot\overline{EF} = \dfrac{1}{2}\,2\,r\;sen\dfrac{\alpha}{2}\cdot\left(r\,cos\dfrac{\alpha}{2} + r\right) = r^2 sen\dfrac{\alpha}{2}\left(1 + cos\dfrac{\alpha}{2}\right).$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{r^2 sen\frac{\alpha}{2}\left(1 + cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{1}{2}\,\alpha\,r^2} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \lim_{\alpha\to 0}\left(1 + cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2$$

35. Sea el $\triangle ABC$ rectángulo, no isósceles, de base dada AB; HC altura; M punto medio de AB; D punto en que el lado AB es tangente a la circunferencia inscrita. Demuestre que

$$\lim_{(a-b)\to 0} \frac{\overline{HM}}{\overline{DM}} = \sqrt{2}$$

Demostración.

Si $a - b \to 0 \Longrightarrow a \to b$

$\overline{HM} = \dfrac{c}{2} - x$, pero $\dfrac{x}{b} = \dfrac{b}{c}$ de aquí $x = \dfrac{b^2}{c}$ y $\overline{HM} = \dfrac{c}{2} - \dfrac{b^2}{c} = \dfrac{c^2 - 2b^2}{2c} = \dfrac{(c^2 - b^2) - b^2}{2c} = \dfrac{a^2 - b^2}{2c}$

$\overline{DM} = \dfrac{c}{2} - \overline{AD}$ pero $\overline{AD} = S - a$ luego $\overline{DM} = \dfrac{c}{2} - \left(\dfrac{a+b+c}{2} - a\right) = \dfrac{a-b}{2},$

de donde: $\dfrac{\overline{HM}}{\overline{DM}} = \dfrac{\frac{a^2 - b^2}{2c}}{\frac{a-b}{2}} = \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a+b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, finalmente:

$$\lim_{a\to b}\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2b}{\sqrt{2}b}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

36. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos\left(\dfrac{\pi}{2}cosx\right)}{sen^2x}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-cos\left[1-cos\left(\dfrac{\pi}{2}(1+x)\right)\right]}{(1-x^2)^4}$

Solución.

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}cosx\right)}{sen^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}cosx\right)}{sen^2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen\frac{\pi}{2}(1-cosx)}{\frac{\pi}{2}(1-cosx)}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}(1-cosx)}{sen^2x}\cdot\frac{1+cosx}{1+cosx}$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sen\frac{\pi}{2}(1-cosx)}{\frac{\pi}{2}(1-cosx)}\frac{1}{1+cosx}=\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$$

b)

$$\lim_{x\to -1}\frac{1-cos\left[1-cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right)\right]}{(1-x^2)^4}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{sen^2\left(1-cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right)\right)}{(1-x^2)^4\left(\underbrace{1+cos\left[1-cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right)\right]}_{A}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{sen^2 \overbrace{\left(1 - cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right)\right)}^{B}}{\left[1 - cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right)\right]^2} \cdot \frac{\left[1 - cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right)\right]^2}{[(1-x)(1+x)]^4 \cdot A}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{sen^2 B}{B^2} \cdot \frac{sen^4 \frac{\pi}{2}(1+x)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 (1+x)^4} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{(1-x)^4} \cdot \frac{1}{\left[1 + cos\frac{\pi}{2}(1+x)\right]^2} \cdot \frac{1}{A}$$

nótese que si $x \to -1 \Longrightarrow B \to 0$ y $A \to 2$, así queda el límite:

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi^4}{16} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi^4}{2048}$$

37. Probar que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg|x|^n}{sen|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - cos|x|^n)x^2}{tg|x|^{2m}(1 - cosx)};\ n \geq m$$

Prueba

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg|x|^n}{sen|x|^m} = \lim_{x\to 0} \frac{sen|x|^n}{|x|^n} \frac{|x|^m}{sen|x|^m} \frac{|x|^{n-m}}{cos|x|^n}$$

este límite vale 0 si $n > m$ y vale 1 si $n = m$, así también

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - cos|x|^n)x^2}{tg|x|^{2m}(1 - cosx)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2|x|^n}{sen|x|^{2m}} \cdot \frac{cos|x|^{2m} x^2 (1 + cosx)}{sen^2 x (1 + cos|x|^n)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{sen^2|x|^n}{|x|^{2n}} \cdot \frac{|x|^{2m}}{sen|x|^{2m}} \cdot |x|^{2(n-m)} \cdot \frac{x^2}{sen^2 x} \cdot \frac{1 + cosx}{1 + cos|x|^n}$$

este límite vale 0 si $n > m$ y vale 1 si $n = m$.

38. Hallar las asíntotas de la curva $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$

Solución.

Cuando $x \to 0^- \Longrightarrow y \to +\infty$; $x \to 0^+ \Longrightarrow y \to -\infty$, por consiguiente, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (y-x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+2x-1x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty^{\pm}} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

por lo tanto, $y = x+2$ es una asíntota oblicua de la curva considerada. Para estudiar la disposición relativa de la asíntota y de la curva examinemos la diferencia de las ordenadas de la curva y de la asíntota para un mismo valor de $x : \dfrac{x^2+2x-1}{x} - (x+2) = -\dfrac{1}{x}$, la diferencia es negativa para $x > 0$ y positiva para $x < 0$ entonces para $x < 0$ la suma se encuentra por encima de la asíntota. Observese su gráfica.

39. Bosquejar los gráficos de las siguientes funciones, señalando sus puntos de discontinuidad y analizando el carácter de estos.

a) $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$

b) $f(x) = \dfrac{1-cosx}{x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}\, sen\dfrac{\pi}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

f) $f(x) = \dfrac{sen2x}{x-x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$

h) $f(x) = \dfrac{3x^2-2+senx}{x+1}$

i) $f(x) = \dfrac{1-cos\frac{\pi}{2}(1+x)}{1-x^2}$

Solución.

a) $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$,

$Dom f = \mathbb{R} - \{-1\}$ la función es muy simple para el gráfico si $x \neq -1$.

$f(x) = \dfrac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} = 1 - x + x^2$ (una parábola).

Nótese que

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 3 = \lim_{x \to -1^+} f(x),$$

luego posee una discontinuidad evitable, quedando así:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x^3}{1+x} & \text{si} \quad x \neq -1 \\ \\ 3 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$$

b) $f(x) = \dfrac{1 - cosx}{x^2}$

i) $Dom\, f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

ii) Raíces y signos

$$1 - cosx = 0 \Longleftrightarrow xcosx = 1 \Longleftrightarrow x = 2k\pi, \; k \in Z$$

	+	•	+	•	+	•	+
signos		-2π		2π		4π	

nótese que $f(x) \geq 0, \; \forall x \neq 0$.

iii) Simetrías: $f(x) = \dfrac{1 - cos(-x)}{(-x)^2} = f(x)$, es par luego es simétrica con el eje Y.

iv) Acotada: $-1 \leq cosx \leq 1 \Longleftrightarrow 1 \geq -cosx \geq -1 \Longleftrightarrow$

$0 \leq 1 - cosx \leq 2 \Longleftrightarrow 0 \leq \dfrac{1 - cosx}{x^2} \leq \dfrac{2}{x^2}$

v) Continuidad

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-cosx}{x^2} \to 0^+$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cosx}{x^2}\cdot\dfrac{1+cosx}{1+cosx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen^2x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+cosx} = \dfrac{1}{2}$

tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}\; sen\dfrac{\pi}{x}$

i) $Dom\, f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

ii) Raíces y signos: $\sqrt{1+x^2}sen\dfrac{\pi}{x} = 0 \iff sen\dfrac{\pi}{x} = 0$

$\iff \dfrac{\pi}{x} = k\pi,\; k \in Z\; k \neq 0$

$x = \dfrac{1}{k}$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} + & \bullet & - & \bullet & + & \bullet & - & \circ & + & \bullet & - & \bullet & + & \bullet & - \quad \bullet \; + \\ \hline & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{3} & & -\frac{1}{4} & & 0 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & \quad\quad 1 \end{array}$$

iii) Simetrías: $-f(-x) = -\sqrt{1+x^2}sen\dfrac{\pi}{(-x)} = f(x)$, es impar luego simétrica con el origen.

iv) Acotada:

$$-1 \leq sen\frac{\pi}{x} \leq 1 \iff -\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{1+x^2}sen\frac{\pi}{x} \leq \sqrt{1+x^2}$$

v) Continuidad: Nótese que $f(x) = |x|\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}sen\dfrac{\pi}{x}$, así

$$\lim_{x\to+\infty} \pi\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\frac{sen\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = \pi;\; \lim_{x\to-\infty} -\pi\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\frac{sen\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = -\pi$$

$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+1}sen\dfrac{\pi}{x}$ no existe debido a que $sen\dfrac{\pi}{x}$ oscila entre -1 y 1, por lo tanto, es discontinua inevitable para $x = 0$.

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$

i) $Dom\, f \Longrightarrow 7+x \geq 0 \wedge x \neq \pm 2$ de donde $x \geq -7 \wedge x \neq \pm 2$

ii) Raíces y signos: $\sqrt{7+x}-3=0 \Longrightarrow 7+x=9 \Longrightarrow x=2$ pero se descarta porque no pertenece al dominio de f.

$$\begin{array}{cccccc} \circ & - & \circ & + & \circ & + \\ \hline -7 & & -2 & & 2 & \end{array}$$

iii) De inmediato no es simétrica con el eje Y ni el origen.

iv) Continuidad: Nótese que $f(-7) = -\dfrac{3}{45}$ y

$$f(x) = \frac{(\sqrt{7+x}-3)}{x^2-4}\frac{(\sqrt{7+x}+3)}{(\sqrt{7+x}+3)} = \frac{x-2}{(x^2-4)(\sqrt{7+x}+3)},$$

así entonces,

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} = \frac{1}{24};\ \lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} = \pm\infty$$

luego en $x=-2$ hay una asíntota vertical (discontinuidad inevitable) y en $x=2$ hay una discontinuidad evitable, además, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$, es decir, el eje X es una asíntota horizontal para los x positivos.

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

i) $Domf \Longrightarrow x^2-1>0 \Longrightarrow x<-1$ o $x>1$

ii) Signos: $f(x)>0,\ \forall x \in Domf$. Raíces no tiene.

iii) Simetrías: $f(-x)=f(x)$ con el eje Y.

iv) Asíntotas y continuidad: $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)} = 0$$

análogamente, por la simetría cuando $x \to -\infty,\ m = -1 \wedge n = 0$ así: $y = \pm x$ son asíntotas oblicuas de la curva que no intersectan a esta en ningún punto.

Además $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, discontinua inevitable para $x = 1$ y $x = -1$.

f) $f(x) = \dfrac{sen 2x}{x - x^2}$,

i) $Dom\, f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

ii) Raíces:

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow sen2x = 0 \Longleftrightarrow 2x = k\pi,\ k \neq 0,\ k \in Z,\ x = k\frac{\pi}{2}$$

Signos:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} - & \bullet & + & \circ & + & \circ & - & \bullet & + & \bullet & - & \bullet & + \\ \hline & -\dfrac{\pi}{2} & & 0 & & 1 & & \dfrac{\pi}{2} & & \pi & & \dfrac{3\pi}{2} & \end{array}$$

iii) Simetrías: No tiene

iv) Asíntotas y continuidad

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \to +\infty \wedge \lim_{x\to 1^+} f(x) \to -\infty.$$

En $x = 1$ hay una asíntota vertical luego una discontinuidad inevitable.

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{sen2x}{x(1-x)} = 2 \lim_{x\to 0^\pm} \frac{senx}{x} \cdot \frac{cosx}{1-x} = 2$$

luego en $x = 0$ la discontinuidad es evitable

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{sen2x}{x^2 - x^3} = 0, \; n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{sen2x}{x - x^2} = 0$$

por lo tanto, $y = 0$ es una asíntota horizontal.

g) $f(x) = \dfrac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$;

i) Como $4x^2 + 2x + 1 > 0, \; \forall x$ luego $Dom\, f = \mathbb{R}$.

ii) Raíces: $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$,

Signos $f(x) \geq 0, \; \forall x$

iii) Simetrías: no tiene

iv) Asíntotas y continuidad

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2(x-1)^2}{x\sqrt{4x^2+2x+1}}$$

$$m = 2 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x|x|\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{2}}}, \; m = 2 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\pm\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \pm 1,$$

es decir, $m_1 = 1$ cuando $x \to +\infty$ y $m_2 = -1$ cuando $x \to -\infty$, así:

$$n_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}} - x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x-1)^2 - x\sqrt{4x^2+2x+1}}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$$

$$n_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4+\dfrac{2}{x}-2x\sqrt{1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}}}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\sqrt{1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}}} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2}{x}-4}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-1-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{4x^2}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}}\right)} + (-2)$$

$$n_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}}\right)} - 2 =$$

$$-\frac{1}{4}-2=-\frac{9}{4}$$

así $y = x - \dfrac{9}{4}$; nótese que $n_1' = \lim\limits_{x\to\infty^-}[f(x)-x]$ no existe análogamente se obtiene:

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}} + x\right) = \frac{9}{4}$$

y $n_2 = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ no existe.

Intersecciones de $f(x)$ con las asíntotas, $-x+\dfrac{9}{4} = \dfrac{2(x^2-2x+1)}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$ como el 2° miembro es positivo ó 0 entonces $-x+\dfrac{9}{4} \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq \dfrac{9}{4}$

de donde resolviendo la ecuación resultan $x_1 \cong 1.89$ $x_2 \cong$ -0.048 (las dos válidas).

Análogamente $x - \dfrac{9}{4} = \dfrac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$; $x \geq \dfrac{9}{4}$, resultan las mismas x_1 =1.89 x_2 = -0.048 que se descartan porque no satisfacen $x \geq \dfrac{9}{4}$, por lo tanto, no hay intersección.

Además: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

h) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2 + senx}{x+1}$

i) $Dom\, f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

ii) Raíces: $f(x) = 0 \iff senx = 2 - 3x^2$, de donde graficando por separado $senx$ y $2 - 3x^2$ las raíces de $f(x)$ se encuentran para los puntos en que dichos gráficos se intersecan.

Signos:

$$\begin{array}{ccccccc} - & \circ & + & \bullet & - & \bullet & + \\ \hline & -1 & & -0.9704 & & 0.68 & \end{array}$$

iii) Simetrías: no tiene

iv) Asíntotas y continuidad:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \wedge \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

luego en $x = -1$ hay una asíntota vertical

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - 2 + senx}{x^2 + x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{senx}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x}} = 3$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^2 - 2 + senx}{x+1} - 3x \right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^2 - 2 + senx - 3x^2 - 3x}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{senx}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}} = -3 \quad \text{luego} \quad y = 3x - 3$$

es una asíntota oblicua, además nótese que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2 - 2 + senx}{x+1} \to \infty^{\pm}$. Estudiemos las intersecciones de la curva con su asíntota oblicua, si las hay.

Así entonces: $\dfrac{3x^2 - 2 + senx}{x+1} = 3x - 3 \Longleftrightarrow senx = -1 \Longleftrightarrow x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ (infinitas intersecciones).

i) $f(x) = \dfrac{1 - cos\frac{\pi}{2}(1+x)}{1 - x^2}$

i) $Domf = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

ii) Raíces y Signos:

$$1 - cos\frac{\pi}{2}(1+x) = 0 \Longleftrightarrow x = 4k - 1,\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0$$

obsérvese que $1 - cos\frac{\pi}{2}(1+x) \geq 0,\ \forall x \in Domf$ luego los signos dependen únicamente del denominador.

O sea: $\begin{array}{ccccc} - & \circ & + & \circ & - \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$

iii) No tiene simetrías.

iv) Discontinua en $x = \pm 1$, determinemos de que tipo, para lo cual calculamos:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \to -\infty \wedge \lim_{x\to 1^-} f(x) \to +\infty$$

luego es inevitable para $x = 1$, en cambio para $x = -1$, se tiene

$$\lim_{x\to -1} \frac{1 - cos\left[\frac{\pi}{2}(1+x)\right]}{1-x^2} = \lim_{x\to -1} \frac{sen\left[\frac{\pi}{2}(1+x)\right]}{\frac{\pi}{2}(1+x)}.$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{sen\left[\frac{\pi}{2}(1+x)\right]}{(1-x)\left[1+cos\left[\frac{\pi}{2}(1+x)\right]\right]} = 0$$

la discontinuidad es evitable.

Observación Nótese la similitud de las funciones dadas en f) y en i) y quizás con b)

40. Las funciones que se dan a continuación son discontinuas en $x = 0$. Definir la función en dicho punto de tal manera que sea continua, si es posible.

a) $f(x) = \dfrac{(1+x)^{n-1} - 1}{x}$; $n \in \mathbb{N}$

b) $f(x) = \dfrac{log(1+x) - log(1-x)}{x}$

Solución.

a) Calculemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{n-1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + nx + \frac{1}{2!}n(n-1)x^2 + \cdots + x^{n-1} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(n + \frac{1}{2!}n(n-1)x + \cdots + x^{n-2}\right) = n, \text{ así } f(0) = n$$

b) Análogamente: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log(1+x) - log(1-x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} log \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} =$

$log \left[\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = loge^2 = 2$; en virtud al ejercicio resuelto N° 30, β con $a = 1$, así $f(0) = 2$

41. Dada

$$f(x) = \begin{cases} 8x & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^3 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ 4 - 2x & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \\ x^2 - 11 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

estudie la continuidad de esta función y grafique.

Solución.

De inmediato $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -2$ luego es continua en $x = 0$ y $x = 3$ como también $\forall x,\ x \ne 1$,
ahora como: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-2x + 4) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^3 = 1$

luego como estos límites son distintos, no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, por lo tanto, es discontinua inevitable en $x = 1$.

42. Determine los valores A y B para que la función

$$f(x) = \begin{cases} -2senx & \text{si} \quad x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ Arcsenx + B & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ cosx & \text{si} \quad x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$. Grafique.

Solución.

Debe cumplirse

a) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ así se tiene:

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} (-2senx) = 2 = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} (A\, senx + B)$

de donde: $-A + B = 2$ $(1')$ en forma análoga:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (A\, senx + B) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} cosx = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

de donde: $A + B = 0(2')$, resolviendo el sistema formado por $(1')$ y $(2')$ se obtiene $A = -1$ y $B = 1$ que son los valores indicados para que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ así queda

$$f(x) = \begin{cases} -2senx & \text{si} \quad x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 1 - senx & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ cosx & \text{si} \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

43. Averiguar si son continuas y construya el gráfico de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{1 + x^n}$, $x \geq 0$

b) $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} (x\, Arc\, tg\, nx)$

Solución.

a) Es discontinua en $x = 1$, ya que

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1^n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = 0$$

la discontinuidad es inevitable.

b) Nótese que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2}x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

por tanto $f(x)$ es continua $\forall x \neq 0$, debemos estudiar su continuidad en $x = 0$, luego

1) $f(0) = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0$

2) $$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to o^+} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\pi}{2}x = 0 \\ \lim\limits_{x\to o^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(-\dfrac{\pi}{2}x\right) = 0 \end{cases},$$

luego $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$, finalmente $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

44. Estudiar la continuidad de:

a) $f(x) = \dfrac{x - |x|}{x}$

b) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+nx}$

c) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$

Solución.

a) Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x-x}{x} = 0$ si $x = 0, f(x)$ no esta definida, si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{x-(-x)}{x} = 2$, luego $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, por lo tanto, la discontinuidad es inevitable.

b) Nótese que $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0}{1+0} = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+nx} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{\frac{1}{n}+x} = 1$, $\forall x \neq 0$, así:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

entonces en $x = 0$ hay una discontinuidad evitable, o sea queda:

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+nx} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

c) consideremos tres casos:

i) $|x| > 1$, en este caso $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = \infty$, luego

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x^{2n}}}{1 + \dfrac{1}{x^{2n}}} = 1$$

ii) $|x| < 1$, en este caso $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = 0$ por lo tanto, $f(x) = -1$.

iii) $x = \pm 1$ en este caso $x^{2n} = 1$ para todo n, por lo tanto $f(x) = 0$ así la función puede escribirse

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| > 1 \\ -1 & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = \pm 1 \end{cases}$$

la que es evidentemente discontinua inevitable en $x = \pm 1$.

45. Haciendo uso del método de sustituición de un infinitesimal por otro equivalente (es decir, mediante 4.3*), hallar los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{sen7x}{log(1+2x)}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{log(1+sen4x)}{e^{sen5x}-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{Arc\,tg\,3x}{Arc\,sen2x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{1-cos\frac{x}{2}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3senx-x^2+x^3}{tgx+2senx+5x^4}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{sen4x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-cosx}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$

Solución.

a) Tenemos: $sen7x \sim 7x$; $log(1+2x)\sim 2x$; así:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen7x}{log(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{2x}=\frac{7}{2}$$

b) Tenemos: $log(1+sen4x)\sim sen4x\sim 4x$

$(e^{sen5x}-1)\sim sen5x\sim 5x$; por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{log(1+sen4x)}{e^{sen5x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{5x}=\frac{4}{5}$$

c) Análogamente: $Arctg3x\sim 3x$; $Arcsen2x\sim 2x$, así:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Arctg3x}{Arcsen2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

d) $(1-cosx)\sim\dfrac{x^2}{2}$; $\left(1-cos\dfrac{x}{2}\right)\sim\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}=\dfrac{x^2}{8}$; así:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{1-cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{8}}=4$$

e) $senx \sim x$; $tgx \sim x$; por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3senx - x^2 + x^3}{tgx + 2senx + 5x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{3x - x^2 + x^3}{x + 2x + 5x^4} = 1$$

f) $(\sqrt{1+x+x^2} - 1) \sim \dfrac{x+x^2}{2} \sim \dfrac{x}{2}$; $sen4x \sim 4x$, así:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{sen4x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{4x} = \frac{1}{8}$$

g) $(\sqrt{1+x^2} - 1) \sim \dfrac{x^2}{2}$; $(1 - cosx) \sim \dfrac{x^2}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

h) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}-1} + \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}-1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}-1}$$

como: $\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-1\right) \sim \dfrac{\frac{x}{3}}{3} = \dfrac{x}{9}$; $\left(\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}-1\right) \sim \dfrac{\frac{x}{4}}{4} = \dfrac{x}{16}$

y $\left(\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}-1\right) \sim \dfrac{-\frac{x}{2}}{2} = -\dfrac{x}{4}$, se tiene que

$$= -\frac{\frac{x}{9}}{-\frac{x}{4}} + \frac{\frac{x}{16}}{-\frac{x}{4}} = \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{7}{36}.$$

4.13. Ejercicios Propuestos

1. Comprobar usando directamente la definición, que las funciones:

   a) $f(x) = ax + b$

b) $f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = Arc\,tgx$

son continuas en $\mathbb{R}$.

2. *a*) Demostrar que toda función continua que cambia de signo tiene al menos una raíz.

   b) Demostrar que la ecuación $6x^3 - 2x^2 + 5x + 6 = 0$ tiene una solución entre -1 y 0.

   c) La ecuación $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2 = 0$ tiene cuatro soluciones reales; encontrar cuatro intervalos cada uno de los cuales contenga exactamente una de ellas.

   d) Tiene alguna raíz la ecuación $senx - x + 1 = 0$.

3. Demostrar que una ecuación algebraica cualquiera de una potencia impar con coeficientes reales

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}x + a_{2n+1} = 0$$

tiene al menos una raíz real.

4. Sea la función $f(x)$ continua en $[a,b]$ y la ecuación $f(x) = 0$ tiene un número finito de raíces en $[a,b]$. Disponiéndolas en la forma: $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$.

   Demostrar que en cada uno de los intervalos

$$(a,x_1),\ (x_1,x_2),\ (x_2,x_3), \cdots, (x_n,b)$$

la función $f(x)$ mantiene el mismo signo.

5. A una torta circular de radio R se le corta un trozo de ángulo del centro θ; el trozo es colocado en un plano de radio r. ¿Cuál grande debe ser r (en función de θ)?. ¿Es la función continua enθ?

   Indicación:

   Considerar separadamente: $\theta = 0$; $0 < \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ y $\pi < \theta < 2\pi$.

   Respuesta.

   r es función continua de θ, excepto para $\theta = 0$.

6. Hacer ver, mediante un raciocinio basado en argumentos de continuidad, que en todo instante hay en la superficie de la tierra dos puntos que son antipodales entre si y que tienen la misma temperatura y presión barométrica.

7. Dada la función en el intervalo $[-2, 2]$, por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si} \quad -2 \leq x < 0 \\ \\ -(x^2 + 2) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   ¿Existe algún punto en este intervalo tal que $f(x) = 0$?

8. Demostrar que en un intervalo cualquiera $[a, b]$ de longitud mayor que la unidad, la función $f(x) = x - [x]$ alcanza su valor mínimo pero nunca su valor máximo.

9. Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \\ -x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

   es discontinua en el punto $x = 0$ y tiene el valor máximo y el valor mínimo en $[-1, 1]$.

10. Encuentre una función que toma todo valor y para $0 \leq y \leq 1$ una y sola una vez para valores de x en $[0,1]$ y que es discontinua para alguno (s) en $[0,1]$.

11. Mediante razonamiento de $\xi - \delta$, demostrar que la función $f(x) = x^2$ es continua para $x = 5$. Determinar el valor de δ para valores de

    $\xi : 1;\ 0,1;\ 0,01;\ 0,001; \cdots$

    Respuesta.

    $\delta = \text{mín} \quad \left(\dfrac{\xi}{11}; 1\right).$

12. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $\xi = 0,001$. Para los valores $x_0 = 0,1;\ 0,01;\ 0,001; \cdots$ Hallar los números positivos más grandes δ, tales que de la desigualdad $|x - x_0| < \delta$ se deduzca la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < \xi$.

    Respuesta.

    a) $\delta = 10^{-5}$ b) $\delta = 10^{-7}$ c) $\delta = 10^{-9}$

13. Se necesita hacer una placa metálica cuadrada de lado $x_0 = 10cm$. ¿Entre que límites se puede alterar el lado x de esta placa si su área $y = x^2$ puede diferenciarse de la proyectada $y_0 = 100cm^2$ no más de:

    a) $\pm 1cm^2$ b) $\pm 0.1cm^2$ c) $\pm 0.001cm^2$ d) $\pm \xi cm^2$

    Respuesta.

    a) $9.95 < x < 10.05$ b) $9.995 < x < 10.005$

    d) $\sqrt{100 - \xi} < x < \sqrt{100 + \xi}$

14. En que entorno máximo del punto $x_0 = 100$ la ordenada de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ se diferencia de la ordenada $y_0 = 10$ en una cantidad

menor que 10^{-n}; $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$?. Calcular la amplitud de este entorno para $n = 0, 1, 2, 3$.

Respuesta.

$$100[1 - 10^{-(n+1)^2}]^2 < x < 100[1 + 10^{-(n+1)}]^2$$

15. Usa la desigualdad $|senx| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, para demostrar que la función seno es continua en $x = 0$. Usar este hecho, junto con la fórmula.

$$sen\alpha - sen\beta = 2\, sen\frac{\alpha - \beta}{2}\, cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

para demostrar que la función seno es continua en cualquier punto de $\mathbb{R}$.

16. Demostrar que si un polinomio de grado para alcanza al menos un valor cuyo signo sea opuesto al del coeficiente del término de mayor potencia del polinomio entonces, éste tiene al menos dos raíces reales.

17. Demostrar, partiendo de la definición del límite de una función (en términos de $\xi - \delta$, $\xi - M$, etc.) que:

a) $\lim\limits_{x \to -2} (4x - 3) = -11$

b) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 + 5x - 1) = 6$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2}{3}$

d) $\lim\limits_{x \to a} cosx = cosa$

e) $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} [x] = 1$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} Arctgx = \dfrac{\pi}{2}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$

h) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 sen\dfrac{1}{x} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty \ (a > 1)$

j) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2$

k) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x + \dfrac{1}{2}}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}$

18. Si $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ probar que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{3}{5}$. Encuentre el valor de δ tal que $0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \dfrac{3}{5}| < 0.001$.

19. Demuestre que ninguno de los siguientes límites existe.

    a) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x(x-1)}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$

    c) $\lim\limits_{x\to 0} sen\dfrac{1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{senx}{|senx|}$

    e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} tg\dfrac{1}{x}$

20. Demuestre que:

    a) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

    b) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1 \wedge \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_2 \Longrightarrow L_1 = L_2$

    c) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - L) = 0$

21. Comprobar que la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ tiene en $[0, \infty]$ el ínfimo $m = 0$ y el supremo $M = 1$.

    Una función $f(x)$ está definida y es monótona creciente en $[a, b]$. ¿A qué son iguales el ínfimo y el supremo de dicha función en $[a, b]$?

    Respuesta.

    $f(a)$ y $f(b)$.

    Nota: Recordemos (Ejercicios Algebra I, mismo autor), que:

    El número $m = \inf_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$ se llama ínfimo de la función $f(x)$ en (a, b)
    El número $M = \sup_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$ se llama supremo de la función $f(x)$ en (a, b)

22. Determinar el ínfimo y el supremo para las funciones

a) $f(x) = x^2$ en $[-2, 5]$ b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ en $(0, +\infty)$

c) $f(x) = senx + cosx$ en $[0, 2\pi]$ d) $f(x) = [x]$
i) en $(0, 2)$ y
ii) en $[0, 2]$

e) $f(x) = x - [x]$ en $[0, 1]$

Respuesta.

a) 0; 25 b) 2; no tiene c) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ d) i) 0; 1

ii) 0; 2 e) 0; 1

23. Sea

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}$$

donde $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$. Demostrar

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad n = m \\ 0 & \text{si} \quad n < m \end{cases}$$

24. Calcular los siguientes límites

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$

$b)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$, $(a>b)$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^3}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$

h) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$, $(n\in\mathbb{N})$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ $m,n\in\mathbb{N}$

j) $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to \infty^+} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

l) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

m) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

n) $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$

Respuesta.

a) 10 b) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$ c) $\dfrac{1}{2}$

d) 0 e) $\dfrac{1}{4a\sqrt{a-b}}$ f) $\dfrac{1}{2}$

g) $\dfrac{1}{2}n(n+1)$ h)$\dfrac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}$ i) $\dfrac{1}{2}(m-n)$

j) $\dfrac{1}{2}$ k) 1 l) $-\dfrac{1}{16}$

m) $\dfrac{1}{144}$ n) -2 o) $-\dfrac{1}{2}$

25. Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x},\ m,n\in\mathbb{N}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x} m,n\in\mathbb{N}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x},\ n\in\mathbb{N}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x},\ n\in\mathbb{N}$

k) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$

Respuesta.

a) $\dfrac{\alpha}{m}-\dfrac{\beta}{n}$ b) $\dfrac{\alpha}{m}+\dfrac{\beta}{n}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{4}{3}$ e) $2n$

f) $\dfrac{2}{9}$ g) $\dfrac{1}{2}$ h) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ i) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ j) $\dfrac{1}{n}$

k) $\dfrac{5}{3}$

26. Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{tg\,2x}{sen3x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{senx}-\frac{1}{tgx}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tgx$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{sen(a+x)+sen(a-x)-2sena}{x^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+cosx}}{sen^2x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2-4)\,sen\frac{1}{x-2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2sen^2x+senx-1}{2sen^2x-3senx+1}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{tg(\alpha+2x)-2tg(\alpha+x)+tg\alpha}{x^2}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}tg\,2x\,tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{cosx-cos3x}{x^2}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx\,cos2x\,cos3x}{1-cosx}$

$l)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+senx}}{x^3}$

$m)$ $\lim\limits_{x\to\infty^+} (sen\sqrt{x+1}-sen\sqrt{x})$

$n)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{cosx}}{1-cos\sqrt{x}}$

$\tilde{n})$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-cotg^3x}{2-cotgx-cotg^3x}$

$o)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Arc\,cos(1-x)}{\sqrt{x}}$

$p)$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+tgx}{1+senx}\right)^{cosec^3x}$

$q)$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}sen\,\pi x}{(1-x^2)(1-\sqrt{x})}$

Solución.

a) $\dfrac{2}{3}$ b) 0 c) 1 d) $-sena$ e) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$

f) 0 g) -3 h) $\dfrac{2sen\alpha}{cos^3\alpha}(\alpha\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z})$ i) $\dfrac{1}{2}$ j) 4

k) 14 l) $\dfrac{1}{4}$ m)0 n) 0 o) $\dfrac{3}{4}$

p) $\sqrt{2}$ q) $\sqrt{e}$ r) 0

27. Hallar los siguientes límites:

$a)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\dfrac{x^3}{1-x}}$

$b)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\dfrac{x-1}{x+1}}$

$c)$ $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$

$d)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$

$e)$ $\lim\limits_{x\to 1} (1+sen\pi x)^{cotg\pi x}$

$f)$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{cosx}{cos2x}\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$

$g)$ $\lim\limits_{x\to 0} \left[tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{cotgx}$

$h)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(sen\dfrac{1}{x}+cos\dfrac{1}{x}\right)^x$

$i)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[x]{cos\sqrt{x}}$

$j)$ $\lim\limits_{x\to\infty} cos^n \dfrac{x}{\sqrt{n}}$

$k)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log\left(tg\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)\right)}{sen\, bx}$

$l)$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$

$m)$ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $(a>0)$

$n)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{log(2+e^{3x})}{log(3+e^{2x})}$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} tg^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{sen\alpha x-sen\beta x}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\dfrac{1}{x}}$; $a,b,c,\in\mathbb{R}^+$

r) $\lim\limits_{x\to\infty^+} log(1+2^x)log(1+\dfrac{3}{x})$

Respuesta.

a) 0	b) 1	c) e^{-2}	d) e^{2a}	e) e^{-1}
f) $e^{3/2}$	g) e^{-2}	h) e	i) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	j)$e^{-\dfrac{x^2}{2}}$
k) $\dfrac{2a}{b}$	l) $a^a log\left(\dfrac{a}{e}\right)$	m) $a^x log^2 a$	n) $\dfrac{3}{2}$	o) e^2
p) 1	q) $\sqrt[3]{abc}$	r) $log(8)$		

28. Calcular los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[log(xlog(a))\cdot log\left(\dfrac{log(ax)}{log(\dfrac{x}{a})}\right)\right]\ (a>1)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos(xe^x)-cos(xe^{-x})}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{coshx-1}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{senh\sqrt{x^2+x}-senh\sqrt{x^2-x}}{cosh}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+senx-cosx}{1-senx-cosx}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{sen2x}-e^{senx}}{tghx}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}{Arctg(1+x)-Arctg(1-x)}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} Arc\,tg\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\,cos(\sqrt{x^2+x}-x)$

j) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

Respuesta.

a) $log(a^2)$ b) -2 c) $\dfrac{1}{2}$ d) $2\,senh\dfrac{1}{2}$ e) -1

f) 1 g) 2 h) $\dfrac{3}{4}\pi$ i) $\dfrac{\pi}{3}$ j) 1

29. Hallar las constantes a y b de la condición

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$$

Respuesta.

$a=1, \qquad b=-1$

30. Hallar las constantes a_i y b_i $(i=1,2)$ de las condiciones:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=0$$

y

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0$$

Respuesta.

$a_i=\pm 1; \qquad b_i=\mp\dfrac{1}{2}\ (i=1,2).$

31. Hallar las asíntotas y hacer el gráfico de las siguientes curvas:

a) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x-2}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$

d) $f(x) = log(1 + e^x)$

Respuesta.

a) $x = 1,\ x = -2,\ y = x - 1$ si $x \to -\infty,\ y = -x - \dfrac{1}{2}$

b) Si $x \to +\infty,\ y = x + \dfrac{1}{2}$

c) $y = \dfrac{1}{3} - x$

d) Si $x \to -\infty,\ y = 0$. Si $x \to +\infty,\ y = x$

32. Estudiar la continuidad y bosquejar la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ A & \text{si} \quad x = 2,\ A \text{ por determinar} \end{cases}$

b) $f(x) = \left| \dfrac{senx}{x} \right|$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$

c) $f(x) = \dfrac{senx}{|x|}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$

d) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$

e) $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$

f) $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$

$g)$ $f(x) = Arc\,tg\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}\right)$

$h)$ $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ 4 - x & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$

$i)$ $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^3}$

$j)$ $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

$k)$ $f(x) = \left(1 - \dfrac{|x|}{x}\right)x + \left(1 + \dfrac{|x|}{x}\right)sen x$

$l)$ $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

$m)$ $f(x) = x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

$n)$ $f(x) = [x] sen\, \pi x$

$\tilde{n})$ $f(x) = x^2 - [x^2]$

$o)$ $f(x) = (-1)^{[x^2]}$

$p)$ $f(x) = \dfrac{(x-3)^3}{(x-2)^2}$

Respuesta.

$a)$ Es continua si $A = 4$ y es discontinua para $x = 2$ si $A \neq 4$.

$b)$ Es continua.

c) Es discontinua para $x = 0$.

d) Es continua.

e) Es discontinua para $x = k^2,\ k \in \mathbb{Z}$.

f) $x = 0$ y $x = 1$ son puntos de discontinuidad evitable; $x = -1$ es una discontinuidad infinita, por lo tanto inevitable.

g) $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ son puntos de discontinuidad de primera especie.

h) Es continua.

i) Discontinua evitable en $x = -1$.

j) $x = 0$ es un punto de discontinuidad de segunda especie.

k) Es continua.

l) Discontinua evitable en $x = 0$.

m) $x = \dfrac{1}{k}(k \in Z)$ son puntos de discontinuidad inevitable. $x = 0$ es punto de discontinuidad evitable tiende a 1. (Ver ejercicio resuelto N° 14 b) del capítulo 2).

n) La función es continua.

o y p) $x = \pm\sqrt{k} \quad (k \in \mathbb{N})$ son puntos de discontinuidad de primera especie.

(q) Discontinua inevitable en $x = 2$.

33. Estudiar la discontinuidad y construir los gráficos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$

b) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$

c) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} cos^{2n}x$

d) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} [x\,Arctg(n\,cotgx)]$

e) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{1+(2senx)^{2n}}$

f) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-n^2x^2}$

Respuesta.

a) $x = 0$ punto de discontinuidad de primera especie.

b) $y = 1$, si $|x| \leq 1$; $y = x^2$ si $|x| > 1$ y continua.

c) $y = 0$, si $x \neq k$; $y = 1$ si $x = k\pi$ $(k \in Z)$; $x = k\pi$ son puntos de discontinuidad de primera especie.

d) $y = \dfrac{\pi}{2}x$ si $k\pi < x < k\pi + \dfrac{\pi}{2}$; $y = -\dfrac{\pi}{2}x$ si $k\pi + \dfrac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi$; $y = 0$ si $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$; $x = \dfrac{k\pi}{2}$ son puntos de discontinuidad de primera especie.

e) $$y = \begin{cases} x & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{6} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ 0 & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{6} + k\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

$x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$ son discontinuidad de primera especie $(k \in \mathbb{Z})$.

34. Estudie la gráfica de las funciones compuestas $f\,o\,g$ y $g\,o\,f$, señalando sus puntos de discontinuidad, para:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ -1 & \text{si} \quad x<0 \end{cases} \ \wedge\ g(x)=x(1-x^2)$$

$$b)\ f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x|\leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x|>1 \end{cases} \ \wedge\ g(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si} \quad |x|\leq 2 \\ 2 & \text{si} \quad |x|>2 \end{cases}$$

$$c)\ f(x)=\frac{x+|x|}{2} \qquad g(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ x^2 & x\geq 0 \end{cases}$$

35. Estudiar la continuidad de la función compuesta $y=f(u)$ donde $u=\o(x)$, si

$$f(u)=\begin{cases} u & \text{si} \quad 0<u\leq 1 \\ 2-u & \text{si} \quad 1<u<2 \end{cases} \qquad \o(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x \text{ es racional} \\ 2-x & \text{si} \quad x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Respuesta.

$f(\o(x))=x$

36. La figura que se indica está formada por un triángulo y 2 rectángulos. La función $A=A(y)(0<y<+\infty)$ representa el área de la parte de dicha figura que está comprendida entre las rectas paralelas $Y=0$ e $Y=y$. La función $log=log(y)(0\leq y<+\infty)$ es la longitud de la sección de la figura por la recta $Y=y$. Hallar las expresiones analíticas de las funciones A y L, construir sus gráficas y estudiar su continuidad.

Respuesta.

$$A = 3y - \frac{1}{2}y^2 \quad ; \quad L = 3 - y \quad \text{si} \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$A = \frac{1}{2} + 2y \quad ; \quad L = 2 \quad \text{si} \quad 1 < y \leq 2$$

$$A = \frac{5}{2} + y \quad ; \quad L = 1 \quad \text{si} \quad 2 < y \leq 3$$

$$A = \frac{11}{2} \quad ; \quad L = 0 \quad \text{si} \quad 3 < y < \infty^+$$

A es continua y L es discontinua (Primera especie) en 2 y 3.

37. Es obligatoriamente discontinua en un punto dado x_0 el producto de dos funciones $f(x) \cdot g(x)$ si:

    a) La función $f(x)$ es continua y la función $g(x)$ es discontinua en este punto.

    b) Ambas funciones son discontinuas en dicho punto x_0.

38. ¿Se puede afirmar que el cuadrado de una función discontinua es también una función discontinua?

    Respuesta.

    No.

39. Demostrar que todos los puntos de discontinuidad de una función monótona acotada son puntos de discontinuidad de primera especie.

40. Comprobar que la función $f(x) = sen\dfrac{1}{x-a}$ si $x \neq a$ y $f(a) = 0$, toma en cualquier intervalo $[a, b]$ todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ sin embargo, no es continua en $[a, b]$.

41. Demuestre que:

$arc\,cos x + arc\,cos y = (-1)^{\xi}\ arc\,cos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) + 2\pi\xi$

$(|x| \leq 1,\ |y| \leq 1)$; donde

$\xi = 0$ si $x + y \geq 0$ y $\xi = 1$ si $x + y < 0$ (justifique).

42. ¿Toma la función $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - sen\pi x + 3$ el valor $\dfrac{7}{3}$ dentro del intervalo $[-2, 2]$.

    Respuesta.

    Si.

43. Demostrar que si un polinomio de grado par alcanza al menos un valor cuyo signo sea opuesto al del coeficiente del término de mayor potencia del polinomio, entonces este tiene al menos dos raíces reales.

44. Demostrar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una raíz positiva menor que la unidad.

45. *a*) Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} (cos\,\pi x)^{2n}$ existe para cada valor de x y es igual a 1 ó a 0 según que sea x entero o no lo sea.

    b) Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} [\lim\limits_{m\to\infty} (cos n\,!\pi x)^{2m}]$ existe para cada valor de x y es igual a 1 ó 0 según sea x racional o irracional.

    c) Examínese la continuidad de estas funciones límite.

    Respuesta.

    c) La función dada en (a) es continua $\forall x \neq k,\ k \in \mathbb{Z}$ y la función dada en (b) no es continua en ninguna parte.

46. Defina $f(x)$ en los puntos de discontinuidad de modo que f resulte continua (si es posible).

a) $f(x) = x\, sen\dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}cosx - 1}{1 - tg^2x}$

e) $fx) = \dfrac{1}{x - [x]}$

f) $f(x) = [x] + [-x]$

g) $f(x) = x^3 + \left[\dfrac{1}{x^2 + 1}\right]$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$

i) $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}$

47. Sea $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{x^n - 1}{x^n + 1}\right)^2$, mostrar que la función está definida $\forall x \neq -1$.

a) Encuentre el valor de $f(1)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(2)$

b) Cuál es $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

c) Para que valores de x es f continua?, es posible definir $f(-1)$ de manera que f resulte continua en (-1).

48. Estudiar la continuidad y hacer la gráfica de las funciones:

$$a)f(x) = \frac{1 - cos\frac{\pi}{2}(1-x)}{(1-x)^2} \qquad b)\, f(x) = log\left(\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}\right)$$

49. La función $f(x)$ carece de sentido en $x = 0$. Determine $f(0)$ de tal modo que $f(x)$ sea continua para $x = 0$, si:

    a) $f(x) = x^x$

    b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x^2}}$

    c) $f(x) = senx\, sen\dfrac{1}{x}$

    d) $f(x) = xlog^2(x)$

    e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

    f) $f(x) = \dfrac{1 - cosx}{x^2}$

    Respuesta.

    a) 1   b) , c) y d) 0   e) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{1}{2}$

50. Demostrar que todos los puntos de discontinuidad de una función nonótona acotada son puntos de discontinuidad de primera especie.

51. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas períodicas, definidas en $\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to\infty^+}(f(x)-g(x)) = 0$, demostrar que $f(x) \equiv g(x)$.

52. Haciendo uso del método de sustitución de un infinitesimal por otro equivalente (es decir, mediante 4.3), hallar los límites siguientes:

    a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen5x}{log(1+4x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log(cosx)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cosx+2senx-sen^3x-x^2+3x^4}{tg^3x-6sen^2x+x-5x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+senx}-1}{log(1+tg2x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log(2-cos2x)}{log^2(sen3x+1)}$

Respuesta.

a) $\dfrac{5}{4}$ b) -2 c) 2 d)$\dfrac{3}{4}$ e) $\dfrac{2}{9}$

53. Calcular $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, si:

$$f(x) = log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+b^2}}\right)$$

Respuesta.

$L\left(\dfrac{b^2}{a^2}\right)$.

54. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} Arc\,tg\dfrac{1}{1-x}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} Arc\,tg\dfrac{1}{1-x}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{log(1+e^x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{log(1+e^x)}{x}$

Respuesta.

a) $\dfrac{\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{2}$ b) 0; 1

55. Supongamos $x \to 0$, comprobar que las funciones infinitésimales

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{log(x)} \qquad \text{b) } f(x) = e^{-\dfrac{1}{x^2}}$$

son incomparables con la función $x^n (n > 0)$, cualquiera que sea n, es decir, nunca se verifica la igualdad $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = k$, donde k es una constante, distinta de cero, y n es arbitrario.

56. Supongamos que $x \to +\infty$ y que $f_n(x) = x^n (n \in \mathbb{N})$. Demostrar que:

    a) Cada una de las funciones $f_n(x)$ crece más rápidamente que la precedente $f_{n-1}(x)$.

    b) La función $g(x) = e^x$ crece más rápidamente que cada una de las funciones $f_n(x)$.

57. Dada la función:

$$f(x) = \frac{\dfrac{1}{x^2} - sen\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2} + sen\dfrac{1}{x^2}}$$

Analice la continuidad de $f(x)$. Defina $f(x)$ en los puntos donde las discontinuidades son evitables, de manera que resulte una función continua.

58. En una circunferencia dada de radio r y centro F, AB es una cuerda y C es el punto medio del arco AB. Además D y E son las intersecciones de la tangente en C con las rectas FA y FB, respectívamente, Calcular:

$$\lim_{AB \to 0} \frac{\text{Area del trapecio} ABDE}{\text{Area del sector circular} AB}$$

Respuesta.

0

59. En una circunferencia dada de radio r y centro F, AB es una cuerda y $ABCD$ es un rectángulo inscrito en la circunferencia. Calcular:

$$\lim_{AB \to 0} \frac{\text{Area sector circular} AFB}{\text{Area Rectángulo} ABCD}$$

Respuesta.

$\frac{1}{4}$

60. Determine las asíntotas de: $f(x) = \sqrt{1+x^2} + 2x$.

Respuesta.

x y $3x$.

61. Para AB cuerda de una circunferencia dada de centro O, calcular:

$$\lim_{AB \to 0} \frac{\text{Area segmento circular } AB}{\text{Area sector circular } AOB}$$

(Segmento circular: región encerrada entre cuerda AB y arco AB).

Respuesta.

1

62. Calcule

$$\lim_{x \to 0} (Arc\,tg\,x) \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right)$$

Respuesta.

0

63. *a*) Probar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen|x|^r}{|x|_s^5} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{1 - cos|x|^r}{|x|_s^{25}}$$

b) Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos(1 - cosx)}{x^4}$$

Respuesta.

b) $\frac{1}{8}$