Capítulo 3

Sucesiones. Límite de una sucesión

3.1. Introducción

La noción de sucesión es un instrumento importante para el estudio de un gran número de problemas relativos a las funciones. Una sucesión es, simplemente, una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ representadas usualmente por a_n que se llama elemento n-ésimo de la sucesión y se escribe: $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$

Diremos que una sucesión $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ es convergente al **límite** α, o que converge a α, cuando $n \rightarrow \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ si para cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$ tal que se cumpla la desigualdad $|a_n - \alpha| < \varepsilon$, $\forall\, n > N(\varepsilon)$ (léase: a_n tiende a α cuando n tiende a (más) infinito) si una sucesión no tiene límite, se dice que es divergente.

3.2. Teoremas Básicos

Si las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ son convergentes, entonces:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$

Si $\beta = 0 \wedge \alpha \neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ no existe.

Si $\beta = 0 \wedge \alpha = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ puede o no existir

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\gamma} = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^{\gamma} = \alpha^{\gamma}$, para $\gamma \in \mathbb{R}$ si α^{γ} existe.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma^{a_n} = \gamma^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \gamma^{\alpha}$, para $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$ si γ^{α} existe.

La demostración de estos teoremas son inmediatos por medio de la definición de convergencia.

Asismismo, dichos teoremas muestran que cualquier conjunto finito de operaciones matemáticas elementales efectuadas con los elementos n-ésimos de un cierto número de sucesiones convergentes dadas, se **conserva** en el límite: la sucesión resultante será convergente y su límite se obtendrá llevando a cabo el mismo conjunto de operaciones con los correspondientes límites de las sucesiones dadas (con la habitual condición de que ningún denominador sea nulo).

3.3. Criterios de convergencia

1. **Teorema de Bolzano-Weierstrass**.

   Una sucesión monótona y acotada tiene un límite finito.

2. **Teorema del Sandwich**.

   Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$; ($L$ puede ser finito, $+\infty \veebar -\infty$)

3.4. Problemas Resueltos

1. Usando la definición del límite de una sucesión, demostrar que

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{3}{5}$, donde:

a) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{7}{9}, \cdots$

b) $1, \dfrac{13}{19}, \dfrac{28}{44}, \dfrac{49}{79}, \cdots$

Solución.

a) Nótese que $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$

Sea $\varepsilon > 0$, se trata de encontrar un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$ se cumpla $|a_n - 1| < \varepsilon$. Para lo cual trabajamos con $\left|\dfrac{2n-1}{2n+1} - 1\right| = \left|\dfrac{-2}{2n+1}\right| = \dfrac{2}{2n+1}$ deberá cumplirse que $\dfrac{2}{2n+1} < \varepsilon$ de donde $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{1}{2}$. De aquí la parte entera del número $\dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{1}{2}$ se puede tomar como N, es decir $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{1}{2}\right]$.

Así, $\forall \varepsilon > 0$, $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{1}{2}\right] : \forall n > N \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$, lo que significa: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Procediendo en forma análoga y notando que $b_n = \dfrac{3n^2+1}{5n^2-1}$ tenemos que $\left|\dfrac{3n^2+1}{5n^2-1} - \dfrac{3}{5}\right| = \dfrac{8}{5(5n^2-1)}$; sea dado $\varepsilon > 0$, de aquí se obtiene $n^2 > \dfrac{8}{25\varepsilon} + \dfrac{1}{5}$; $n > \dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}$; haciendo $N = \dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}$ se tiene que $\forall\, n > N, \left|b_n - \dfrac{3}{5}\right| < \varepsilon$.

Por ejemplo si $\varepsilon = 0.02 \implies N = 4$, y todos los términos de la sucesión empezando en el quinto , estan contenidos en el intervalo $\left(\dfrac{3}{5} - 0.02,\ \dfrac{3}{5} + 0.02\right) = (0.58,\ 0.62)$.

2. Demostrar que $L = 0$ no es el límite de la sucesión cuyo término general es $a_n = \dfrac{n-1}{2n+5}$.

   Solución.

   Nótese que $\left|\dfrac{n-1}{2n+5} - 0\right| = \left|\dfrac{n-1}{2n+5}\right| > \dfrac{1}{10}$, $\forall\, n > 1$ con lo que el valor absoluto de la diferencia permanece mayor que el número constante $\dfrac{1}{10}$, por lo tanto existe $\varepsilon > 0$; $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ tal que: $|a_n - 0| > \dfrac{1}{10}$ se mantiene cierta $\forall\, n > 1$.

   Así esto es suficiente para demostrar que $L = 0$ no es el límite de la sucesión en cuestión.

3. Demuestre aplicando la definición de límite que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^r} = 0$, donde $r = \dfrac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}$.

   Demostración.

   Por demostrar que $(\forall\, \varepsilon > 0) n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Longrightarrow \left|\dfrac{1}{n^r}\right| < \varepsilon$ (ya que el límite es nulo), en efecto:

   Sea $\varepsilon > 0$, (por propiedad Arquimediana) existe un $N \in Z^+$ tal que $N > \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^q$ luego $n > N \Longrightarrow n > \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^q \Longrightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon^q \Longrightarrow \left(\dfrac{1}{n}\right)^q < \varepsilon \Longrightarrow \left|\dfrac{1}{n^{1/q}}\right| < \varepsilon \Longrightarrow \left|\dfrac{1}{n^r}\right| < \varepsilon$.

4. Si $|r| < 1$, demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} n\, r^n = 0$.

   Demostración.

   Considerando el caso $0 < r < 1$; $h = \dfrac{1}{r} - 1 > 0$ y como $(1+h)^n = 1 + nh + \dfrac{n(n-1)}{2}\, h^2 + \cdots \geq 1 + nh + \dfrac{n(n-1)}{2} h^2$; ahora $(1+h) = \dfrac{1}{r}$, luego:

$$\left(\frac{1}{r}\right)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \Longrightarrow 0 \leq r^n \leq \frac{1}{1 + nh + \dfrac{n(n-1)}{2}h^2}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq nr^n \leq \frac{n}{1 + nh + \dfrac{n(n-1)}{2}h^2} \quad \text{como} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1 + nh + \dfrac{(n-1)n}{2}h^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{h}{n} + \dfrac{h^2}{2} - \dfrac{h^2}{2n}} = \frac{0}{\dfrac{h^2}{2}} \text{ ; con lo que } \lim_{n\to\infty} n\, r^n = 0$$

(sandwich).

(Considere Ud. los otros casos).

5. Dada la sucesión $\frac{1}{5}, \frac{5}{10}, \frac{5}{15}, \frac{9}{20}, \frac{9}{25}, \frac{13}{30}, \frac{13}{35}, \cdots$ Encuentre su término n-ésimo a_n y demuestre por definición que su límite es $2/5$.

Solución.

Observemos que $a_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n}$.

Sabemos que a_n tiene por límite "L" sii $(\forall\, \varepsilon > 0)(n \in Z^+)(\forall\, n > N)(|a_n - L| < \varepsilon)$.

Por determinar N tal que $n > N$, dado $\varepsilon > 0$, como:

$$\left|a_n - \frac{2}{5}\right| = \left|\frac{2n + (-1)^n}{5n} - \frac{2}{5}\right| = \left|\frac{2n + (-1)^n - 2n}{5n}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{5n}\right| = \frac{1}{5n}$$

con lo que $\dfrac{1}{5n} < \varepsilon \Longrightarrow n > \dfrac{1}{5\varepsilon}$, luego estamos preparados para la prueba formal

$$(\forall\, \varepsilon > p)(\exists N = \frac{1}{5\varepsilon})(\forall\, n > \frac{1}{5\varepsilon})(|a_n - \frac{2}{5}| < \varepsilon).$$

6. Demostrar:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0,\ n > 1$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$

Demostración.

a) Como $\sqrt[n]{n} > 1$, tenemos $\sqrt[n]{n} = 1 + h(n),\ h(n) > 0$, entonces $n = (1+h(n))^n > 1 + nh(n) + \frac{1}{2}n(n-1)h^2(n) > \frac{1}{2}n(n-1)h^2(n)$ de donde obtenemos $0 < h^2(n) < \dfrac{2}{n-1}$, por el teorema del sandwich resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} h^2(n) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} h(n) = 0$; luego $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+h(n)) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} h(n) = 1$

b) Propuesto

c) Sea un número natural $k > 2a$. Entonces para $n > k$

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n} = \left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{k}\right)\left(\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a}{k+2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n}\right)$$

$$< a^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = (2a)^k\left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad \text{Como} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

entonces para n suficientemente grande, tenemos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{(2a)^k}, \text{ por lo tanto } \quad \frac{a_n}{n!} < \varepsilon \quad \text{así :}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n!} = 0$$

7. Determine el $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$

Solución.

$$a_n = (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \cdot \frac{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2})}{(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)(n)} + \sqrt[3]{n^2})}$$

$$a_n = \frac{(n+1)-n}{(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2})} = \frac{1}{(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2})};$$

como $\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2} \geq \sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2}$ luego

$a_n \leq \dfrac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}$, entonces :

$0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}$ pero $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2/3}} = 0$

con lo que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

8. Sea la sucesión determinada por $a_n = \dfrac{n + sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+1}$, encuentre el $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$.

   Solución.

   Sabemos que $-1 \leq sen\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) \leq 1,\ \forall\ n, \Longrightarrow$

   $$n-1 \leq n + sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq n+1 \Longrightarrow \frac{n-1}{2n+1} \leq \frac{n + sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+1}$$

   pero como:

   $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$, tenemos que:

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n + sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

9. Demuestre que la sucesión siguiente es convergente y encuentre el límite $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$

Demostración.

La sucesión está definida por $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ con $a_1 = \sqrt{2}$.

Demostraremos por inducción, que $a_n < a_{n+1}$, en efecto:

1) Para $n = 1$, $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2 \Longrightarrow a_1 < a_2$.

2) Hipótesis inductiva, para $n = k$; $a_k < a_{k+1}$.

Por demostrar para $n = k + 1$, o sea $a_{k+1} < a_{k+2}$, en efecto:

como $a_k < a_{k+1} \Longrightarrow a_k + 2 < a_{k+1} + 2 \Longrightarrow \sqrt{a_k + 2} < \sqrt{a_{k+1} + 2} \Longrightarrow a_{k+1} < a_{k+2}$, luego la sucesión es monótona.

Ahora demostraremos que la ecuación es acotada, por inducción, que: $a_n < 2, \forall\, n$.

1) Para $n = 1$, $a_1 = \sqrt{2} < 2$,

2) Hipótesis inductiva, para $n = k$; $a_k < 2$, por demostrar para $n = k+1$, o sea $a_{k+1} < 2$, en efecto, como: $a_k < 2 \Longrightarrow a_k + 2 < 4 \Longrightarrow \sqrt{a_k + 2} < 2 \Longrightarrow a_{k+1} < 2$, luego la sucesión es acotada, luego es convergente y tiene límite.

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y como $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$; elevando al cuadrado $a_n^2 = 2 + a_{n-1}$, tomando límites podemos escribir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (2 + a_{n-1})$, o sea $L^2 = 2 + L \Longrightarrow L_1 = 2,\ L_2 = -1$, la raíz negativa no sirve en este caso ya que $a_n > 0$. Por consiguiente $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

10. Si $0 \leq a \leq b$, demostrar que la sucesión $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ tiene como límite a "b".

Demostración.

Como $b^n < a^n + b^n \Longrightarrow \sqrt[n]{b^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \Longrightarrow b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n}$

Como $a \leq b \Longrightarrow a^n + b^n \leq b^n + b^n \Longrightarrow \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2b^n}$ con lo que nos queda $b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq b\sqrt[n]{2}$, como $\lim\limits_{n\to\infty} b\sqrt[n]{2} = b \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$ y si $a > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ (demuéstrelo), tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, luego $b \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = b$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a^n + b^n} = b$ (Teorema Sandwich).

11. Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}.$$

Solución.

$$a_n = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

12. Calcular:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Solución.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$, luego

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} = 1$, análogamente para:

b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}=1$$

13. Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = log\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)+log\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)+\cdots+log\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$$

Solución.

Observemos que

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)=\sum_{k=1}^{n}log\left(\frac{k(k+2)+1}{k(k+2)}\right)=\sum_{k=1}^{n}log\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[log(k+1)^2-log\,k(k+2)]=\sum_{k=1}^{n}[2\,log(k+1)-logk-log(k+2)]$$

$$\sum_{k=1}^{n}2log(k+1)-\sum_{k=1}^{n}log\,k-\sum_{k=1}^{n}log(k+2),$$

de donde aplicando la propiedad telescópica y simplificando:

$$a_n=log\,1+log(n+1)-log(n+2)=log2+log\frac{n+1}{n+2};$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}log\,2+\lim_{n\to\infty}log\frac{n+1}{n+2}=log2+log\lim_{n\to\infty}=$$

$$=log2+log1=log2$$

(Por continuidad de la función logaritmo).

14. Encontrar el límite de la sucesión

$$a_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$$

Solución.

Tenemos dos sucesiones auxiliares tal que $a'_n < a_n < a''_n$.

Sean

$$a'_n = \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} = n\left(\frac{n}{n^2+n}\right) = \frac{n^2}{n^2+n}$$

$$a''_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1} = n\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = \frac{n^2}{n^2+1}$$

como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1 \quad \text{y}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim \frac{1}{1+1/n^2} = 1$$

tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

15. Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Solución.

Tomemos dos sucesiones auxiliares, tal que $a'_n < a_n < a''_{n'}$ luego

Sean

$$a_n' = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$a_n'' = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{como}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} = 1 \quad \text{y}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} = 1$$

entonces tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1.$

16. Encontrar el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

Solución.

Tomemos dos sucesiones auxiliares tal que $a_n' < a_n < a_n''$, luego

Sean

$$a_n' = \frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} =$$

$$\frac{1}{n^2+n}(1+2+\cdots+n) = \frac{1}{n^2+n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n'' = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1} =$$

$$\frac{1}{n^2+1}(1+2+3+\cdots+n) = \frac{1}{n^2+1}\frac{n(n+1)}{2}, \text{ como:}$$

$$\lim_{n\to\infty} a'_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} a''_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2+1} =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{n}}{1+1/n^2} = \frac{1}{2}$$

entonces tenemos: $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$

17. Hallar el límite de la sucesión 0.2, 0.23, 0.233, 0.2333, $\cdots$

Solución.

Observemos que n-ésimo término viene dado por: $a_n = 2\times 10^{-1} + 3(10^{-2} + 10^{-3} + \cdots + 10^{-n})$ dentro del paréntesis tenemos la suma de $(n-1)$ términos de una P.G. de razón 10^{-1}, luego

$$a_n = 2\times 10^{-1} + 3\left(10^{-2}\frac{1-10^{-(n-1)}}{1-10^{-1}}\right) = 2\times 10^{-1} + 3\left[\frac{1}{90}\left(1-\frac{10}{10^n}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow a_n = 2\times 10^{-1} + \frac{1}{30} - \frac{1}{3}\frac{1}{10^n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\times 10^{-1}$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{30} - \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{10} + \frac{1}{30} = \frac{6+1}{30} = \frac{7}{30}$$

18. Probar que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$ es convergente.

Prueba

Demostraremos que es monótona y acotada

$$S_1 = \frac{1}{0!} = 1;\ S_2 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2;\ S_3 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$\cdots$ Observando que $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \Longrightarrow S_n > S_{n-1}$, es monótona creciente.

$$S_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \Longrightarrow$$

$$S_n < \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} \Longrightarrow$$

$$S_n < 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} \quad \text{(Suma de una P.G.)}$$

$$S-n < 1 + 1\frac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} \Longrightarrow S_n < 3, \text{ luego es acotada.}$$

Por ser acotada y monótona es convergente.

19. Demostrar que $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ es convergente y tiene límite.

Demostración.

La sucesión es decreciente. En efecto,

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n}a_n$$

como $\dfrac{n^n}{(n+1)^n} < 1,\ a_{n+1} < a_n.$

Entonces, al ser $a_n > 0$, la sucesión está acotada inferiormente por L. De inmediato $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$. Demostraremos ahora que $L = 0$. En efecto:

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 2, \text{luego}$$

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_{n+1} < \frac{1}{2}a_n.$$

Pasando el límite, obtenemos $L \leq \dfrac{1}{2}L$ que,junto con $L \geq 0$, nos lleva a la conclusión $L = 0$.

20. Sea $a_0 = 0$, $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + a_{n-1}}{3}$, calcule el límite de a_n.

Solución.

Escribamos algunos términos de la sucesión:

$$\begin{array}{llll}
a_0 = 0 & \text{de donde} & a_0 - a_1 = -3 & \\
a_1 = 3 & & a_1 - a_2 = 1 & \\
a_2 = 2 & & a_2 - a_3 = -\dfrac{1}{3} & \\
a_3 = \dfrac{7}{3} & & a_3 - a_4 = \dfrac{1}{3^2} & \\
a_4 = \dfrac{20}{9} & & a_4 - a_5 = -\dfrac{1}{3^3} & \\
\vdots \quad \vdots & & \quad \vdots \qquad \vdots & \\
 & & a_{n-1} - a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{3^{n-2}} &
\end{array}$$

y sumando obtenemos:

$$-a_n = -3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-2}}$$

$$-a_n = -3\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1}{-\frac{1}{3} - 1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 3 \text{ lím } \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1}{-\frac{4}{3}} = \frac{9}{4}$$

21. Demostrar que la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \frac{1}{4+1} + \frac{1}{4^2+1} + \frac{1}{4^3+1} + \cdots + \frac{1}{4^n+1}$$

es convergente.

Demostración.

La sucesión $\{a_n\}$ es creciente ya que

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4^{n+1}+1} \Longrightarrow a_{n+1} > a_n, \quad \forall n$$

Además está acotada superiormente ya que $\dfrac{1}{4^n+1} < \dfrac{1}{4^n}$ para cualquier n, y

$$a_n = \frac{1}{4+1} + \frac{1}{4^2+1} + \cdots + \frac{1}{4^n+1} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) < \frac{1}{3}$$

por lo tanto, la sucesión es convergente.

22. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \dfrac{[nx]}{n}$

b) $\dfrac{[x] + [2x] + [3x] + \cdots + [xn]}{n^2}$

Solución.

a) De inmediato $nx - 1 < [nx] \leq nx \Longrightarrow x - \dfrac{1}{n} < \dfrac{[nx]}{n} \leq x$ de donde por el teorema del sandwich: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[xn]}{n} = x$

b) Análogamente: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \sum_{k=1}^{n}[kx] \leq \sum_{k=1}^{n} kx$ de aquí

$$x\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 < \sum_{k=1}^{n}[kx] \leq x\sum_{k=1}^{n} k \Longrightarrow x\frac{n(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^{n}[kx]$$

$$\leq x\frac{n(n+1)}{2} \Longrightarrow \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} < \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[kx]}{n^2} \leq \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

tendiendo al límite resulta $\frac{x}{2}$.

23. Demostrar que la sucesión: $\sqrt{a},\ \sqrt{a+\sqrt{a}},\ \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\cdots,$

$\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}$ (n radicandos) con $(a>0)$, tiene el límite $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}$.

Demostración.

Demostraremos para $a_{n+1}=\sqrt{a_n+a}$, por inducción que

I) $a_n<a_{n+1}$ (creciente) y II) $a_n<a+1,\ \forall a>0$ acotada

I) Para $n=1$, como $a>0$, $a<a+\sqrt{a}\Longrightarrow\sqrt{a}<\sqrt{a+\sqrt{a}}\Longrightarrow a_1<a_2$
Suponiendo que $a_n<a_{n+1}\Longrightarrow a+<a_n<a+a_{n+1}\Longrightarrow\sqrt{a+a_n}<\sqrt{a+a_{n+1}}\Longrightarrow a_{n+1}<a_{n+2}$

II) Para $n=1, a<2a,\ a>0\Longleftrightarrow a<2a<a^2+2a+1\Longleftrightarrow\sqrt{a}<a+1\Longrightarrow a_1<a+1$
Suponiendo que $a_n<a+1\Longleftrightarrow a_n+a<2a+1<(a+1)^2\Longleftrightarrow\sqrt{a_n+a}<a+1$.

Luego por I) y II) la sucesión tiene límite, sea este l por tanto:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=l=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ y como $a_{n+1}=\sqrt{a_n+a}\Longleftrightarrow a_{n+1}^2=a_n+a$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+a)\Longleftrightarrow l^2=l+a\Longleftrightarrow l=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$ pero $l>0$ por ser una sucesión de términos positivos $\Longrightarrow l=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

24. Demostrar que la sucesión $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ es convergente.

Demostración.

Por el teorema del binomio, $n\in\mathbb{N};(1+x)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$; hacemos $x=\dfrac{1}{n}$

y queda,

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \Longrightarrow a_n < 3 \Longrightarrow 2 \leq a_n < 3 \Longrightarrow a_n$$

es acotada.

Ahora vamos a demostrar que es estríctamente creciente, como:

$$\text{M.A.} > \text{M.G.} \Longleftrightarrow \tfrac{(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{1}{n})+\cdots+(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n})^n}$$

$$\Longleftrightarrow \tfrac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n})^n} \Longleftrightarrow \left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n$$

$$\Longleftrightarrow a_{n+1} > a_n$$

luego, a_n es monótona creciente y acotada por tanto tiene límite que se acostumbra a denotar por e, donde $e = 2.71828\cdots$ y entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

25. Si $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 0$, demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_n\sqrt{n+p}) = 0$$

Demostración.

Sea

$b_n = a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_n\sqrt{n+p} \Longrightarrow$

$$b_n = \sqrt{n}\left(a_0 + a_1\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \cdots + a_n\sqrt{1+\frac{p}{n}}\right)$$

y como $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 0$, entonces :

$$b_n = \sqrt{n}\left(a_0 - a_0 + a_1\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right] + \cdots + a_p\left[\sqrt{1+\frac{p}{n}} - 1\right]\right)$$

de donde

$$|b_n| = \sqrt{n}\left(|a_1|\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right| + \cdots + |a_p|\left|\sqrt{1+\frac{p}{n}} - 1\right|\right), \text{ pero}$$

$\sqrt{1+\dfrac{k}{n}} \leq 1 + \dfrac{k}{n}, \; \forall\, k$ luego:

$|b_n| \leq \sqrt{n}\left(|a_1|\left|\dfrac{1}{n}\right| + \cdots + |a_p|\left|\dfrac{p}{n}\right|\right)$, si $A = max|a_i|$,

$i = 1, \cdots, p$

$$|b_n| \leq \sqrt{n}A\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{p}{n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{n}A\,\frac{p(p+1)}{2}; \text{ sea}$$

$c_n = A\,\dfrac{p(p+1)}{2}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ y como

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A\,\frac{p(p+1)}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq |b_n| \leq c_n \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{n\to\infty}|b_n| = 0, \text{ pero } -|b_n| \leq b_n \leq |b_n|, \text{ finalmente } \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

26. Demuéstrese que para $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^k}\right)^n$, tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ para $k > 1$, mientras que $a_n \to \infty$ si $k < 1$.

Demostración.

i) Para $k < 1 \Longrightarrow \left(1+\dfrac{1}{n^k}\right)^n \geq 1+\dfrac{n}{n^k} = 1+\dfrac{1}{n^{k-1}} \to \infty.$

ii) Para $k > 1$. De inmediato $1 < \left(1+\dfrac{1}{n^k}\right)^n$, por otra parte

$$\left(1+\frac{1}{n^k}\right)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{1}{n^k}\right)^r = 1+n\left(\frac{1}{n^k}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n^k}\right)^2$$

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\left(\frac{1}{n^k}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{1}{n^k}\right)^n = 1+\frac{n}{n^k}\left[1+\frac{1}{2!}+\frac{(n-1)}{n^k}+\frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^k\,n^k}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n!}\frac{(n-1)}{n^k}\frac{(n-2)}{n^k}\cdots\frac{1}{n^k}\right]$$

$$\left(1+\frac{1}{n^k}\right)^n \leq 1+\frac{n}{n^k}\left[1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]$$

$$\leq 1+\frac{n}{n^k}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

$$\left(1+\frac{1}{n^k}\right)^n \leq 1+\frac{2n}{n^k} = 1+\frac{2}{n^{k-1}} \to 1 \quad \text{cuando} \quad n\to\infty$$

luego $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^k}\right)^n = 1$, para $k > 1$

3.5. Problemas Propuestos

1. Conociendo algunos términos sucesivos de una sucesión, escribir el término general a_n.

   a) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{10}{13}, \dfrac{17}{18}, \dfrac{26}{23}, \cdots$

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{7}, \frac{4}{5}, \cdots$

c) $2, 0, 6, 0, 8, \cdots$

d) $1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$

e) $sen\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\ sen\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{3}\ sen\frac{5\pi}{2}, \frac{1}{4}\ sen\frac{7\pi}{2}, \cdots$

f) $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \cdots$

Respuesta.

a) $\dfrac{n^2+1}{5n-2}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ si } & n = 2k-1 \\ \dfrac{n}{n+2} & \text{si } \quad n = 2k,\ k \in Z^+ \end{cases}$

c) $n[1-(-1)^n]$

d) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

d) $\dfrac{1}{n} sen\left[(2n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]$

f) $\dfrac{n+1}{4}[1-(-1)^n] + \dfrac{1}{n+2}[1+(-1)^n]$

2. Usando la definición del límite de una sucesión, demostrar que:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+1}{2n+1} = 2$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2}{2n^2-9} = \dfrac{1}{2}$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+1}{3^n} = 1$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}} = \infty$

3. Si $|r| < 1$, demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$.

4. Ocupando que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^r} = 0$; si $r = \dfrac{1}{q}$ (Ejercicio 1, resuelto), demostrar por inducción en p, que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^r} = 0$ si $r = \dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$.

5. Demuestre que si $|r| < 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$.

6. Si $a > 0$, demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

7. Demuestre que la sucesión $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\cdots$ es convergente y encuentre su límite.

8. Dada la sucesión $\frac{1}{7}, \frac{5}{14}, \frac{5}{21}, \frac{9}{28}, \frac{9}{35}, \frac{13}{42}, \frac{13}{49}, \cdots$ Encuentre su término n-ésimo, a_n, y demuestre que su límite es $\frac{2}{7}$.

   Respuesta.

   $a_n = \frac{2n+(-1)^n}{7n}$

9. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

10. Usando sólo la definición de límite y las propiedades básicas de los números reales (incluyendo la propiedad Arquimediana), probar:

    a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+30}(\sqrt{4n+14} - \sqrt{4n}) = 7$

    b) $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_{k=1}^{n}(1000-k) = 0$.

11. Calcule cada uno de los siguientes límites y justifique ampliamente sus cálculos en términos de los teoremas básicos sobre límites o de ejemplos resueltos en este capítulo.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-1}{3n^3+n-4}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\, cos n}{n^2+24}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+1}{2^n-n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k (|x| \ < 1)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{n^3}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}\, sen\, n!}{n+2}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+a^{-n}} (a>0)$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3}{2n^2-n} - \dfrac{n^2}{2n+1}\right)$

Respuesta.

a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) 1 d) $\frac{1}{1-x}$ e) $\frac{1}{3}$

f) 0 g) si $a \geq 1$ el límite es a. Si $0 < a < 1$ el límite es $\frac{1}{a}$

h) $\frac{1}{2}$

12. Considere la sucesión definida por $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n - \dfrac{1}{a_n}\right)$ demuestre que esta no es convergente.

13. Demuestre que: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!} = 0$

14. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(cos \dfrac{a}{n}\right)^n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1})$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

Respuesta.

a) $\frac{1}{e}$ b) 1 c) 1 d) 1

15. Un capital inicial c es colocado al 100 % de interés anual. Hallar el capital final después de t años, suponiendo que los intereses se van agregando en todo instante. (Sugerencia: Divida el tiempo total en n períodos iguales, a cada uno de los cuales rige el interés simple. Después haga crecer n indefinidamente).

16. Encontrar el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{n\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{n}{n\sqrt{n^2+n}}$$

Respuesta.

$\frac{1}{2}$

17. Calcular:

$a)$ $\lim_{n\to\infty} sen\dfrac{a}{n}$

$b)$ $\lim_{n\to\infty} a_n,\ a_n = Arc\,tg\dfrac{1}{2} + Arc\,tg\dfrac{1}{8} + \cdots + Arc\,tg\dfrac{1}{2n^2}$

Respuesta.

a) =0 b) $\dfrac{\pi}{4}$

18. Encuentre el límite de la sucesión definida por:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1, \cdots, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}).$$

Respuesta.

$\dfrac{2}{3}$.

19. Calcular el límite de la sucesión, definida por

a) $a_1 = a_1,\ a_2 = a_2,\ a_3 = \frac{1}{3}(a_2 + 2a_1), \cdots, a_n = \frac{1}{3}(a_{n-1} + 2a_{n-2})$

b) $log(b_{n+2} = \frac{1}{3}[log(2b_n) + log(b_{n+1})]$

Respuesta.

a) $\frac{1}{5}(3a_1 + 2a_2)$ b) $e^{\frac{1}{5}(3\,log\,(b_1) + 2\,log\,(b_2))}$

20. Mediante el teorema del binomio, demuéstrese que para cualquier $\alpha < 0$ (fijo) y $k \in Z$, se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(1+\alpha)^n} = 0$$

21. Demuéstrese que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = \infty$$

22. Sea a_n una sucesión tal que la sucesión $b_n = pa_n + qa_{n+1}$; donde $|p| < q$, es convergente. Demuéstrese que a_n converge. Si $|p| \geq q > 0$ demuéstrese que a_n no converge necesariamente.

23. De las sucesiones siguientes, ¿cuáles son acotadas?, ¿cuáles son monótonas?, ¿cuáles son convergentes?.

a) $a_n = (-1)^{n+1}$ b) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

c) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ d) $a_n = \frac{5n^2}{n^2+3}$

e) $a_n = \sqrt[n]{e^n + \pi^n}$ f) $a_n = \frac{[nx]}{n}$

g) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2k-1}$ h) $a_n = 1 + \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, , p \geq 2$

Respuesta.

a) Acotada b) Convergente c) Convergente

d) Acotada y convergente e) Acotada y convergente f)Acotada (x real cualquiera)

g) Monótona h) Convergente.

24. Demuéstrese que la sucesión a_n, definida por $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2 - a_n^2}{2a_n}$ donde a_0 es cualquier número mayor que 0, converge a: $\sqrt{2}$.

25. Si a_1, b_1 son números positivos cualesquiera y $a_1 < b_1$, se define $a_2 = \sqrt{a_1 b_1}$, $b_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}, \cdots, a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$, $b_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$. Demuéstrese que:

    a) La sucesión $a_1, a_2, \cdots$, converge

    b) La sucesión $b_1, b_2, \cdots$, converge

    c) Las dos sucesiones tienden al mismo límite.

26. Demuéstrese que el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

existe. Deduzca que: $\dfrac{1}{2} < \lim\limits_{n \to \infty} a_n < 1$.

27. Si $a_n > 0$ y $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

28. Calcular los límites de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \sqrt[n]{n}$ b) $a_n = \sqrt[n]{n^5 + n^4}$ c) $a_n = \sqrt[n]{\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)}$

Respuesta.

a) 1 b) 1 c) $\dfrac{1}{e}$

29. *a*) Sin recurrir al teorema del binomio (problema resuelto 24) demuéstrese que $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es monótona creciente y que $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ es monótona decreciente. (Ayuda: considere $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ y $\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$ y aplíquese $(1+x)^k \geq 1 + kx$, $x > 1$).

    b) ¿Qué número es mayor: $(1000000)^{1000000}$ ó $(1000001)^{999999}$?

    Respuesta.

    b) Nótese: $\dfrac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{e}{n+1} < 1$, $\forall n$.

30. *a*) A partir de los resultados del problema (29), demuéstrese que:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

    b) Para $n > 6$, demuéstrese $n! < n\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

31. Demuestre que la sucesión

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

no tiene límite.

32. Demuestre que para cualquier x racional, $x > 0$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$