Capítulo 2

Funciones Reales

2.1. Generalidades

Suponemos que el lector trae consigo la noción de función general, es decir, haciendo un resumen:

Sean A y B conjuntos cualquiera, entonces $f : A \to B$, es una correspondencia en virtud de la cual a cada elemento de A viene asociado un elemento de B y sólo uno.

Si $x \in A$, el elemento de B asociado con x se representa por $f(x)$, $(y(x), F(x), G(x), \ldots)$ y recibe el nombre de imagen de x según la función f.

El conjunto A se llama *dominio* de la función

$$\operatorname{dom} f = \{x \in A \mid \exists\, y \in B : (x, y) \in f\}$$

Aquellos elementos de B que son imágenes de al menos un elemento de A, constituyen el *recorrido* de la función

$$\operatorname{rec} f = \{y \in B \mid \exists\, x \in A : (x, y) \in f\}$$

El recorrido puede o no ser B completo; en caso de que lo sea se dice que f es *sobre.* $(\operatorname{rec} f = B)$.

La función será *uno a uno* si todo elemento del recorrido es la imagen de un solo elemento de A.

Si f es uno a uno y sobre, se define una nueva función f^{-1}, llamada *inversa* de f, como la función de B a A que tiene la siguiente propiedad: La imagen $f^{-1}(y)$ de un elemento arbitrario y de B es el elemento unívocamente determinado en A cuya imagen bajo f es y, luego por definición $\forall\, y \in B : f(f^{-1}(y)) = y$, recíprocamente $\forall\, x \in A : f^{-1}(f(x)) = x$.

Nótese: $\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{rec} f$ y $\operatorname{rec} f^{-1} = \operatorname{dom} f$

En los siguientes párrafos consideraremos las *funciones reales de una variable real* (funciones reales), es decir, $f : A \to B$ siendo A y B conjuntos de números de reales.

En la notación funcional $y = f(x)$, que es lo mismo que $(x, y) = f$, se conviene que x recibe el nombre de *variable independiente* e y el de *variable dependiente*, diciéndose que y es una función de x.

El *gráfico* (o *grafo*) de la función f en el sistema de coordenadas rectangulares XY es,

$$G_f = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x)\}$$

Puede considerarse que el mismo conjunto de puntos forma el gráfico de la función inversa (si ésta existe) y, más aún, que ésta viene representada por la ecuación $x = f^{-1}(y)$. Ahora si queremos reservar la letra x para la variable independiente (a su vez la "y"para la dependiente), la inversa de f vendrá representada por la ecuación $y = f^{-1}(x)$.

En tal supuesto, la gráfica de f^{-1} resulta simétrica respecto a la recta $y = x$ de la gráfica de f.

Dadas f y g dos funciones reales[1]; se define la suma, producto y cuociente como:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x); \quad (f\ g)(x) = f(x)g(x)$$

con $\operatorname{dom}(f \pm g) = \operatorname{dom} f \cdot g = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, análogamente,$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, con $\operatorname{dom} \frac{f}{g} = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, en que $0 \notin \operatorname{rec} g$.

Finalmente, la función *compuesta* de dos funciones g y f, en las que el recorrido de g está incluído en el dominio de f, se define como la función cuyo dominio es el de g y tal que la imagen de un elemento arbitrario en dicho dominio es $f(g(x))$, es decir: $(fog)(x) = f(g(x))$.

Se dice que:

1. f y g son iguales si y sólo si $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$ y $f(x) = g(x)$.
2. f es una *restricción* de g si y sólo si $\operatorname{dom} f \subset \operatorname{dom} g$ y $f(x) = g(x)$.

2.2. Propiedades

Una función f definida en un conjunto A es *monótona* si no tiene oscilaciones, es decir, si al crecer x los valores de $f(x)$ siempre crecen o siempre decrecen.

f es *no decreciente* en A (respectivamente, *creciente*, *no creciente*, *decreciente*) si $\forall\ x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectivamente, $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1) \geq f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$), notemos que las funciones que cumplen cualquiera de estas cuatro propiedades son monótonas.

Se dice que una función f está *acotada superiormente* (o *inferiormente*) en el conjunto A si existe un número M (ó m) tal que $f(x) \leq M, \forall\ x \in A$ (ó $m \leq f(x), \forall\ x \in A$). Se dice que f está *acotada* en A si está acotada superiormente o inferiormente.

[1] En lo sucesivo, a menos que se indique lo contrario, las funciones que consideraremos serán reales.

Se dice que una función f es *periódica* si existe un número $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)\ \forall\ x \in \operatorname{dom} f$ (nótese que $(x+T) \in \operatorname{dom} f$). El menor número T se llama período de función f.

Se dice que una función f toma el *valor máximo* en el punto $x_0 \in \operatorname{dom} f$ si $f(x_0) \geq f(x),\ \forall\ x \in \operatorname{dom} f$, y el *valor mínimo* si $f(x_0) \leq f(x),\ \forall\ x \in \operatorname{dom} f$.

Se dice que f es *par* (simétrica con el eje Y) si $f(-x) = f(x)$ y que f es *impar* (simétrica con el origen de coordenadas) si $-f(-x) = f(x)$.

Al estudiar el comportamiento de una función (por el momento) es aconsejable determinar por lo menos:

1. El dominio
2. Raíces y signos (los ceros de f, y para que valores de x, f es mayor o menor que cero, es decir, las famosas ecuaciones e inecuaciones).
3. Simetrías (si f es par, impar o periódica).
4. Si f está acotada y valores extremos de ella (en lo posible).
5. Comportamiento de f para valores extremos de x $(\pm\infty)$ y en las fronteras de su dominio.

Notas.

1. Nótese que $1, 2, 3, 4$ y 5 no agotan el análisis de una función, pero son más que necesarios, más adelante se aumentará su ámbito. Se aconseja al lector que para construir el gráfico de una función f siga a lo menos los cinco pasos antes mencionados.
2. Solo a modo de comprobación de sus resultados debe comparar con los de una calculadora como TI89, Hp49Ex, Casio 2.0, ... y similares o mediante un software adecuado.

2.3. Transformaciones simples de los gráficos

Dado el gráfico de $y = f(x)$.

I. El gráfico de $y = f(x+a)$ se obtiene trasladando el gráfico dado a lo largo del eje X, $|a|$ unidades en dirección opuesta al signo de a. (Figura 2.1).

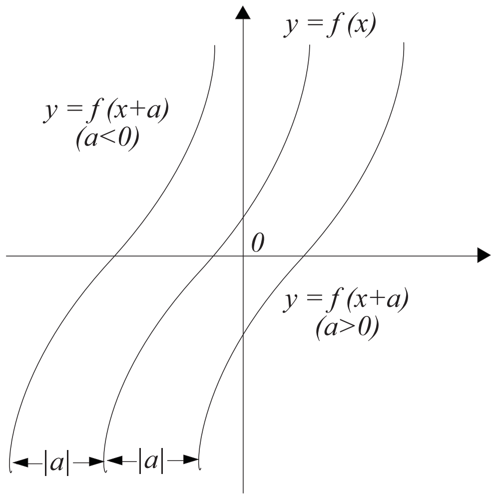


Figura 2.1: Gráfica de $y = f(x+a)$

II. El gráfico de $y = f(x) + a$, se obtiene trasladando el gráfico dado a lo largo del eje Y, $|a|$ unidades en dirección acorde al signo de a. (Figura 2.2).

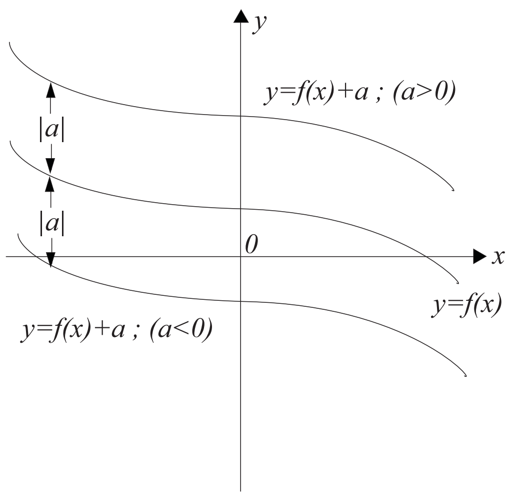


Figura 2.2: Gráfica de $y = f(x) + a$

III. El gráfico de $y = f(ax)$, $(a > 0)$, se obtiene *comprimiendo* el gráfico dado contra el eje Y en dirección horizontal a veces para $a > 1$ y *estirando* el gráfico dado desde el eje Y en dirección horizontal $\frac{1}{a}$ veces para $a < 1$. (Figura 2.3).

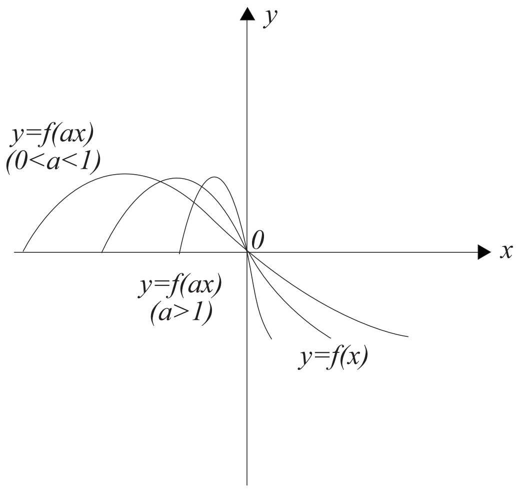


Figura 2.3: Gráfica de $y = f(ax)$

IV. El gráfico de $y = af(x)$, $(a > 0)$, se obtiene *alejando* el gráfico dado en dirección vertical (respecto del eje X) a veces para $a > 1$ *comprimiendo* contra el eje X (es decir, verticalmente) $\frac{1}{a}$ veces para $a < 1$. (Figura 2.4).

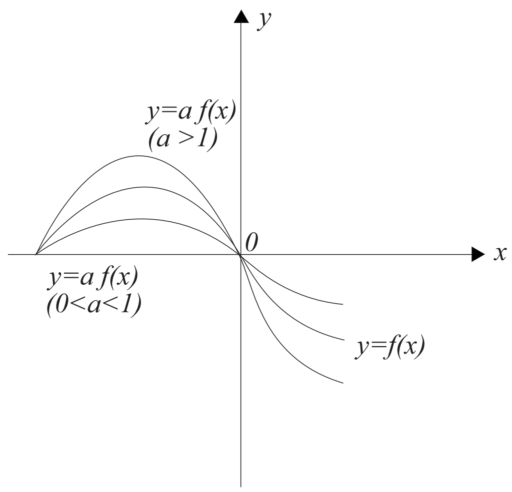


Figura 2.4: Gráfica de $y = af(x)$

V. El gráfico de $y = -f(x)$ es simétrico del gráfico dado respecto del eje X, mientras que el gráfico de la función $y = f(-x)$ es simétrico del gráfico dado respecto del eje Y. (Figura 2.5 y 2.6).

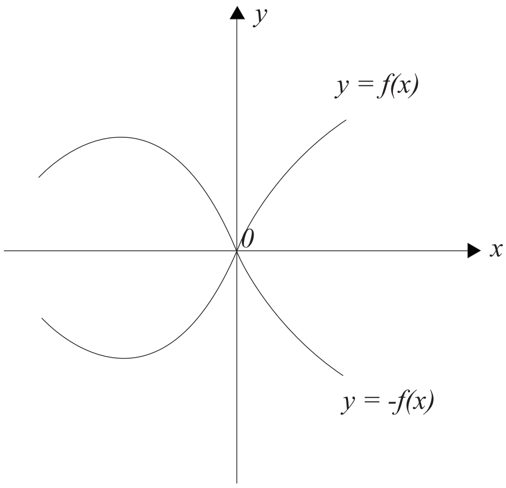


Figura 2.5: Gráfica de $y = -f(x)$

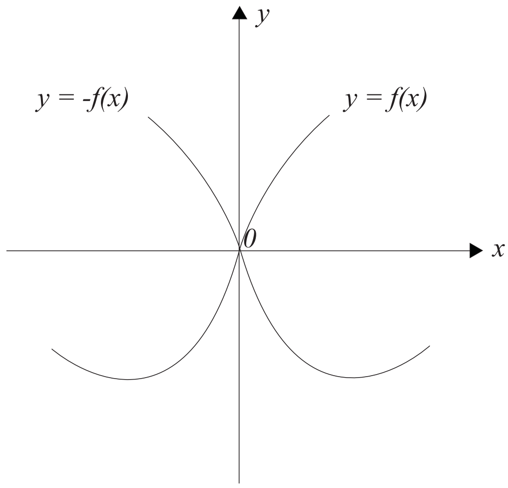


Figura 2.6: Gráfica de $y = f(-x)$

VI. El gráfico de $y = f(|x|)$, se obtiene a partir del gráfico dado de la siguiente manera: para $x \geq 0$ se conserva el gráfico de $y = f(x)$, después se refleja simétricamente esta parte conservada, respecto del eje Y, con lo que se determina el gráfico de la función para $x < 0$. (Figura 2.7).

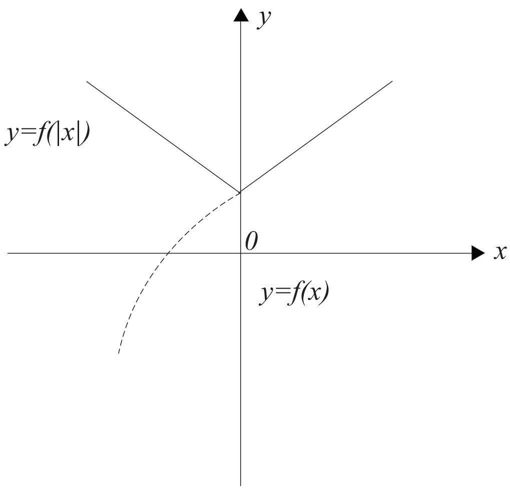


Figura 2.7: Gráfica de $y = f(|x|)$

VII. El gráfico de $y = |f(x)|$ se obtiene a partir del gráfico dado de la siguiente manera: la porción del gráfico de $y = f(x)$ que está por encima del eje X se conserva, y la parte situada por debajo se refleja simétricamente respecto del eje X. (Figura 2.8).

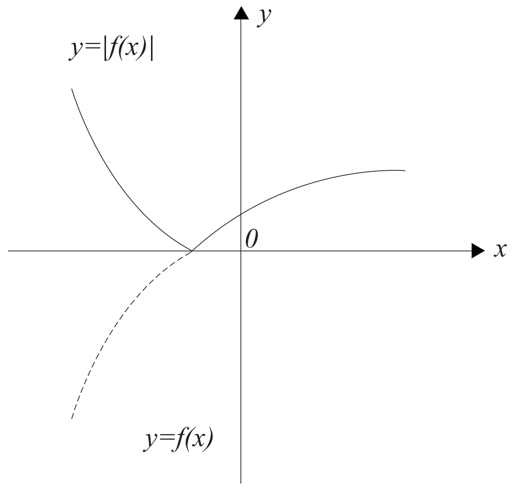


Figura 2.8: Gráfica de $y = |f(x)|$

2.4. Problemas Resueltos

1. Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$. Encontrar:

   a) $(f+g)(-2)$, $(f\ g)(\frac{\pi}{3})$, $(\frac{h}{g})(\frac{\pi}{2})$, $(foh)(\frac{\pi}{6})$ y $(goh)(\frac{\pi}{3})$.

   b) El dominio de $f+g$, goh, hog, gog y $\frac{g}{f\,h}$.

Solución.

a) $(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = (-2)^2 + \frac{1}{-2} = \frac{7}{2}$

$(f\ g)(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{\pi}{3})g(\frac{\pi}{3}) = (\frac{\pi}{3})^2 \frac{1}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$

$(\frac{h}{g})(\frac{\pi}{2}) = \frac{h(\frac{\pi}{2})}{g(\frac{\pi}{2})} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{2}$

$(foh)(\frac{\pi}{6}) = f(h(\frac{\pi}{6})) = f(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$(goh)(\frac{\pi}{3}) = g(h(\frac{\pi}{3})) = g(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}) = g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

b) $\operatorname{dom} f = (-\infty, +\infty) = \operatorname{dom} h$; $\operatorname{dom} g = (-\infty, 0) \underline{\cup} (0, \infty)$, así:

$\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g = (-\infty, 0) \underline{\cup} (0, +\infty)$,

por otra parte recordando que $\operatorname{dom} fog = \{x | x \in \operatorname{dom} g \wedge g(x) \in \operatorname{dom} f\}$ (1)

y que $(goh)(x) = g(h(x)) = g(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \operatorname{dom} goh = \{x | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$(hog)(x) = h(g(x)) = h(\frac{1}{x}) = \operatorname{sen}\frac{1}{x} \Rightarrow \operatorname{dom} hog = (-\infty, 0) \;\cup\; (0, +\infty)$

$(gog)(x) = g(\frac{1}{x}) = x$, aparentemente $\forall\, x \in \mathbb{R}$, pero observando bien (1) se tiene $\operatorname{dom} gog = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$(\frac{g}{fh})(x) = \frac{g(x)}{f(x)h(x)} = \frac{1}{x^3 \operatorname{sen} x} = \operatorname{dom}\frac{g}{fh} = \{x | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

2. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{x}{x^2 - 1} & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ \operatorname{sen}\sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Hallar: $f(\sqrt{3})$; $f(0)$; $f(-2)$; $f(1)$; $f(\sqrt{\log e^4})$, $f(9)$.

Solución.

El punto $\sqrt{3}$, cae dentro de $(1, 3)$, luego:

$$f(3) = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Los puntos 0, -2 y 1 caen dentro de $(-\infty, 1]$, luego: $f(0) = 1$; $f(-2) = (-2)^3 + 1 = 9$ y $f(1) = 1^3 + 1 = 2$.

El punto $\sqrt{\log e^4} = \sqrt{4 \log e} = \sqrt{4}$ cae dentro de $(1, 3)$, así: $f(\sqrt{\log e^4}) = f(2) = \frac{2}{4-1} = \frac{2}{3}$; finalmente 9 cae en $[3, +\infty)$ luego $f(9) = \operatorname{sen}\sqrt{9} = \operatorname{sen} 3 = 0{,}14112$.

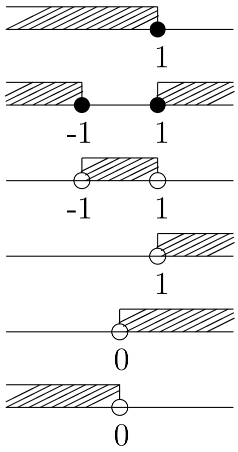
3. Dadas las funciones:

$$f(x) = |x| \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Encuentre: $(fog)(x)$ y $(gof)(x)$

Solución.

$$f(g(x)) = \begin{cases} f(x^2 - 1) & \text{si} \quad x \leq 1 \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad x^2 - 1 < 0 \end{cases} \\ \\ f(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x > 1 \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad \frac{1}{x} \geq 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{si} \quad \frac{1}{x} < 0 \end{cases} \end{cases}$$



(1) De (1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow x \leq -1$ $x = 1 \Rightarrow (fog)(x) = x^2 - 1$

(2) De (1) $\wedge$ (3) $\Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow (fog)(x) = 1 - x^2$

(3)

(4) Análogamente de:

(5) (4) y (5) $\Rightarrow x > 1 \Leftrightarrow (fog)(x) = \frac{1}{x}$

(6) (4) y (6) $\Rightarrow \emptyset$

Resumiendo estos resultados, obtenemos:

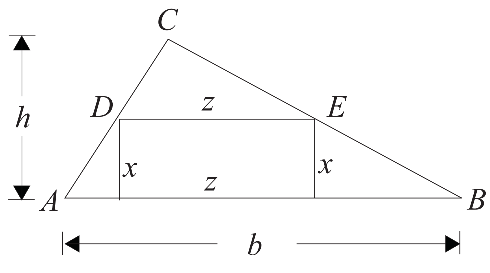
$$(fog)(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Procediendo de igual forma para $(gof)(x)$, se obtiene:

$$(gof)(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ |\frac{1}{x}| & \text{si} \quad |x| > | \end{cases}$$

4. Un rectángulo de altura x se inscribe en un triángulo ABC de base b y altura h. Expresar el perímetro P y el área S del rectángulo en función de x.

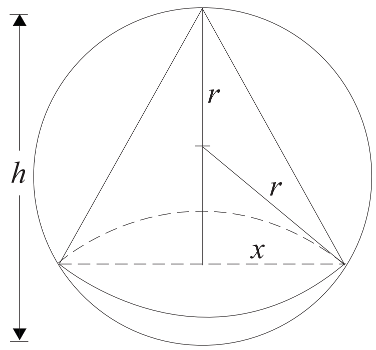
Solución.



De inmediado $P = 2(x+z)$, $S = xz$. Por otra parte, por semejanza de triángulos $ABC \sim DEC$, se tiene: $\frac{z}{b} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow z = (1 - \frac{x}{h})b$ con lo que:
$P = 2[x + (1 - \frac{x}{h})b]$; $S = x(1 - \frac{x}{h})b$

5. Un cono de radio x se inscribe en una esfera de radio r. Expresar el volumen del cono en función de x.

Solución.



Sabemos que: $V = \frac{1}{3}\pi x^2 h$ y de la figura:

$(h-r)^2 + x^2 = r^2 \Rightarrow h = r + \sqrt{r^2 - x^2}$ luego,

$V = \frac{1}{3}\pi x^2 (r + \sqrt{r^2 - x^2})$.

Nótese que $r < h < 2r \wedge 0 < x \leq r$.

6. Hallar los dominios de definición de las funciones siguientes:

   a) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{4 - x^2}}$
   b) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$
   c) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$
   d) $f(x) = \operatorname{Arc\,sen} \frac{x-2}{2} - \log(4 - x)$
   e) $f(x) = \log(\operatorname{sen} x)$
   f) $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} \cos x)$
   g) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(\cos x)} + \operatorname{Arc\,sen}(\frac{1+x^2}{2x})$
   h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$
   i) $f(x) = \sqrt{|\frac{x^2-2}{x}| - 4}$
   j) $f(x) = \operatorname{Arc\,sen} \frac{3}{4 - 2\cos x}$
   k) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - 2x - 1}$

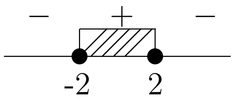
Solución.

a) Deberá cumplirse simultáneamente:

$4 - x^2 \geq 0$ (1)

$1 - \sqrt{4 - x^2} \geq 0$ (2)

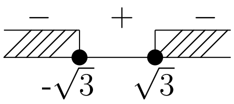
Resolviendo por separado se tiene: $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow (2 - x)(2 + x) \geq 0$



de donde: $[-2, 2]$ (3)

Análogamente

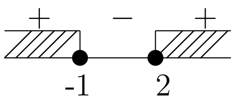
$\sqrt{4-x^2} \leq 1 \Rightarrow 4 - x^2 \leq 1 \Rightarrow 3 - x^2 \leq 0 \Rightarrow (\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x) \leq 0$

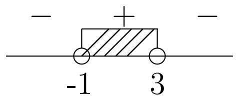


de donde: $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ (4)

Intersectando (3) y (4) finalmente obtenemos:

$\text{dom}\, f = [-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3]$.

b) De igual forma: $x^2 - x - 2 \geq 0$ 

y $3 + 2x - x^2 > 0$ 

de donde intersectando $\text{dom}\, f = [2, 3)$.

c) De inmediato: $\text{sen}\, x - 1 \geq 0 \Rightarrow \text{sen}\, x \geq 1 \Rightarrow \text{dom}\, f = \{x | x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

d) Se debe cumplir simultáneamente: $-1 \leq \frac{x-2}{2} \leq 1 \wedge 4 - x > 0$ de donde $0 \leq x \leq 4 \wedge x < 4 \Rightarrow \text{dom}\, f = [0, 4)$

e) $\text{sen}\, x > 0 \Rightarrow \text{dom}\, f = (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

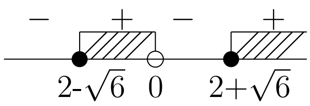
f) $\cos x \neq \pm 1 \Rightarrow x \neq k\pi$; $\text{dom}\, f = \{x | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

g) $\text{sen}(\cos x) \geq 0 \wedge -1 \leq \frac{1+x^2}{2x} \leq 1$, de donde $0 \leq \cos x \leq 1$, pero $-1 \leq \frac{1+x^2}{2x} \leq 1$ solo admite $x = \pm 1$ y como $0 < \cos(\pm 1) < 1 \Rightarrow \text{dom}\, f = \{\pm 1\}$.

h) Falta desarrollo

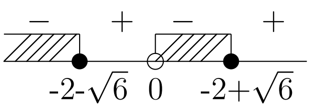
i) $\left|\frac{x^2-2}{x}\right| - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x} \leq -4 \,\underline{\vee}\, \frac{x^2-2}{x} \geq 4$

Si $\frac{x^2-4x-2}{x} \geq 0 \Rightarrow$



$\Rightarrow [2-\sqrt{6}, 0) \cup [2+\sqrt{6}, +\infty)$

Si $\frac{x^2+4x-2}{x} \leq 0 \Rightarrow$



$\Rightarrow (-\infty, -2-\sqrt{6}] \cup (0, -2+\sqrt{6}]$

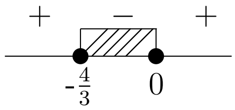
Finalmente resumiendo: $\text{dom}\, f = (-\infty, -2-\sqrt{6}] \cup [2-\sqrt{6}, \sqrt{6}-2] \cup [2+\sqrt{6}, +\infty)$; $x \neq 0$.

j) De inmediato: $-1 \leq \frac{3}{4-2\cos x} \leq 1$, como $4 - 2\cos x > 0$, $\forall\, x$, el problema se reduce a

$$\frac{3}{4-2\cos x} \leq 1 \Rightarrow 3 \leq 4 - 2\cos x \Rightarrow \cos x \leq \frac{1}{2}$$

de donde: $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

k) De inmediato: $\sqrt{x^2+1} \geq 2x+1$, si $2x+1<0 \Rightarrow x<-\frac{1}{2}$ la desigualdad es cierta, ahora si $2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ se tiene $x^2+1 \geq 4x^2+4x+1 \Rightarrow$

$x(3x+4) \leq 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq 0$ 

con lo que: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$; finalmente $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0]$, hemos unido los resultados.

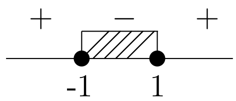
7. La función $f(x)$ está definida en $[0,1]$. ¿Cuáles son los dominios de definición de la funciones:

   a) $f(\operatorname{sen} x)$
   b) $f(2x+3)$
   c) $f(x^2)$

Solución.

Evidentemente las funciones dadas son funciones compuestas.

a) $0 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \Rightarrow \operatorname{dom} f = \{x | 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$
b) $0 \leq 2x+3 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 2x \leq -2 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq -1$

c) $0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2-1 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) \leq 0$ 

de donde: $\operatorname{dom} f = [-1,1]$, nótese que se trata de $f(x^2)$.

8. Supóngase que f satisface $f(x+y) = f(x)+f(y)$ y demostrar que $\exists\, c$, tal que $f(x) = cx$, $\forall\, x \in \mathbb{Q}$.

Solución.

Como $f(x_1+x_2+\ldots,x_n) = f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$ sea $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(1+1+\ldots+1) = f(1)+f(1)+\ldots+f(1) = nf(1)$, sea $c = f(1)$, luego: $f(n) = cn$; obteniendo $f(0)$ se tiene $f(x+0) = f(x)+f(0) \Rightarrow f(0) = f(x)-f(x) = 0$ y como $f(x+(-x)) = f(0) \Rightarrow f(x)+f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(-x)$ en particular para $n \in \mathbb{N} : f(-n) = -f(n) = -cn = c(-n)$, luego se cumple $f(n) = cn$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, además:

$$f(\frac{1}{n})+f(\frac{1}{n})+\ldots+f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}) = f(1) = c \Rightarrow$$

$nf(\frac{1}{n}) = c \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = \frac{c}{n}$.
Sea $q \in \mathbb{Q}$, $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$
$f(q) = f(\frac{m}{n}) = f(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})+f(\frac{1}{n})+\ldots+f(\frac{1}{n}) \Rightarrow$
$f(q) = mf(\frac{1}{n}) \Rightarrow f(q) = m\frac{c}{n} = \frac{m}{n}c = cq$; por lo tanto
$f(x) = cx$; $\forall\, x \in \mathbb{Q}$.

9. Demostrar que:

   a) La función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ es monótona creciente en $(-1, +\infty)$.

   b) La función $f(x) = x^3 + x + 6$ es monótona creciente en $\mathbb{R}$.

   c) La función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ es monótona decreciente en $(1, +\infty)$.

Solución.

a) Sea $1 < x_1 < x_2$ demostraremos $f(x_1) < f(x_2)$, luego:

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2},$$

como x_1 y x_2 son mayores que uno, se tiene $x_1 x_2 > 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{x_2 - x_1}{x_2 x_2} < x_2 - x_1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} < x_2 - x_1 \\ &\Rightarrow \quad x_1 + \frac{1}{x_1} < x_2 + \frac{1}{x_2} \\ &\Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

b) Sean $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$, por otra parte:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^3 + x_2 + 6 - (x_1^3 + x_1 + 6) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 + 1) \\ &= (x_2 - x_1)[(x_2 + \frac{1}{2}x_1)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 + 1] \end{aligned}$$

esta última expresión es mayor que cero, porque $x_2 - x_1$ lo es por hipótesis lo que está dentro del paréntesis cuadrado es también positivo así:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

c) Por demostrar que si $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1, x_2 > 1$, en efecto:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1)}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)},$$

lo que es mayor que cero porque $x_2 - x_1 > 0$ por hipótesis y como $x_1 > 1$ y $x_2 > 1$

$$\Rightarrow x_1 x_2 > 1; f(x_1) - f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Nótese que esta función también es decreciente para los $x < -1$.

10. Sea f una función impar o invertible, demuestre que la función f^{-1} es también impar.

Solución.

Sea $y = f(x)$, como

$$\exists\, f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(y) = x \Rightarrow -f^{-1}(y) = -x \qquad (1),$$

ahora de

$$y = f(x) \Rightarrow -y = -f(x) = f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)),$$

pero por hipótesis

$$-f(x) = f(-x) \Rightarrow f^{-1}(-y) = f^{-1}(f(-x)) = -x$$

finalmente por (1): $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$ lo que prueba de f^{-1} también es impar.

11. Grafique las siguientes funciones, mediante la pauta: Dominio, raíces y signos, simetrías, periodicidad, acotamiento, crecimientos, comportamiento de f por valores extremos de x.

   a) $y = \frac{1-x}{x}$
   b) $y = \frac{x}{1+x^2}$
   c) $y = \frac{1}{1+x^2}$
   d) $y = \max(x, x^2)$
   e) $y = x - |x|$
   f) $y = |\operatorname{sen} x|$
   g) $y = x + \frac{1}{x}$
   h) $y = \frac{x}{x^2-1}$
   i) $y = x^3 - x^2$
   j) $y = \operatorname{sen}|x|$
   k) $y = [x]$ ($[x]$ es parte entera de x)
   l) $y = x\sqrt{1-x}$
   m) $y = \sqrt{\cos x}$
   n) $y = \operatorname{Arc}\cos(\cos x)$

Solución.

a) $f(x) = \frac{1-x}{x}$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
2) Raíces $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$; signos: $f(x) < 0,\ \forall\ x < 0 \vee x > 1$ y $f(x) > 0,\ \forall\ 0 < x < 1$.
3) Simetrías: $f(-x) = \frac{1+x}{x} \neq f(x)$, no es par.
$-f(-x) = \frac{1+x}{x} \neq f(x)$, no es impar, nótese que no es periódica.
4) [2]Sean $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$; $x_2 < x_1 \Rightarrow x_2 - x_2x_1 < x_1 - x_2x_1 \Rightarrow \frac{1}{x_1} - 1 < \frac{1}{x^2} - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, luego f es decreciente en $(-\infty, 0)$ análogamente para $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, nótese que f no es acotada.
5) [3] Observemos que:
Si $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -1$.
Si $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -1$.

[2]Más adelante con ayuda de la derivada, el estudio de los crecimientos valores extremos, concavidades e inflexiones, será más inmediato.

[3]$x \to +\infty$ significa: x tiende a más infinito ($\to$: "tiende a").

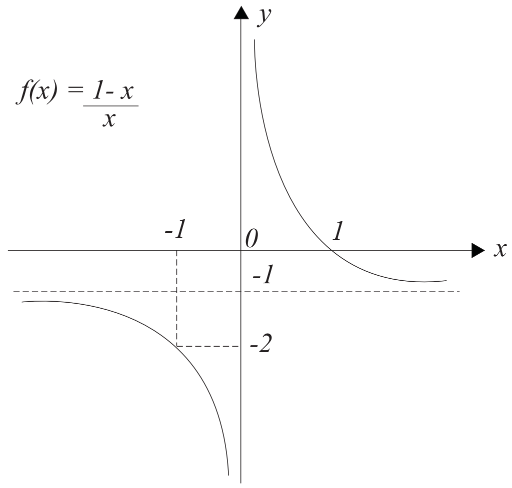


Figura 2.9: Gráfica de $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$

b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, +\infty)$

2) $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$; signos: $f(x) > 0, \forall\, x > 0$ y $f(x) < 0, \forall\, x > 0$.

3) $f(-x) = -\frac{x}{1+x^2} \neq f(x)$, no es par, pero $-f(-x) = f(x)$ con lo que si, es impar. (Simétrica con el origen de coordenadas).

4) Como $(1-x)^2 \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 1 + x^2 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$, análogamente $(1+x)^2 \geq 0 \Rightarrow -2x \leq 1 + x^2 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq -\frac{1}{2}$, así:
$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x)$ está acotada. Nótese que: $-\frac{1}{2}$ constituye su valor mínimo y $\frac{1}{2}$ su valor máximo, en $x = \pm 1$ y $(1, +\infty)$ y creciente para $(-1, 1)$. No es periódica.

5) Observemos que:
Si $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 0^+$
Si $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to 0^-$

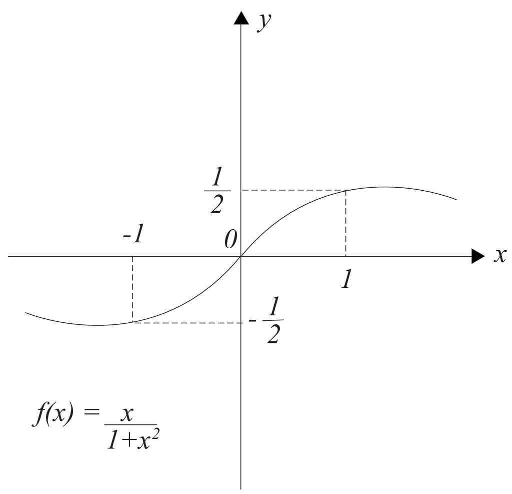


Figura 2.10: Gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, +\infty)$
2) No tiene raíces y $f(x) > 0,\ \forall\, x \in \operatorname{dom} f$,
3) $f(-x) = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$, es por simétrica con el eje Y. No es periódica.
4) Como $\frac{1}{1+x^2} > 0$ y $1 + x^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ se tiene $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ con lo que $f(x)$ es acotada. Nótese que $1 \in \operatorname{dom} f$ es su valor máximo para $x = 0$ y que no tiene valor mínimo, por lo que es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.
5) $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to 0^+$

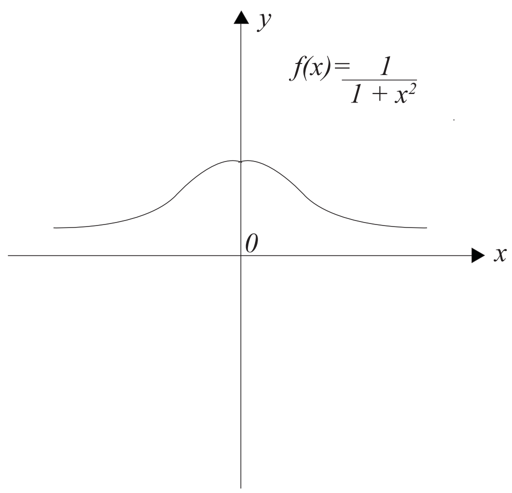


Figura 2.11: Gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

d) $f(x) = \text{máx}(x, x^2)$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, \infty)$
2) $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Signos $f(x) \geq 0$, porque $x^2 > x$ para $x < 0 \vee x > 1$ y $x \geq x^2$ para $0 \leq x \leq 1$.
3) $f(-x) = \text{máx}(-x, x^2) \neq f(x)$, no es par y por 2) no es impar $f(x + T) = \text{máx}(x + T, (x + T)^2) \neq f(x)$, no es periódica.
4) Análogamente por 2., f es acotada inferiormente y/o su valor mínimo para $x = 0$ con lo que es decreciente para $(-\infty, 0)$ y creciente para $(0, +\infty)$.
5) Si $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$.

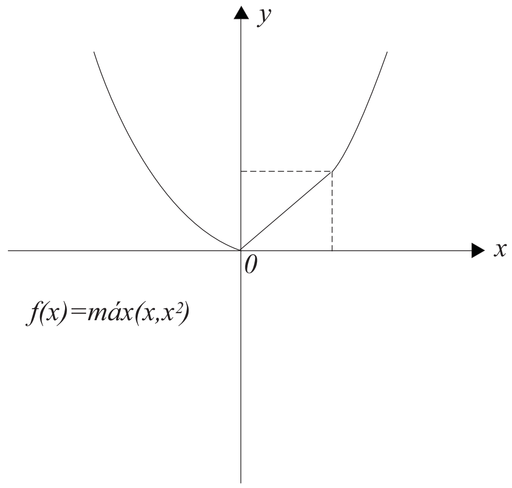


Figura 2.12: Gráfica de $f(x) = \text{máx}(x, x^2)$

e) $f(x) = x - |x|$

1) $\text{dom}\, f = (-\infty, +\infty)$.
2) $f(x) = 0 \Rightarrow \forall\; x \geq 0$. Signos: $f(x) < 0,\; \forall\; x < 0$ y $f(x) = 0,\; \forall\; x > 0$. $f(x) = 2x$ si $x < 0$.
3) $f(-x) = -x - |x| \neq f(x)$ no es par, $-f(-x) = x + |x| \neq f(x)$ no es impar. $f(x+T) = x + T - |x+T| \neq f(x)$, no es periódica.
4) Por 2) f es acotada superiormente y 0 es su valor máximo $\forall\; x \geq 0$, creciente para $(-\infty, 0)$ y nula para $[0, +\infty)$.
5) Si $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$ y si $x \to +\infty \Rightarrow f(x) = 0$

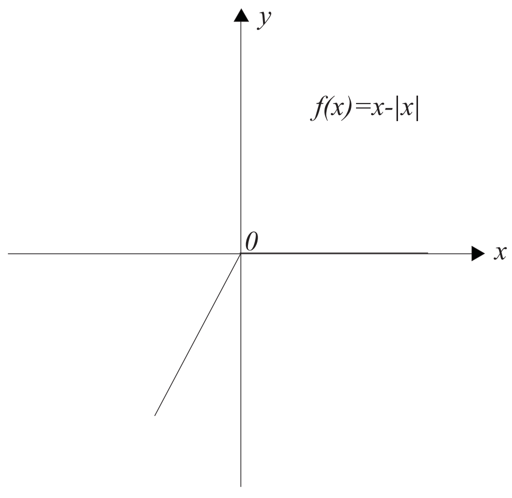


Figura 2.13: Gráfica de $f(x) = x - |x|$

f) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

1) $\text{dom}\, f = (-\infty, +\infty)$
2) $f(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi,\; k \in \mathbb{Z}$. Signos $f(x) \geq 0,\; \forall\; x \in \text{dom}\, f$.

3) $f(-x) = |\operatorname{sen}(-x)| = |-\operatorname{sen} x| = |\operatorname{sen} x| = f(x)$, es par.

4) Observemos que: $0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq 1$, es decir, f es acotada y tiene máximos en $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ que valen 1 y mínimos en $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ cuyo valor es 0.
Es periódica ya que $|\operatorname{sen}(x+T)| = |\operatorname{sen} x \cos T + \operatorname{sen} T \cos x| = |\operatorname{sen} x| \Rightarrow |\cos T| = 1 \wedge \operatorname{sen} T = 0$ de donde $T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ si $k = 1 \Rightarrow T = \pi$ período de f.

5) Si $x \to \pm\infty \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$.

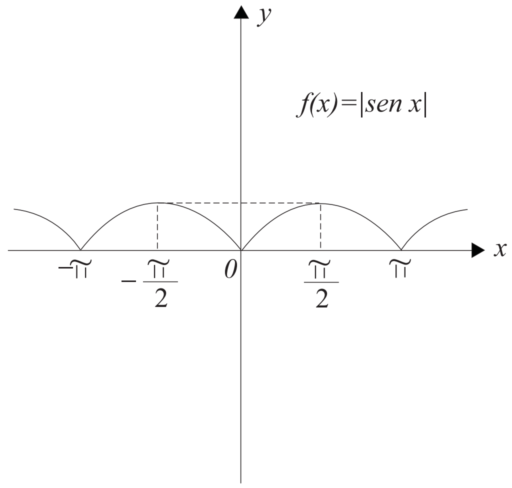


Figura 2.14: Gráfica de $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

g) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2) No tiene raíces. Signos: $f(x) > 0$, $\forall\, x > 0$ y $f(x) < 0$, $\forall\, x < 0$

3) $f(-x) = -\frac{x^2+1}{x} \neq f(x)$, no es par, pero $-f(-x) = \frac{x^2+1}{x} = f(x)$ luego es impar. No es periódica.

4) Investigando el recorrido $y = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow x^2 - yx + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2} \Rightarrow y^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow y \leq -2 \vee y \geq 2$.
$\Rightarrow \operatorname{rec} f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Además, $(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} \leq -2$, $\forall\, x < 0$ y $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2$, $\forall\, x > 0$, luego f no es acotada, además -2 es su valor máximo para $x = -1$ y 2 su valor mínimo para $x = 1$, con lo que es creciente entre $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente entre $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

5) Si $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to \pm\infty$, además obsérvese que como $y = x + \frac{1}{x}$ si $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) = x$

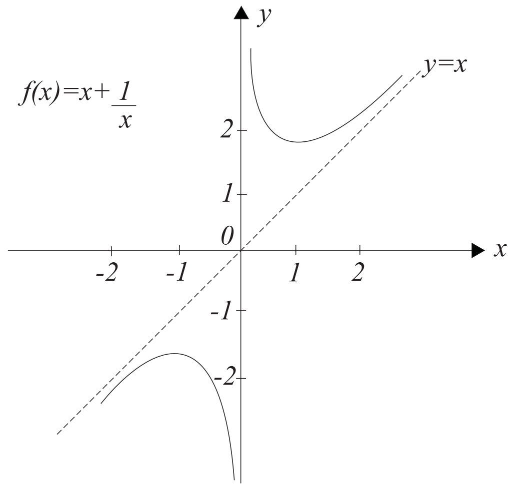


Figura 2.15: Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

h) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$
2) $f(x)=0 \Rightarrow x=0$. Signos: $f(x)>0,\ \forall\ x: -1<x<0 \vee x>1$; $f(x)<0,\ \forall\ x: x<-1 \vee 0<x<1$.
3) $f(-x)=\frac{-x}{x^2-1}=-f(x) \Rightarrow f$ es impar, simétrica con el origen. No es periódica.
4) Investigando el recorrido $yx^2-x-y=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+4y^2}}{2y}$, aparentemente $y=0$ no pertenece al rec f, pero por 2) si $x=0 \Rightarrow y=0$, luego éste es un punto singular, ya que si $-1<x<1 \Rightarrow y=x=0$, pero si $x\to+\infty \Rightarrow f(x)\to 0^+$ y si $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to 0^-$. No está acotada, pues $x\to 1 \Rightarrow y\to\pm\infty \wedge x\to -1 \Rightarrow y\to\pm\infty$.
5) Estudiado en 4).

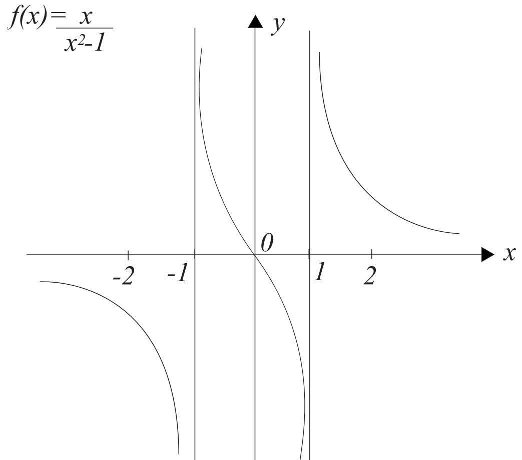


Figura 2.16: Gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

i) $f(x) = x^3 - x^2$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, +\infty)$
2) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1$. Signos: [4] $f(x) < 0,\ \forall\ x < 1$; $f(x) > 0,\ \forall\ x > 1$.
3) $f(-x) = -x^3 - x^2 \neq f(x)$ no es par, y $-f(-x) = x^3 + x^2 \neq f(x)$ no es impar. No es periódica.
4) En este caso por ejemplo, la naturaleza de los signos de f, es relevante para el trazado de su gráfica, conjuntamente con el ser un polinomio. Podemos indicar además que para $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ tenemos un máximo y que entre $0 < x < 1$ deberá existir un mínimo. Como hemos indicado, este estudio más adelante será más compelto.
5) Si $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to \pm\infty$, luego f no es acotada.

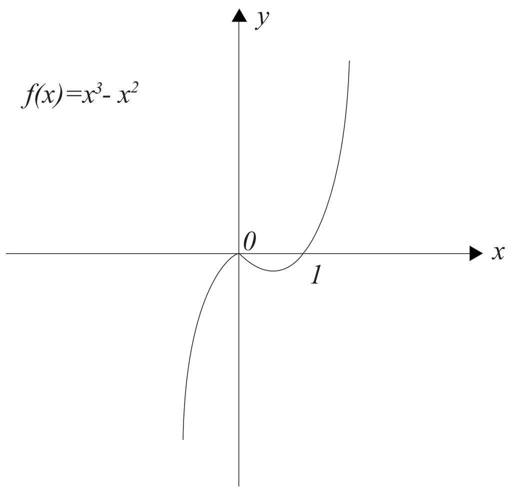


Figura 2.17: Gráfica de $f(x) = x^3 - x^2$

j) $f(x) = \operatorname{sen}|x|$.

En este caso otra manera de trazar la gráfica de f, es apoyarse en la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ por todos conocido, solamente para $x \geq 0$, y reflejar dicha gráfica respecto del eje Y, como lo indicáramos en la materia expuesta al principio, por lo tanto:
$\operatorname{dom} f = (-\infty, \infty)$
raíces $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, es par, no es periódica, acotada, $-1 \leq f(x) \leq 1$.

[4] Ver Ejercicios de Algebra I, del mismo autor, solución de Inecuaciones método de los puntos críticos. Para el esbozo de la gráfica de f, tiene importancia extraordinaria el asunto de los signos de f.

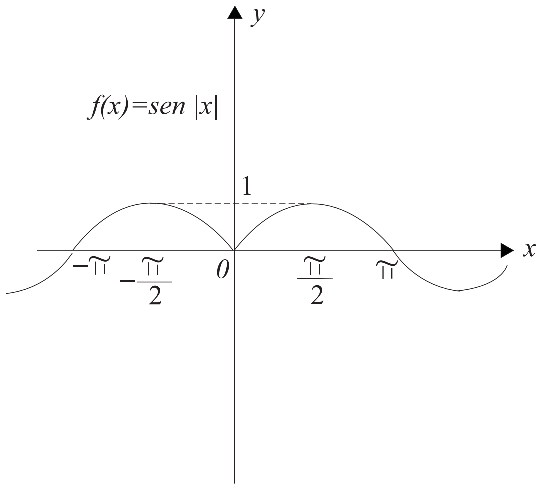


Figura 2.18: Gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}|x|$

k) $f(x) = [x]$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, \infty)$. Nótese que $[x]$ sólo toma valores enteros, es decir, es el entero que cumple: $x - 1 < [x] \leq x$, así, si $-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1$ si $-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2$ análogamente si $0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0$, $1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1$ y así sucesivamente. No es acotada ni periódica y no es simétrica.

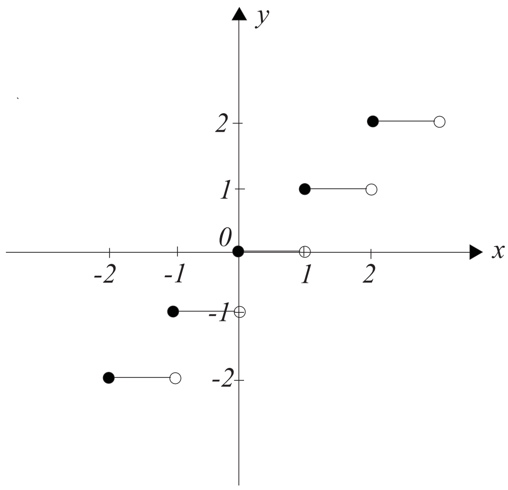


Figura 2.19: Gráfica de $f(x) = [x]$

l) $f(x) = x\sqrt{1-x}$

1) $\operatorname{dom} f \Rightarrow 1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow \operatorname{dom} f = (-\infty, 1]$
2) Raíces $f(x) = 0 \Rightarrow x\sqrt{1-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \veebar x = 1$
Signos: $f(x) < 0$, $\forall\, x < 0$; $f(x) > 0$, $\forall\, x : 0 < x < 1$.
3) $f(-x) = -x\sqrt{1+x} \neq f(x)$ y $-f(-x) = x\sqrt{1+x} \neq f(x)$ no tiene simetrías. No es periódica.
4) Necesariamente $f(x)$ tiene un máximo en $0 \leq x \leq 1$, sea $x_0 \in [0,1]$ para el cual se tiene un máximo, $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall\, x$, luego en $(-\infty, x_0)$

la función es creciente y en $(x_0, 1]$ es decreciente, entonces es acotada superiormente.

5) Si $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$, si $x \to +\infty \Rightarrow f(x)$ no está definida.

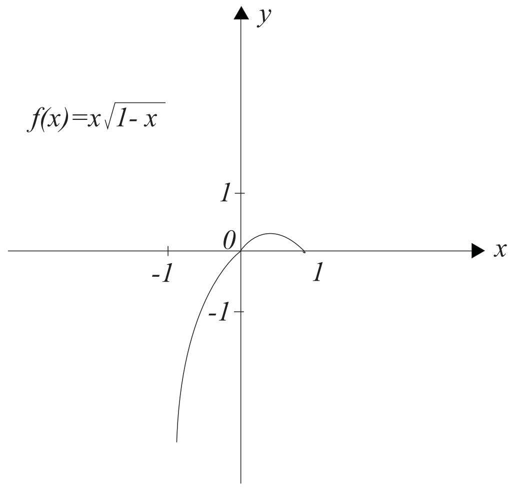


Figura 2.20: Gráfica de $f(x) = x\sqrt{1-x}$

m) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

1) $\operatorname{dom} f \Rightarrow \cos x \geq 0 \Rightarrow x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$
2) Raíces $\Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Signos, $f(x) \geq 0$, siempre positiva o nula.
3) Función par ya que $f(-x) = \sqrt{\cos(-x)} = \sqrt{\cos x} = f(x)$ función periódica, con período 2π.
4) Por la naturaleza de $\cos x$, esta función es acotada, $0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1$ tiene máximo en $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ que vale 1 y es mínima para $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ que vale 0.

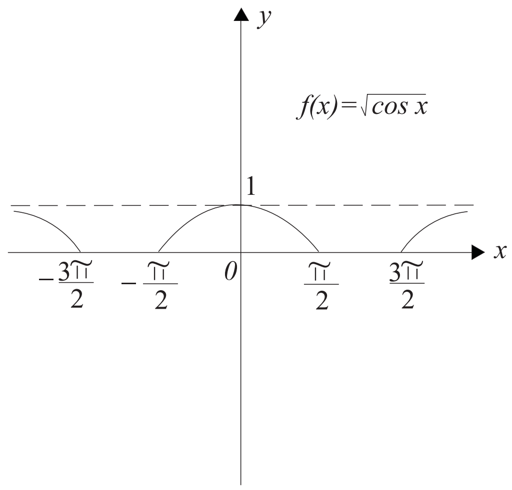


Figura 2.21: Gráfica de $f(x) = \sqrt{\cos x}$

n) $f(x) = \text{Arc}\cos(\cos x)$

1) $\text{dom} f = (-\infty, \infty)$, porque $-1 \leq \cos x \leq 1$, $\forall\, x$.
2) Raíces, $f(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Signos, $f(x) \geq 0$, $\forall\, x$.
   Es periódica, con período 2π, por lo tanto, estudiémosla en el intervalo $(0, 2\pi]$, así tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x & \text{si} \quad \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

   la primera aseveración es por definición, en cambio para la segunda afirmación. Sea $x' = 2\pi - x$, $\pi < x \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq x' < \pi$ y $f(x) = \text{Arc}\cos(\cos(2\pi - x')) = \text{Arc}\cos\cos x' = x' = 2\pi - x$ y así sucesivamente para los demás intervalos.
3) Función par ya que $f(-x) = \text{Arc}\cos(\cos(-x)) = \text{Arc}\cos(\cos x) = f(x)$.
4) Observemos que $0 \leq f(x) \leq \pi$, luego es acotada. Máximos en $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ que valen π y mínimos en $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, que valen 0, creciente en $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ y decreciente en $((2k+1)\pi, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

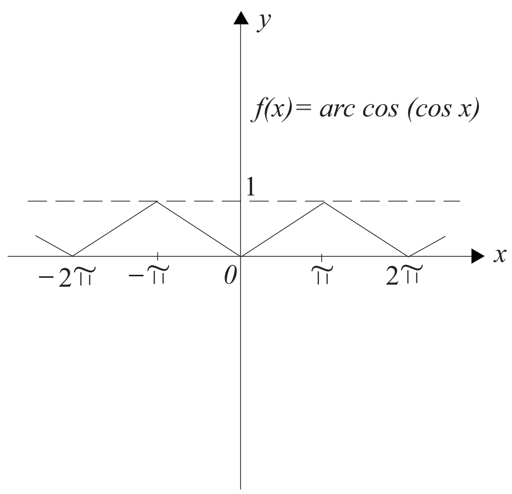


Figura 2.22: Gráfica de $f(x) = \text{Arc}\cos(\cos x)$

12. Dada:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ -1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Determine: $\text{Arc}\,\text{sen}\, f(x)$, $f(\text{sen}\, x)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$, $f(\log x)$, $\log f(x)$ y sus gráficos respectivos.

Solución.

De inmediato el gráfico de f, resulta

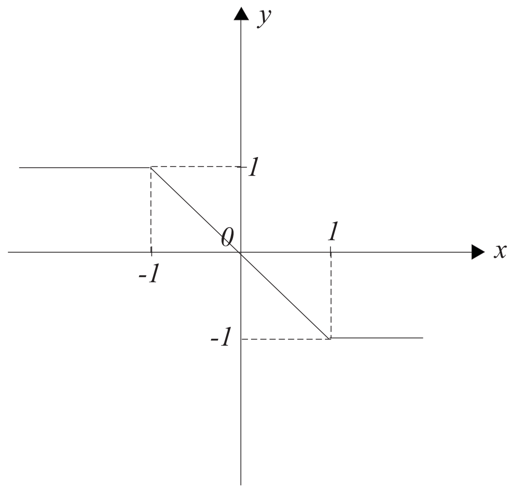


Figura 2.23: Gráfica de $f(x)$

$$\text{Arc sen } f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < -1 \\ \text{Arc sen}(-x) & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad f(\text{sen } x) = -\text{sen } x, \ \forall \ x \in (-\infty, \infty)$$

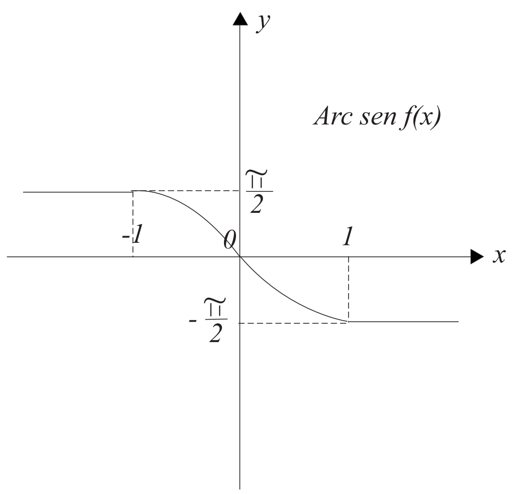


Figura 2.24: Gráfica de $\text{Arc sen } f(x)$

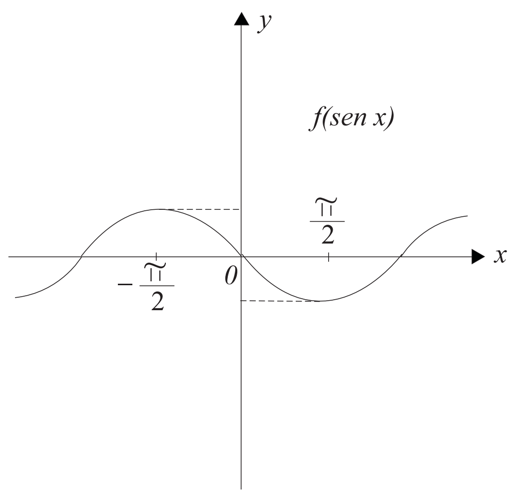


Figura 2.25: Gráfica de $f(\text{sen } x)$

$$|f(x)| = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -1 \underline{\vee} x \geq 1 \\ -x & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases} \qquad f|x| = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < -1 \underline{\vee} x \geq 1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ -x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

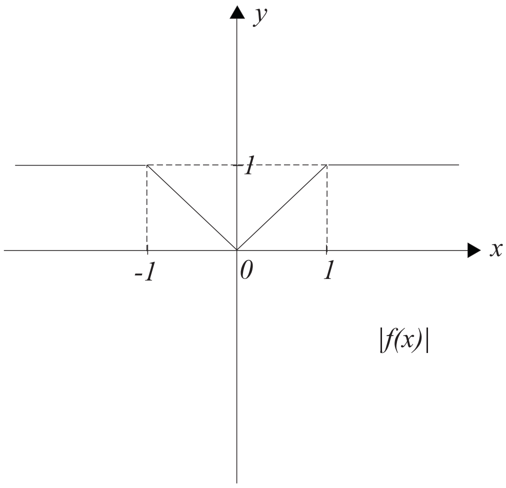


Figura 2.26: Gráfica de $|f(x)|$

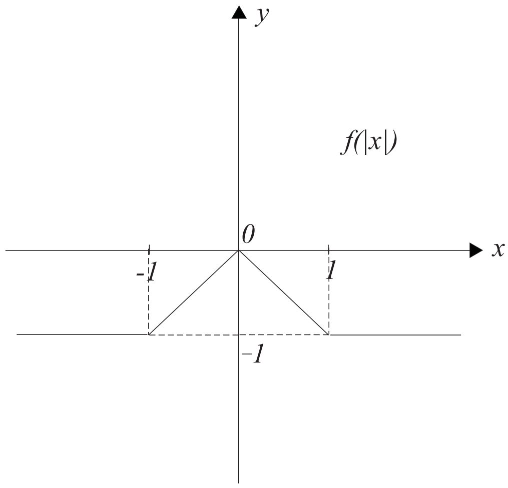


Figura 2.27: Gráfica de $f|x|$

$$f(\log x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < e^{-1} \\ -\log x & \text{si} \quad e^{-1} \leq x < e \\ -1 & \text{si} \quad x \geq e \end{cases} \qquad \log f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \log(-x) & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

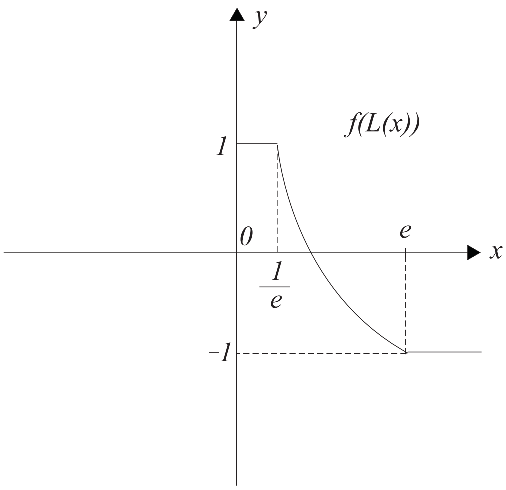


Figura 2.28: Gráfica de $f(\log x)$

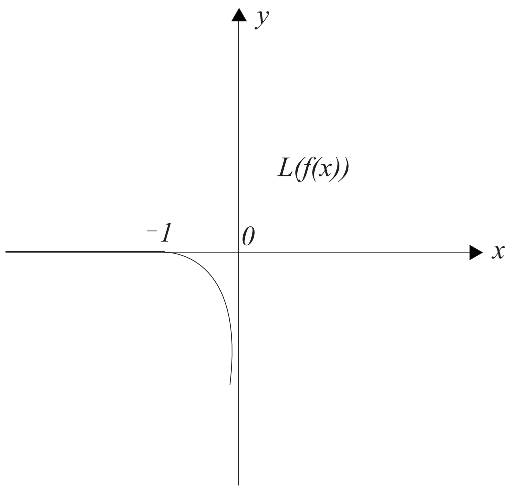


Figura 2.29: Gráfica de $\log f(x)$

13. Dada la función f cuyo gráfico es

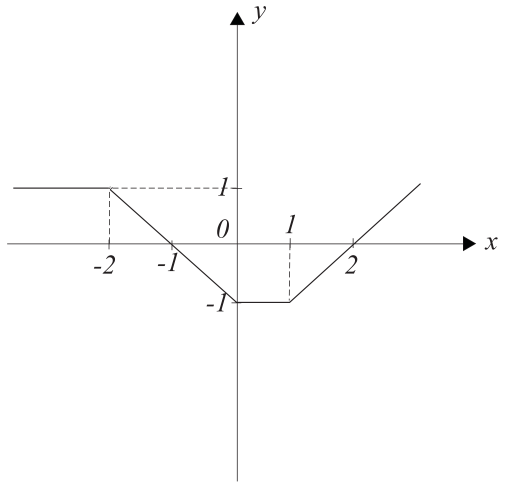


Figura 2.30: Gráfica de $f(x)$

Dibujar los gráficos de: $|f(x)|$, $f(|x|)$, $f(x-2)$, $f(2-x)$, $f(|x-2|)$, $f(\frac{x}{2})$, $f(2x)$, $f(x+1)$, $f(1+\frac{x}{2})$, $1+f(1+\frac{x}{2})$, $|1+f(1+\frac{x}{2})|$, $[f(x)]$, $[f(x)-[f(\frac{x}{2})]]$.

Solución.

Nótese que:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } \; x\leq -2 \\ -(1+x) & \text{si } \; -2<x\leq 0 \\ -1 & \text{si } \; 0<x\leq 1 \\ x-2 & \text{si } \; x>1 \end{cases}$$

Construiremos directamente del gráfico dado, los gráficos pedidos, haciendo caso de la materia expuesta anteriormente en el punto 2.3.

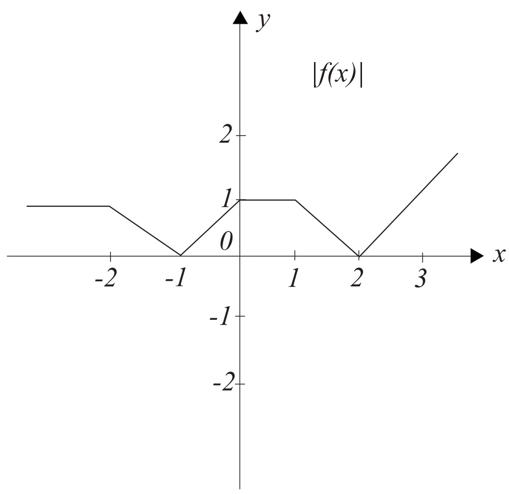


Figura 2.31: Gráfica de $|f(x)|$

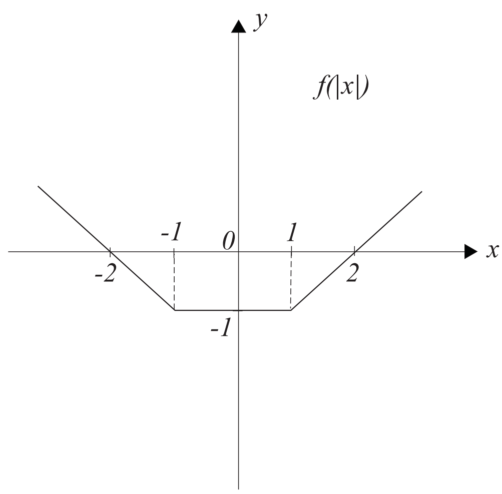


Figura 2.32: Gráfica de $f(|x|)$

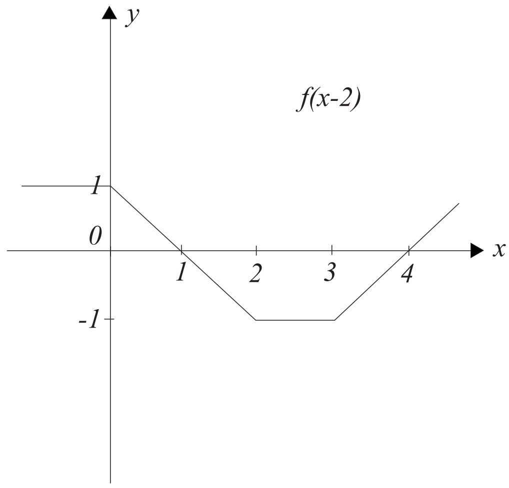


Figura 2.33: Gráfica de $f(x-2)$

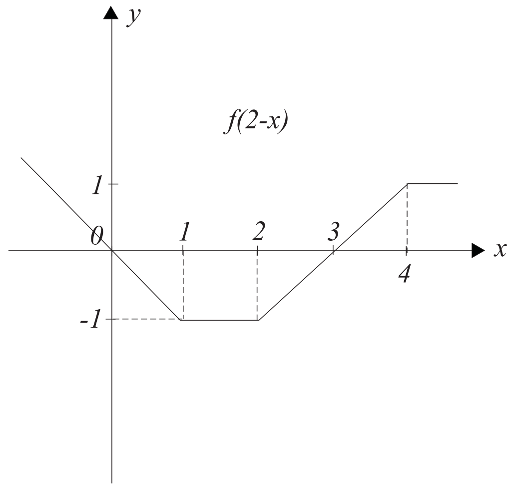


Figura 2.34: Gráfica de $f(2-x)$

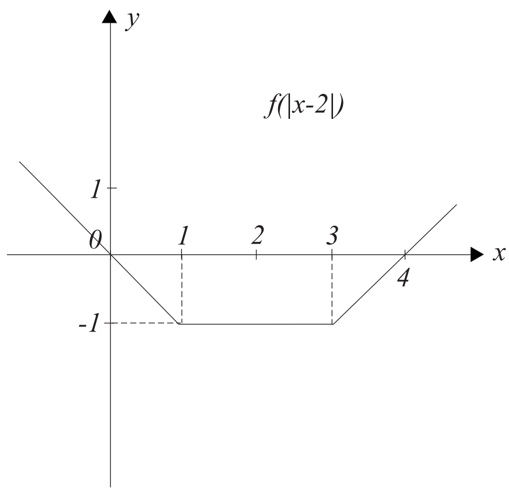


Figura 2.35: Gráfica de $f(|x-2|)$

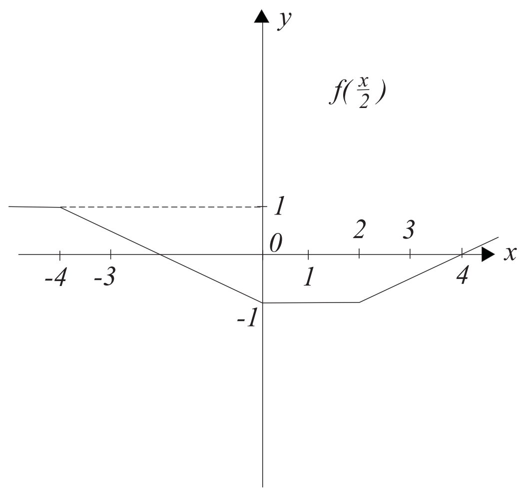


Figura 2.36: Gráfica de $f(\dfrac{x}{2})$

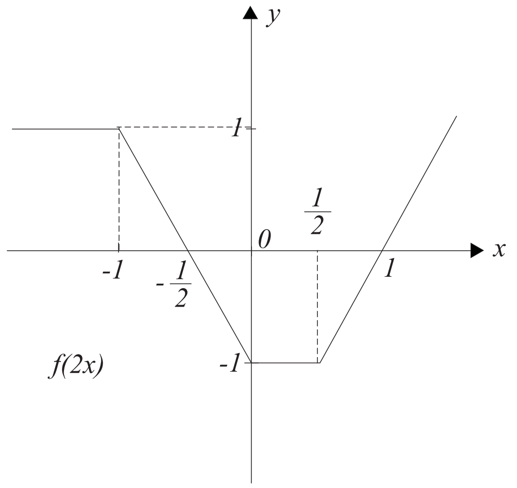


Figura 2.37: Gráfica de $f(2x)$

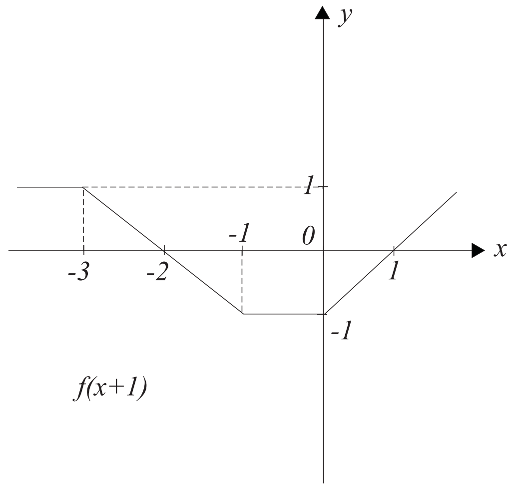


Figura 2.38: Gráfica de $f(x+1)$

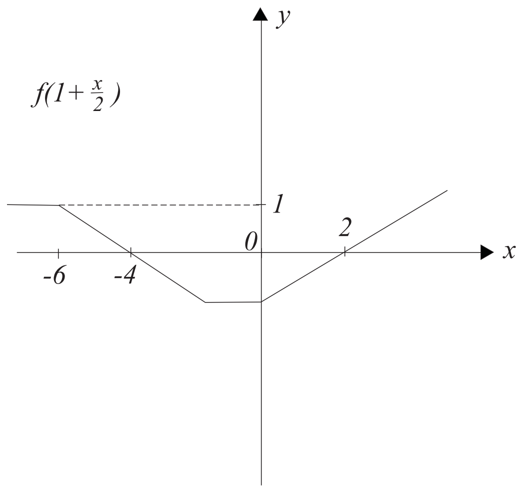


Figura 2.39: Gráfica de $f(1+\dfrac{x}{2})$

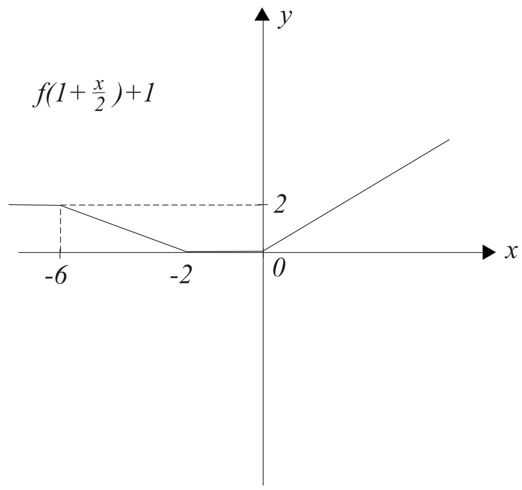


Figura 2.40: Gráfica de $f(1+\dfrac{x}{2})+1$

Nota. Usted puede obtener una fórmula explícita para cada una de estas funciones graficadas.
Para el último gráfico seguiremos la siguiente secuencia de gráficos.

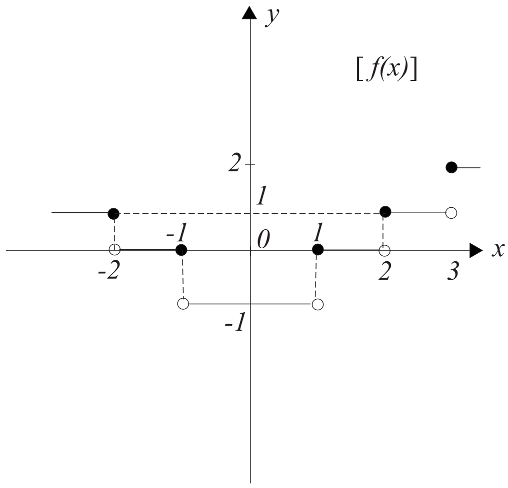


Figura 2.41: Gráfica de $[f(x)]$

Obtención del gráfico de: $[f(x) - [f(\frac{x}{2})]]$

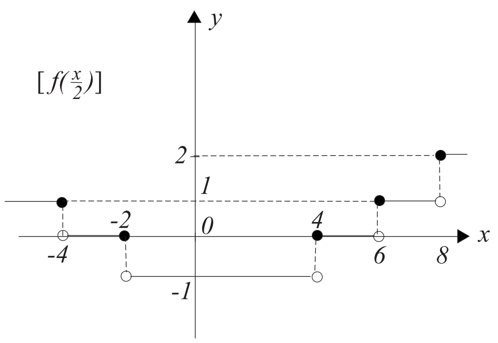


Figura 2.42: Gráfica de $[f(\dfrac{x}{2})]$

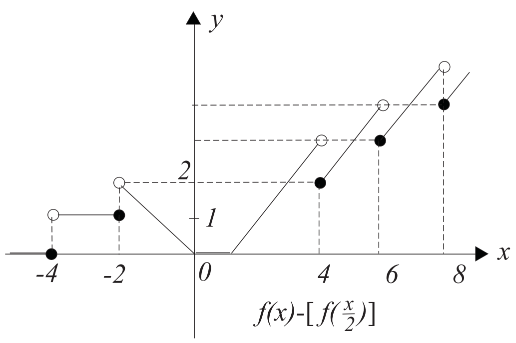


Figura 2.43: Gráfica de $f(x) - [f(\dfrac{x}{2})]$

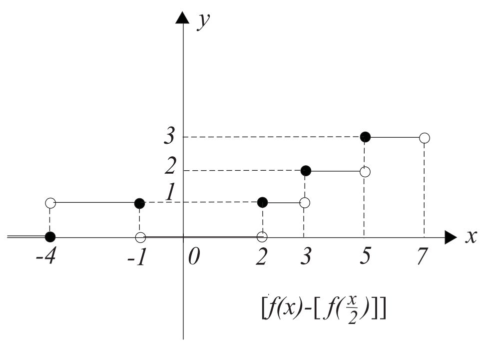


Figura 2.44: Gráfica de $[f(x) - [f(\frac{x}{2})]]$

14. Encuentre el gráfico de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$, $g(x) = [x] + f(x)$

    b) $f(x) = x[\frac{1}{x}]$

    c) $f(x) = \frac{1}{x}[x]$

    d) $f(x) = (-1)^{[\frac{1}{x}]}$

    e) $f(x) = [\operatorname{sen} x]$

    f) $f(x) = (x - [x])^2$

Solución.

a) $\operatorname{dom} f \Rightarrow x - [x] \geq 0 \Rightarrow (-\infty, \infty)$, nótese que $0 \leq f(x) < 1$ es decir, f es acotada. Se puede construir el gráfico de f, en base a los gráficos ya conocidos de las funciones $y = x$ e $y = [x]$, simplemente restando sus ordenadas y luego extraer raíz cuadrada positiva, para obtener:

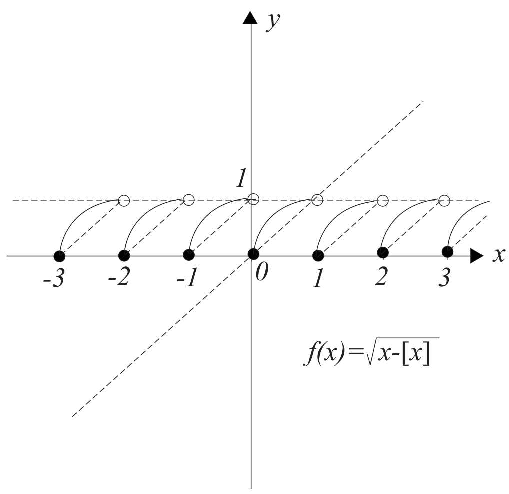


Figura 2.45: Gráfica de $f(x) = \sqrt{x - [x]}$

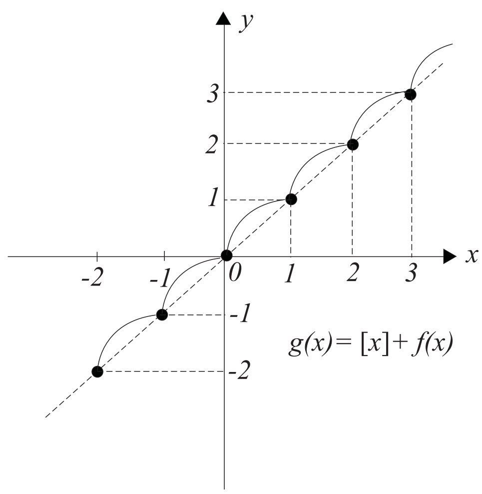


Figura 2.46: Gráfica de $g(x) = [x] + f(x)$

Se procedió en forma análoga para $g(x)$, obsérvese que $\operatorname{dom} g = \operatorname{rec} g = (-\infty, \infty)$ no es acotada, es creciente, no periódica.

b) $f(x) = x[\frac{1}{x}]$;
$\operatorname{dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
si $x > 1 \Rightarrow f(x) = 0$, estudiemos el intervalo $(0, 1]$ $f(1) = 1$,
si $\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow f(x) = x$;
si $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = 2x$ y así sucesivamente,
si $\frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1 \Rightarrow f(x) = (n-1)x$.
Para $x < 0$, si $x \leq -1 \Rightarrow f(x) = -x$, si $-1 < x < -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -2x$, si $-\frac{1}{2} < x \leq -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = -3x \ldots -\frac{1}{n-1} \leq x \leq -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1 \Rightarrow f(x) = -nx$.

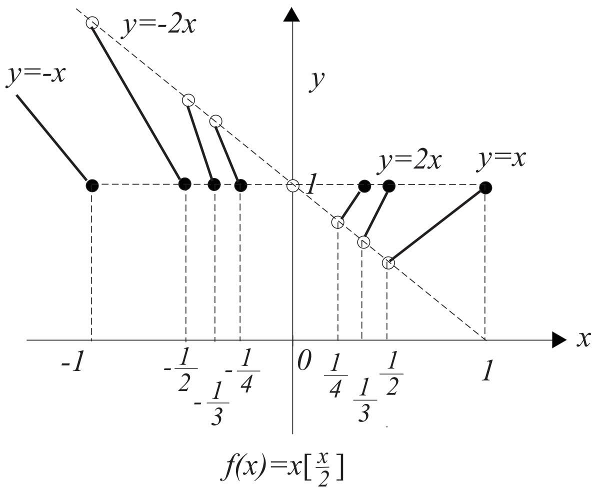


Figura 2.47: Gráfica de $f(x) = x[\frac{1}{x}]$

c) $f(x) = \frac{1}{x}[x]$
Observemos por separado que el Dominio de la función $\frac{1}{x}$ es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y el dominio de $[x]$ es $(-\infty, \infty)$, luego el dominio de la función producto resulta la intersección, es decir:

$\operatorname{dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ además como $[x] \geq 0$ para $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{[x]}{x} \geq 0$ y también como $[x] < 0$ para $x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{[x]}{x} > 0$, luego $f(x) \geq 0$ $\forall$ $x \in \operatorname{dom} f$. Ahora para $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) = \frac{0}{x} = 0$; para $1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$; para $2 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x} \ldots$ para $n - 1 \leq x < n \Rightarrow f(x) = \frac{n-1}{x}$; $n \in \mathbb{N}$ si $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 1$ para $-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x}$; para $-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = \frac{-2}{x} \ldots$, para $-n \leq x < -(n-1) \Rightarrow f(x) = \frac{-n}{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

No tiene simetrías, no es periódica ni acotada.

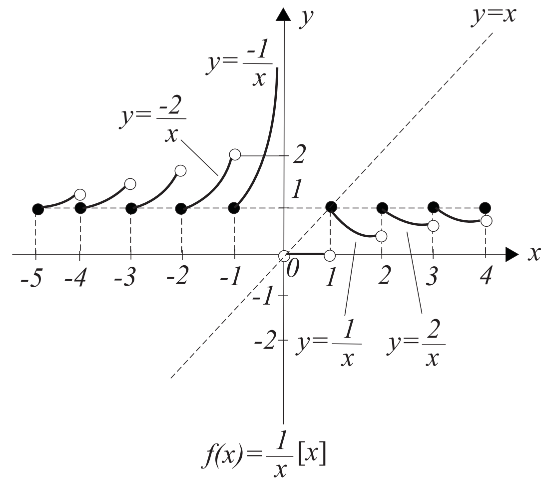


Figura 2.48: Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}[x]$

d) $f(x) = (-1)^{[\frac{1}{x}]}$. De inmediato $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,
si $x > 1 \Rightarrow [\frac{1}{x}] = 0$ así, $f(x) = (-1)^0 = 1$.
Si $x \leq -1 \Rightarrow [\frac{1}{x}] = -1$ así $f(x) = (-1)^{-1} = -1$.
Ahora, para $\frac{1}{2} < x \leq 1 \Rightarrow f(x) = (-1)^1 = 1$;
para $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x)?(-1)^2 = 1$, para $\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = (-1)^3 = -1$
y así sucesivamente esto para $(0, 1]$, de igual manera:
$-1 < x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = (-1)^{-2} = 1$,
para $-\frac{1}{2} < x \leq -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = (-1)^3 = -1$
para $-\frac{1}{3} < x \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = 1$
y así sucesivamente, con lo que esta función es acotada y no tiene simetrás.

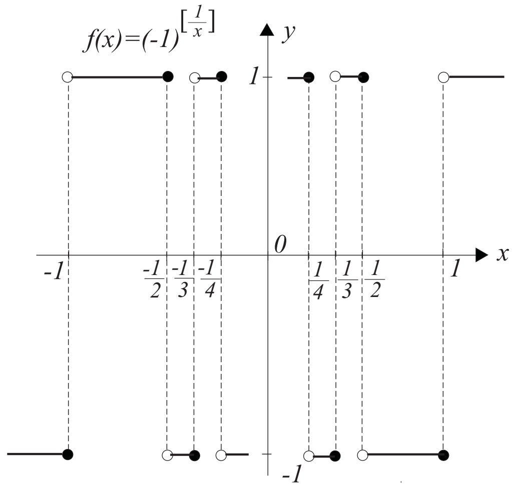


Figura 2.49: Gráfica de $f(x) = (-1)^{[\frac{1}{x}]}$

e) $f(x) = [\operatorname{sen} x]$
De inmediato $\operatorname{dom} f = (-\infty, \infty)$, como la función $\operatorname{sen} x$ es acotada, $f(x) = [\operatorname{sen} x]$ también lo es. Observemos que:

$f(x) = 1$ si $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
$f(x) = 0$ si $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ con $x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = -1$ si $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
No tiene simetrás. Periódica, de período 2π.

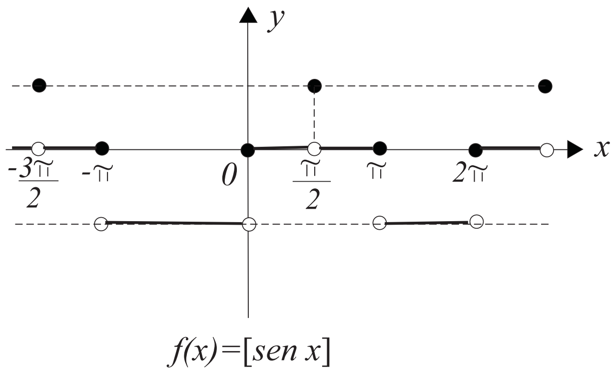


Figura 2.50: Gráfica de $f(x) = [\operatorname{sen} x]$

f) $f(x) = (x - [x])^2$
dom $f = ((-\infty, \infty)$ para construir este gráfico siga los mismos pasos que para la función del gráfico a), excepto que al final eleve al cuadrado, así resulta:

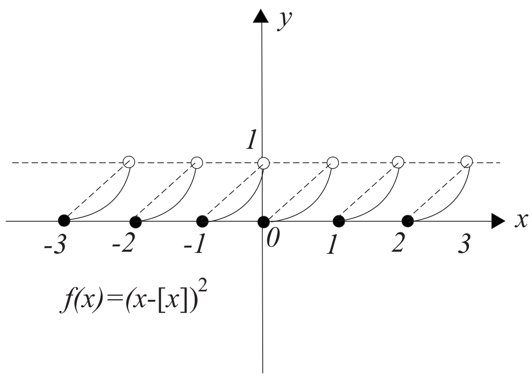


Figura 2.51: Gráfica de $f(x) = (x - [x])^2$

15. Dado el gráfico de $f(x)$, por:

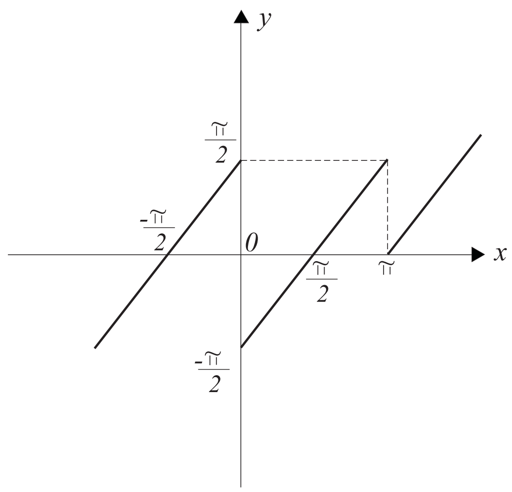


Figura 2.52: Gráfica de $f(x)$

Graficar: $g(x) = \cos f(x)$ y $h(x) = f(\cos x)$, indicando dominio, recorrido, simetrás y periodicidad.

Solución.

Observemos que:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \\ x - \pi & \text{si} \quad x \geq \pi \end{cases}$$

$$g(x) = \cos f(x) = \begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x < 0 \\ \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} x & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \\ \cos(x - \pi) = -\cos x & \text{si} \quad x \geq \pi \end{cases}$$

Con lo que: $\operatorname{dom} g = (-\infty, +\infty)$, $\operatorname{rec} g = [-1, 1]$, no tiene simetrías ni es períodica. (Figura 2.53)

$$h(x) = f(\cos x) = \begin{cases} \cos x + \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad -1 \leq \cos x < 0 \\ \cos x - \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad 0 \leq \cos x \leq 1 \end{cases}$$

Como

$$-1 \leq \cos x < 0 \equiv 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq \cos x \leq 1 \equiv 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x < 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$h(x) = f(\cos x) = \begin{cases} \cos x + \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ cos x - \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x < 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Cuyo $\operatorname{dom} h = (-\infty, +\infty)$, $h(-x) = h(x)$ con lo que es simétrica con el eje Y, periódica de período 2π y acotada. (Figura 2.54)

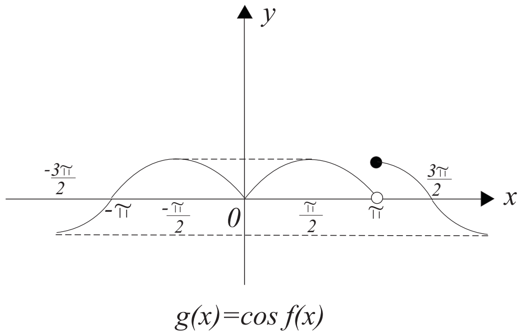


Figura 2.53: Gráfica de $\cos f(x)$

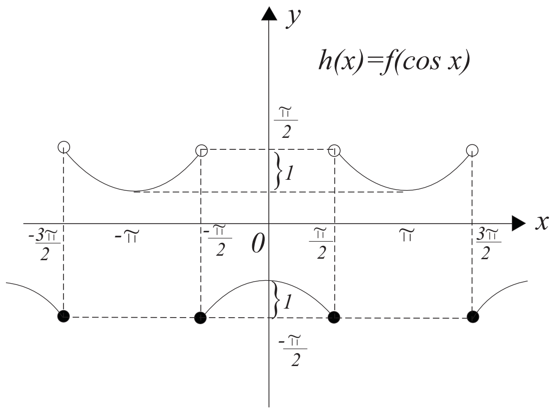


Figura 2.54: Gráfica de $f(\cos x)$

16. Sea f la función de período 2 cuyo gráfico se indica para $-1 \leq x < 1$. Determinar los gráficos $h(x) = \cos(\frac{\pi}{2} f(x))$ y $g(x) = f(\frac{2}{\pi} |\operatorname{Arc\,sen} x|)$, indicando dominio, simetrías y períodos.

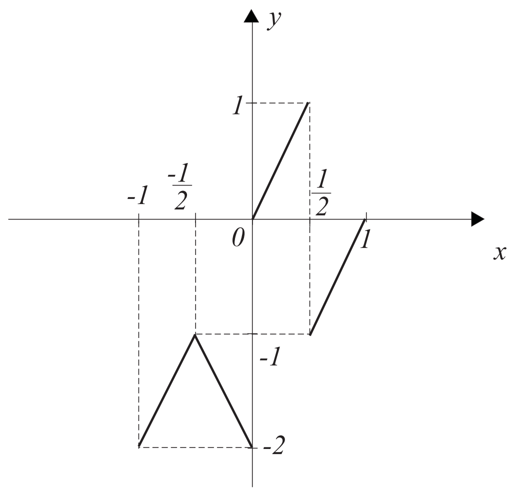


Figura 2.55: Gráfica de $f(x)$

Solución.

Obsérvese que:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } \ -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \veebar 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(x-1) & \text{si } \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ -2(x+1) & \text{si } \ -\frac{1}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

de donde se obtiene:

$$h(x)=\begin{cases}\cos\pi x & \text{si} \quad -1\leq x\leq -\frac{1}{2}\ \underline{\vee}\ 0\leq x<\frac{1}{2}\\ \cos\pi(x-1)=-\cos\pi x & \text{si} \quad \frac{1}{2}\leq x\leq 1\\ -\cos\pi x & \text{si} \quad -\frac{1}{2}\leq x<0\end{cases}$$

cuyo gráfico resulta:

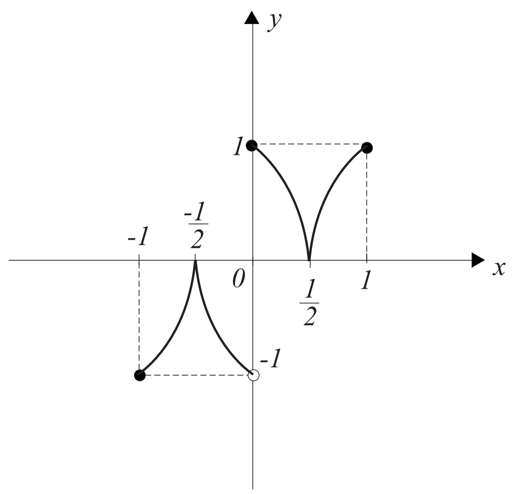


Figura 2.56: Gráfica de $h(x)$

$\operatorname{dom} h=(-\infty,+\infty)$, no es simétrica y peródica de período 2.

En forma similar, obtenemos para $g(x)$:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{4}{\pi}|\operatorname{Arc\,sen} x| & \text{si} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{4}{\pi}|\operatorname{Arc\,sen} x|-2 & \text{si} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\leq x\leq 1\ \underline{\vee}\ -1\leq x\leq -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

cuyo gráfico resulta:

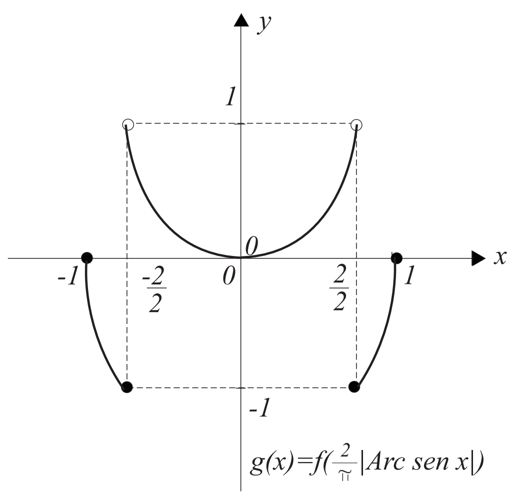


Figura 2.57: Gráfica de $g(x)$

Nótese por ejemplo:

$f(\frac{2}{\pi}|\operatorname{Arc}\operatorname{sen} x|) = \frac{4}{\pi}|\operatorname{Arc}\operatorname{sen} x|$ para

$-1 \leq \frac{2}{\pi}|\operatorname{Arc}\operatorname{sen} x| \leq -\frac{1}{2} \veebar 0 \leq \frac{2}{\pi}|\operatorname{Arc}\operatorname{sen} x| < \frac{1}{2}$,

la primera desigualdad no tiene sentido, en cambio de la segunda se sigue

$0 \leq |\operatorname{Arc}\operatorname{sen} x| < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

también que:

$0 \leq \frac{2}{\pi}|\operatorname{Arc}\operatorname{sen} x| < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{4}{\pi}|\operatorname{Arc}\operatorname{sen} x| < 1$.

De igual forma para las otras ramas, así $g(x)$ es acotada, par y periódica de período 2.

17. Trazar los gráficos de:

    a) $f(x) = x \operatorname{sen} x$
    b) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$
    c) $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$
    d) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$
    e) $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x)$
    f) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|}$
    g) $f(x) = (1 - \frac{|x|}{x})x + (1 + \frac{|x|}{x}) \cos \frac{\pi}{x}$
    h) $f(x) = \frac{2}{x} \cos x$
    i) $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$

Solución.

a) $f(x) = x \operatorname{sen} x$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, +\infty)$
2) Raíces $f(x) = 0 \Rightarrow x \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   Signos:

   $+ \quad \bullet \quad - \quad \bullet \quad + \quad \bullet \quad + \quad \bullet \quad - \quad \bullet \quad +$

   $-2\pi \quad -\pi \quad 0 \quad \pi \quad 2\pi$

3) $f(-x) = -x \operatorname{sen}(-x) = x \operatorname{sen} x = f(x)$, par
4) Si $x > 0$ y como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \Rightarrow -x \leq x \operatorname{sen} x \leq x$
   si $x < 0$ y $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \Rightarrow x \leq x \operatorname{sen} x \leq -x$.
   No es periódica.
5) Si $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to |\infty|$.

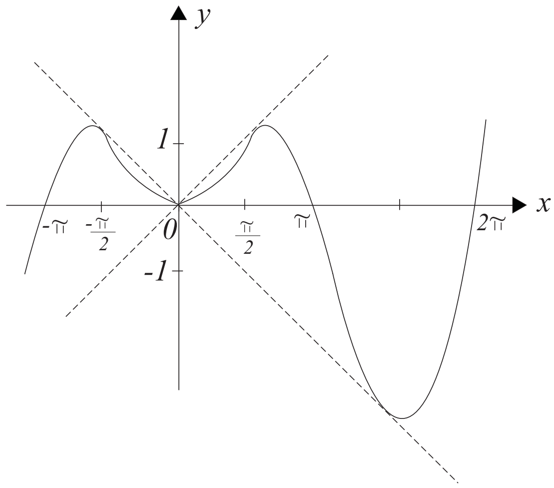


Figura 2.58: Gráfica de $f(x) = x \operatorname{sen} x$

b) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2) Raíces $\Rightarrow \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2k\pi}$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.
3) Función impar ya que: $f(-x) = -\operatorname{sen} \frac{1}{x} = -f(x)$
4) Acotada ya que: $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1$. No es periódica.
5) Si $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to 0^{\pm}$.

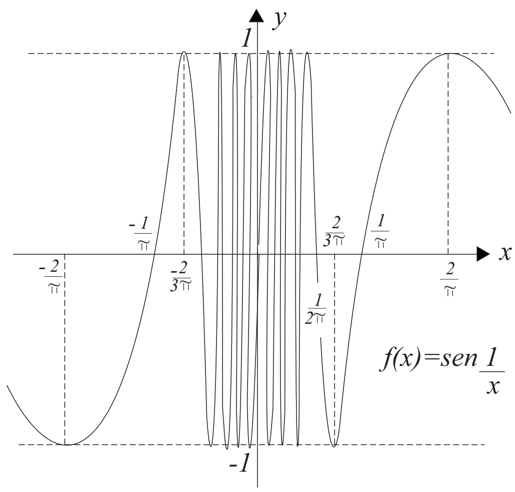


Figura 2.59: Gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2) Raíces: $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$
3) Función par ya que: $f(-x) = -x \operatorname{sen}(-\frac{1}{x}) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = f(x)$
4) Nótese que si $x > 0 \Rightarrow -x \leq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x$ y si $x < 0$
   $x < x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq -x$. No es periódica ni acotada.
5) Si $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to 1$[5]

[5]Más adelante con la noción de límite se justificará plenamente este resultado.

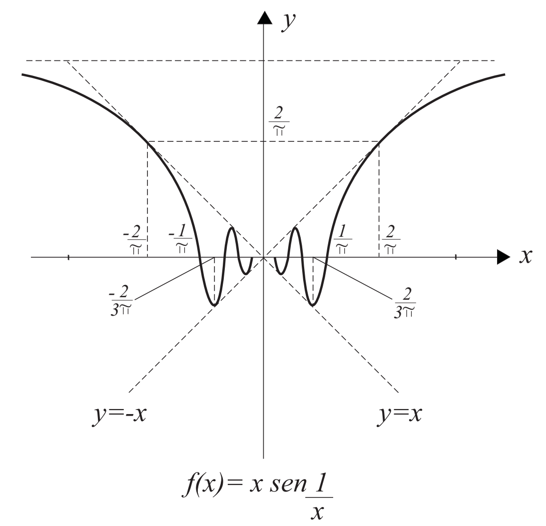


Figura 2.60: Gráfica de $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

d) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2) Raíces: $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$
3) Función impar, ya que: $f(-x) = x^2 \operatorname{sen}(-\frac{1}{x}) = -x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = f(x)$
4) Notemos que $\forall\, x \in \operatorname{dom} f : -x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2$. No es acotada y no es periódica.
5) Si $x \to \pm \Rightarrow f(x) \to |\infty|$.

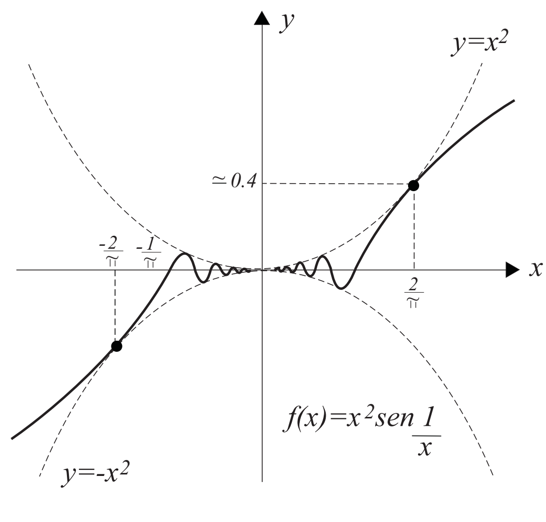


Figura 2.61: Gráfica de $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x)$

1) $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$
2) Raíces, $f(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Signos: + + − − + + − −

-2π $\quad -\frac{3\pi}{2}$ $\quad -\pi$ $\quad -\frac{\pi}{2}$ $\quad 0$ $\quad \frac{\pi}{2}$ $\quad \pi$ $\quad \frac{3\pi}{2}$

$f(x) > 0,\ \forall\ x : h\pi < x < (k+1)\pi$ si $k = \pm 2n,\ n \in \mathbb{N}_0$;
$f(x) < 0,\ \forall\ x : h\pi < x < (k+1)\pi$ si $k = \pm(2n-1),\ n \in \mathbb{N}$;
con $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

3) Función impar ya que $f(-x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(-x)) = -\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x) = -f(x)$

4) Función periódica de período 2π ya que $f(x+2\pi) = f(x)$. No es acotada.

5) Nótese que si $x \to (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) \to |\infty|,\ k \in \mathbb{Z}$.

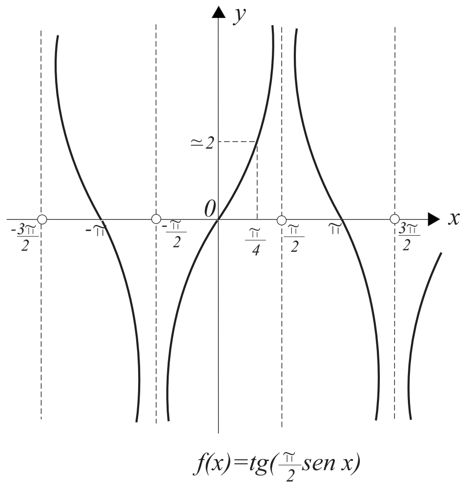


Figura 2.62: Gráfica de $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x)$

f) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|}$

1) $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

2) No tiene raíces. Si $2k\pi < x < (2k+1)\pi \Rightarrow |\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x$, así $f(x) = 1$, si $(2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow |\operatorname{sen} x| = -\operatorname{sen} x$. Así $f(x) = -1$

3) Función impar ya que $f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{|\operatorname{sen}(-x)|} = \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|} = -f(x)$ acotada y periódica de período 2π.

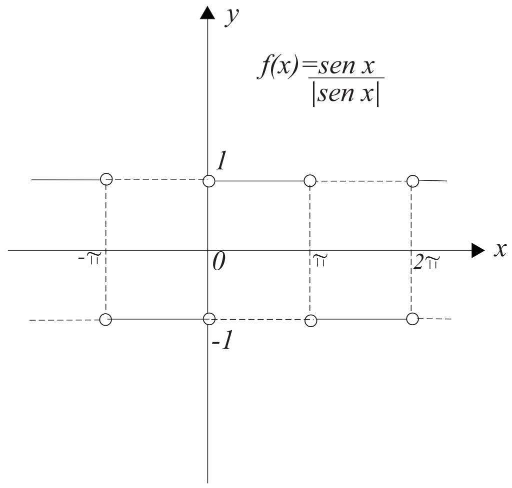


Figura 2.63: Gráfica de $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|}$

g) $f(x) = (1 - \frac{|x|}{x})x + (1 + \frac{|x|}{x})\cos\frac{\pi}{x}$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2) Si $x > 0 \Rightarrow f(x) = 2\cos\frac{\pi}{x}$ raíces cuando $\cos\frac{\pi}{x} = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{x} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{4k+1}$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.
Nótese que cuando $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 2$ ahora si $x < 0 \Rightarrow f(x) = 2x$, no hay raíces y si $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$.
3) No tiene simetrías, no es acotada ni periódica. (Figura 58).

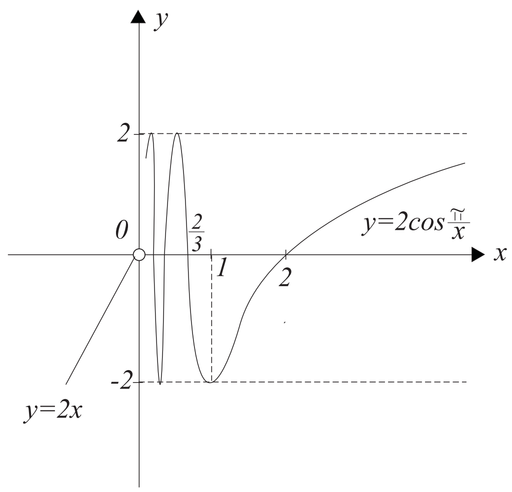
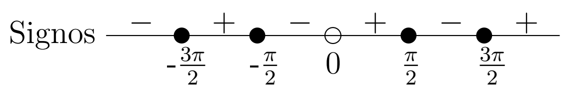


Figura 2.64: Gráfica de $f(x) = (1 - \frac{|x|}{x})x + (1 + \frac{|x|}{x})\cos\frac{\pi}{x}$

h) $f(x) = \frac{2}{x}\cos x$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2) Raíces; $f(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.



3) Función impar ya que $f(-x) = -\frac{2}{x}\cos(-x) = -\frac{2}{x}\cos x = -f(x)$.
4) Observemos si $x > 0$ y $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -\frac{2}{x} \leq \frac{2}{x}\cos x \leq \frac{2}{x}$
   si $x < 0 \Rightarrow \frac{2}{x} \leq \frac{2}{x}\cos x \leq -\frac{2}{x}$.
   No es acotada ni periódica.
5) Si $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to 0^{\pm}$.

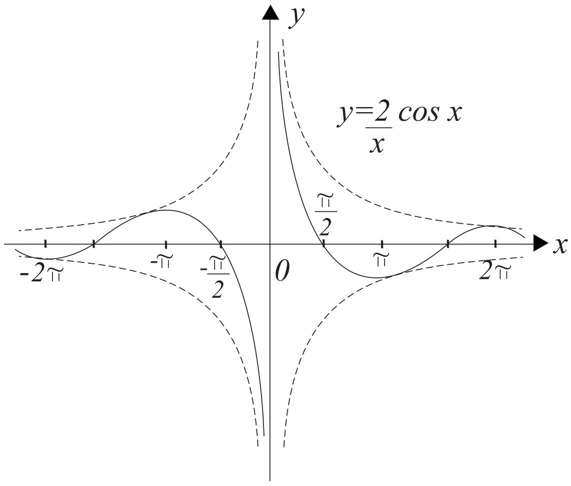


Figura 2.65: Gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}\cos x$

i) $f(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sen}^2\frac{1}{x}$

1) $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2) Raíces $\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{k\pi}$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.
3) Función impar ya que $f(-x) = -\frac{1}{x}\operatorname{sen}^2\frac{1}{x} = -f(x)$.
4) Si $x > 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x}\operatorname{sen}^2\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}$ si $x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{x}\operatorname{sen}^2\frac{1}{x} \leq 0$, no es acotada ni periódica.
5) Si $x \to \pm\infty \Rightarrow 0^{\pm}$.

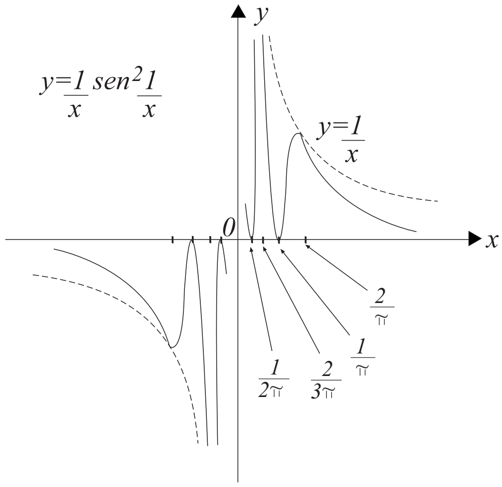


Figura 2.66: Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sen}^2\frac{1}{x}$

18. Determinar cuáles de las siguientes funciones son periódicas, indicando el período de las que lo son.

   a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x + \frac{\pi}{4})$
   b) $f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$
   c) $f(x) = |\cos x|$
   d) $f(x) = x + \operatorname{sen} x$
   e) $f(x) = \cos \sqrt{x}$
   f) $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$
   g) $f(x) = \cos x^2$

Solución.

a) Sea T el período, $T > 0$, se debe verificar $f(x) = f(x+T)$, es decir, $\operatorname{sen}(2x + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{sen}(2(x+T) + \frac{\pi}{4})$, de donde $\operatorname{sen} 2x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2x \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}(2x + 2T)\cos \frac{\pi}{4} + \cos(2x + 2T)\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$, así necesariamente:

$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(2x + 2T) = \operatorname{sen} 2x \cos 2T + \cos 2x \operatorname{sen} 2T$

$\cos 2x = \cos(2x + 2T) = \cos 2x \cos 2T - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2T$

de donde se debe tener:

$\cos 2T = 1 \wedge \operatorname{sen} 2T = 0 \Rightarrow 2T = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}^+$,

de aquí $T = k\pi$, pero como el período es el menor $T > 0$ esto se verifica para $k = 1$, así $T = \pi$, resulta el período de esta función.

b) $f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x + \frac{\pi}{2})$, como $f(x+T) = f(x) \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x + 4T + \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos 4x \cos 4T - \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 4T = \cos 4x$ lo que obliga $\cos 4T = 1 \ \wedge \ \operatorname{sen} 4T = 0$ de donde $T = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ para $k = 0 \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$ período de esta función.

c) $f(x) == |\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{(1 + \cos 2x)/2}$; pero sabemos que la función $\cos 2x$ tiene un período $T = \pi$, luego la función dada tiene el mismo período.

d) Supongamos lo contrario, es decir, que la función tiene un período T, luego: $x + T + \operatorname{sen}(x+T) = x + \operatorname{sen} x \Rightarrow T = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x+T) \Rightarrow \cos(x + \frac{T}{2}) = -\frac{T}{2\operatorname{sen}\frac{T}{2}}$ que es imposible para cualquier T constante, ya que el primer miembro no es constante, luego la función no tiene período.

e) Supongamos lo contrario, entonces:

$\cos\sqrt{x+T} = \cos\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x+T} = 2k\pi \pm \sqrt{x}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x+T} \mp \sqrt{x} = 2k\pi \Rightarrow \frac{T}{\sqrt{x+T} \pm \sqrt{x}} = 2k\pi$,

lo que es imposible, ya que los primeros miembros de estas igualdades son funciones de un argumento continuo x.

f) $\cos(\operatorname{sen} x) = \cos(\operatorname{sen}(x+T)) \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 2k\pi \pm \operatorname{sen}(x+T)$, $k \in \mathbb{Z}$ tomando el signo (-) (análogo para el (+)),

$2\,\text{sen}(x+\frac{T}{2})\cos(\frac{T}{2}) = 2k\pi \Rightarrow \cos\frac{T}{2} = \frac{2k\pi}{\text{sen}(x+\frac{T}{2})}$
igualdad que sólo es válida si $k = 0$ ya que
$-1 \leq \cos\frac{T}{2} \leq 1$ y $-1 \leq \text{sen}(x+\frac{T}{2}) \leq 1$,
así que esto obliga a $\cos\frac{T}{2} = 0 \Rightarrow T = \pi$. Verifique Ud. que no existe un período menor que π. Con el signo $(+)$ llegará al período 2π que también sirve pero no es el menor.

g) Demostraremos lo contrario. Sea T el período de la función, entonces es válida la identidad
$\cos(x+T)^2 = \cos x^2 \Rightarrow (x+T)^2 = 2k\pi \pm x^2$, $k \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow x^2+2Tx+T^2 \pm x^2 = 2k\pi$, pero ésta igualdad es imposible, ya que k sólo puede tomar valores enteros y el primer miembro contiene una función lineal o cuadrática de un argumento continuo x.

19. Dados los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$, demostrar que el de $f(x)\,\text{sen}^2 x + g(x)\cos^2 x$ es una curva ondulante que oscila entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Solución.

Supongamos $f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)\,\text{sen}^2 x - g(x)\,\text{sen}^2 x = f(x)\,\text{sen}^2 x - g(x)(1-\cos^2 x) \leq 0 \Rightarrow f(x)\,\text{sen}^2 x + g(x)\cos^2 x \leq g(x)$ (1)

de igual forma si

$g(x) - f(x) \geq 0 \Rightarrow \cos^2 x g(x) - \cos^2 x f(x) = \cos^2 x g(x) - (1-\text{sen}^2 x) f(x) \geq 0$

$\cos^2 x g(x) + sen^2 x f(x) \geq f(x)$ (2),

por (1) y (2) concluimos $f(x) \leq f(x)\,\text{sen}^2 x + g(x)\cos^2 x \leq g(x)$,

análogo resulta si se supone $g(x) \leq f(x)$. Es ondulante por ser función de curvas ondulantes.

20. Demostrar que si la función $f(x) = \text{sen}\,x + \cos ax$ es periódica a es racional.

Solución.

Sea T el período de f, así $f(x) = f(x+T)$, $T > 0$ de donde:

$\text{sen}\,x + \cos ax = \text{sen}(x+T) + \cos(ax + aT)$

esta igualdad obliga a:

$\text{sen}\,x = \text{sen}(x+T) \wedge \cos ax = \cos(ax+aT)$.

Sea $T = 2\pi n$ y $aT = 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}^+$, dividiendo miembro a miembro: $a = \frac{m}{n}$, luego a es racional.

21. Demostrar que f es periódica de período T, la función $f(ax+b)$ también es periódica. Determinar su período teniendo en cuenta el signo de a, $a \neq 0$.

Solución.

Sabemos que $f(x+T) = f(x)$, $T > 0$ y sea $h(x) = f(ax+b)$, por mostrar que $h(x+p) = h(x)$, en efecto:

$h(x+p) = f(ax+ap+b) = f(ax+b+ap) = f(ax+b)$

donde $ap = T \Rightarrow p = \frac{T}{a}$ período de $h(x)$. Ahora como el período es positivo, si $a > 0$ conviene tomar $\frac{T}{a}$ y si $a < 0$ conviene tomar $-\frac{T}{a}$. Verifique que no hay otro P menor que $\frac{T}{a}$.

22. Demostrar que la suma de dos funciones crecientes en un intervalo abierto determinado es una función monótona creciente en este intervalo. ¿Será monótona la función diferencia de dos funciones crecientes?.

Solución.

Sean $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \wedge g(x_1) \geq g(x_2)$, sumando miembro a miembro:

$f(x_1) + g(x_1) \geq f(x_2) + g(x_2) \Rightarrow (f+g)(x_1) \geq (f+g)(x_2)$,

con lo que la suma es monótona creciente la función diferencia no es creciente, bastará un ejemplo. Sabemos que $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ son crecientes en $\mathbb{R}$, sin embargo, $f(x) - g(x) = x - x^2$ no lo es siempre en $\mathbb{R}$.

23. Demostrar que:

a) Si f y g son pares, $f+g$ y fg son pares.

b) Si f es par y g impar, fg es impar.

c) Si f y g son impares, $f+g$ es impar y fg es par.

Demostración.

a) Como f y g son pares, $f(x) = f(-x)$ y $g(x) = g(-x)$
Sumando: $f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x)$, de donde $(f+g)(x) = (f+g)(-x)$. Análogamente, $f(x)g(x) = f(-x)g(-x)$ de donde $(fg)(x) = (fg)(-x)$.

b) De igual forma $f(x) = f(-x)$ y $g(x) = -g(-x)$ de donde multiplicando $f(x)g(x) = -f(-x)g(-x) \Rightarrow (fg)(x) = -(fg)(-x)$.

c) $f(x) = -f(-x)$ y $g(x) = -g(-x) \Rightarrow f(x) + g(x)$
$-[f(-x) + g(-x)] \Rightarrow (f+g)(x) = -(f+g)(-x)$.
Finalmente, $f(x)g(x) = f(-x)g(-x)$ de donde $(fg)(x) = (fg)(-x)$ lo que indica que fg es par.

24. Trazar el gráfico de la función: $f(x) = 2\sqrt{3(x-1)}+1$ transformando el gráfico de $y = \sqrt{x}$.

Solución.

Primero dibujamos el gráfico de $y = \sqrt{x}$, $x > 0$ (Figura 67) y lo transformamos con la secuencia siguiente, alargamos $2\sqrt{3}$ veces las ordenadas de los puntos del gráfico de la figura 67 y no variando sus abscisas se obtiene el gráfico de $y = 2\sqrt{3x}$ (Figura 68). Ahora deplazando el gráfico obtenido una unidad hacia la derecha (Figura 69) y finalmente otra unidad hacia arriba, obtenemos $y = 2\sqrt{3(x-1)} + 1$.(Figura 70).

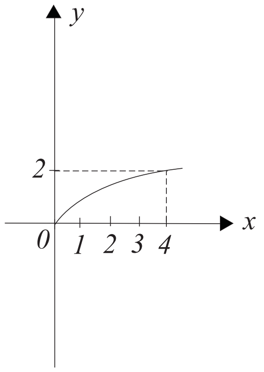


Figura 2.67

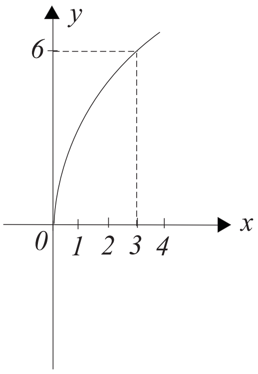


Figura 2.68

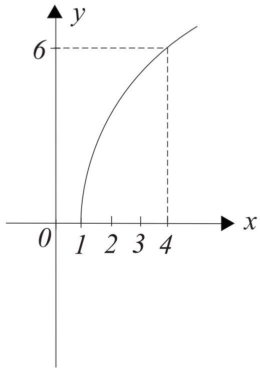


Figura 2.69

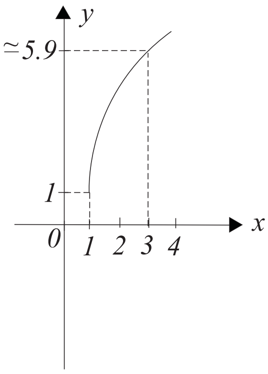


Figura 2.70

25. Dibujar el gráfico de las funciones:

   a) $f(x) = 3^x - 3^x 3^{-x}$

   b) $f(x) = \cos^2 x - 2\cos x$

Solución.

a) Notemos de inmediato que $\operatorname{dom} f = (-\infty, \infty)$. Dibujamos por separado los gráficos de $f_1(x) = 3^x$ y $f_2(x) = -3^{-x}$ (líneas segmentadas) y sumamos gráficamente sus ordenadas. Nótese también que: $f_2(x) < f(x) < f_1(x)$ y que $f_2(x)$ tiende a cero cuando crece x y que $f_1(x)$ tiende a cero cuando x disminuye.

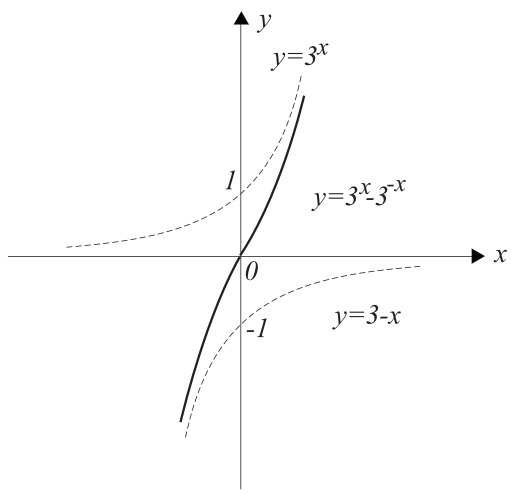


Figura 2.71: Gráfica de $f(x) = 3^x - 3^x 3^{-x}$

b) El dominio es toda la escala real completa. La función tiene período 2π, por lo tanto la estudiaremos en $[0, 2\pi]$. Raíces $f(x) = 0 \Rightarrow \cos x(\cos x - 2) = 0 \Rightarrow \cos = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} \vee x_2 = \frac{3\pi}{2}$.
Signos: $f(x) > 0;\ \forall\ x : \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$; $f(x) < 0;\ \forall\ x : 0 < xx\frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

Escribiendo la función en la forma $f(x) = (1 - \cos x)^2 - 1$ se observa que es decreciente cuando la función $\cos x$ es creciente, esto en $(\pi, 2\pi)$ y es creciente cuando la función $\cos x$ es decreciente, esto en $(0, \pi)$. Notemos que: $f(\pi) = 3 \wedge f(0) = f(2\pi) = -1$, así $\operatorname{rec} f = [-1, 3]$.

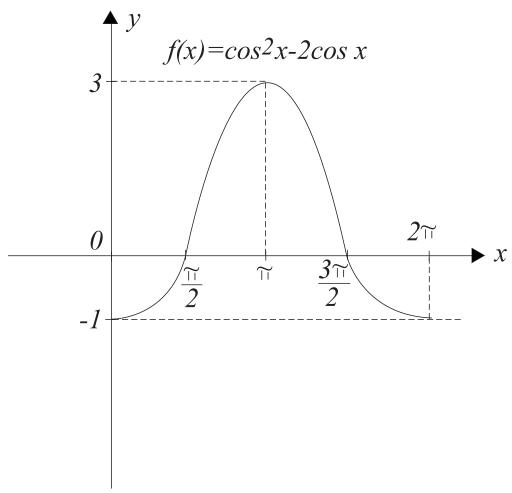


Figura 2.72: Gráfica de $f(x) = \cos^2 x - 2\cos x$

2.5. Problemas Propuestos

1. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$, $h(x) = \cos x$, encontrar:

   a) $(f \pm g)(2), (fg)(0), (\frac{h}{g})(\frac{\pi}{6}), (foh)(\frac{\pi}{3}), (goh)(\pi)$; $(fog)(2)$; $(gof)(2)$

   b) El dominio de $f + g$, goh, hog, $\frac{g}{f\,h}$, gog.

   Respuestas.

   a) $\sqrt{2} \pm 1$; 0; $\frac{\sqrt{3}}{12}(\pi - 6)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 1; $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

   b) $[0, 1) \cup (1, +\infty)$; $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
   $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq (2k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}\}$;
   $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

2. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2 + 1) & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \frac{1}{x^2-1} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 2^x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   Hallar: $f(0)$, $f(-3)$, $f(1)$, $f(10)$, $f(\operatorname{sen}\sqrt{3})$, $f(-1)$, $f(f(1))$.

   Respuestas.

   -1, $\log(10)$, 2, 2^{10}, $\frac{1}{\operatorname{sen} 2 - 1}$, $\log 2$, 4.

3. Dadas las funciones

$$f(x)=\begin{cases}\log x & \text{si} \quad x\geq 2\\ \frac{1}{x-2} & \text{si} \quad x<2\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x & \text{si} \quad |x|<1\\ x^2+1 & \text{si} \quad |x|\geq 1\end{cases}$$

Encuentre: $(fog)(x)$ y $(gof)(x)$.

Respuestas.

$$(fog)(x)=\begin{cases}\frac{1}{\operatorname{sen} x-2} & \text{si} \quad |x|<1\\ \log(x^2+1) & \text{si} \quad |x|\geq 1\end{cases}$$

$$(gof)(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}\frac{1}{x-2} & \text{si} \quad x<1\\ (\frac{1}{x-2})^2+1 & \text{si} \quad 1\leq x<2\\ \operatorname{sen}(\log x) & \text{si} \quad 2\leq x<e\\ \log^2 x+1 & \text{si} \quad x\geq e\end{cases}$$

4. Hallar los intervalos en que la función $f(x)=ax^2+bx+c$ es creciente y en los que es decreciente y sus valores máximo y mínimo.

Respuestas.

Si $a>0$, $f(x)$ decrece en $(-\infty,-\frac{b}{2a})$ y crece en $(-\frac{b}{2a},+\infty)$ evidentemente $f_{\text{mín}}=f(-\frac{b}{2a})=\frac{4ac-b^2}{4a}$, $\exists\ f_{\text{máx}}$ si $a<0$, $f(x)$ aumenta en $(-\infty,-\frac{b}{2a})$ y disminuye en $(-\frac{b}{2a},+\infty)$ y $f_{\text{máx}}=\frac{4ac-b^2}{4a}$, mientras que no tiene valor mínimo.

5. Aplicando los resultados del problema 4.

   a) Hallar el valor mínimo de $f(x)=2x^2-3x-1$

   b) Hallar el valor máximo de $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$

   c) Hallar el valor mínimo que alcanza la función $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2$

   d) Hallar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un triángulo ABC de base b y altura h. (Ver problema resuelto N°4).

Respuestas.

a) $-\frac{17}{8}$

b) 2

c) Para $x=\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i$

d) $\frac{h}{4b}$

6. Hallar el dominio de definición de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \log(1 - \log(x^2 - 5x + 6))$
b) $f(x) = \sqrt{3 - x} + \operatorname{Arc\,sen}(\frac{3-2x}{5})$
c) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$
d) $f(x) = \sqrt{x - 2} - \frac{1}{\sqrt{3-x}}$
e) $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x)$
f) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x} + Ln(\cos x)$
g) $f(x) = \frac{x}{|x|}$
h) $f(x) = x + \sqrt{x - |x|}$
i) $f(x) = x + \sqrt{x - [x]}$
j) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$
k) $f(x) = \operatorname{Arc\,sen}(|x| - 3)$
l) $f(x) = \operatorname{Arc\,cos}(\frac{1}{\operatorname{sen} x})$
m) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

Respuestas.

a) $(2, \frac{5-\alpha}{2}) \cup (3, \frac{5+\alpha}{2}),\ \alpha = \sqrt{4e+1}$
b) $[-1, 3]$
c) $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
d) $[2, 3)$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
g) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
h) $[0, +\infty)$
i) $(-\infty, +\infty)$
j) $[(2k\pi)^2, (2k+1)^2\pi^2], k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$
k) $[-4, -2] \cup [2, 4]$
l) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
m) $(-\infty, 0)$

7. El dominio de $f(x)$ es $[0, 1]$. Determinar donde están definidas las funciones $f(x-3)$; $f(2x-5)$; $f(|x|)$; $f(3x^2)$; $f(\cos x)$; $f(\operatorname{tg} x)$.

Respuestas.

$[0, 4]$; $[\frac{5}{2}, 3]$; $[-1, -1]$; $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$, $[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}]$, $(k \in \mathbb{Z})$.

8. Demuéstrese que $f(x)$ es monótona en $\mathbb{R}$. En que casos $f(x)$ tiene raíces reales.

a) $f(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = 1 + \frac{x}{1+|x|}$

c) $f(x) = \frac{x^3+2x}{1+x^2}$

d) $f(x) = \frac{2-x}{x}$

Respuestas.

a) -1

b) No tiene raćes

c) 0

d) 2

9. Demuéstrese que las siguientes funciones son monótonas en sus dominios y exprésense sus inversas en los dominios adecuados.

a) $f(x) = 2x - 5$

b) $f(x) = \sqrt{x-2},\ x \geq 2$

c) $f(x) = x^2 + 4x + 7,\ x \geq -2$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x - 4 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$

e) $f(x) = x + \frac{1}{x},\ x \geq 1$

Respuestas.

Las inversas están dadas por:

a) $\frac{x+5}{2}$

b) $x^2 + 2,\ x \geq 0$

c) $\sqrt{x-3} - 2,\ x \geq 3$

d) $\begin{cases} \frac{3+\sqrt{9+4x}}{2} & \text{si} \quad x \geq -2 \\ x + 4 & \text{si} \quad x < -2 \end{cases}$

e) $\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2},\ x \geq 2$

10. Grafique las funciones siguientes, mediante la pauta: Dominio, raíces y signos, simetrías, periodicidad, acotada, crecimientos, comportamiento de f para valores extremos de x u otra característica.

a) $y = ||x| - 1|$

b) $y = |x^2 + 4x + 2|$ en $[-4, 3]$

c) $y = \frac{1}{x(x^2-4)}$

d) $y = x(x^2 - 4)$

e) $y = x|x|$

f) $y = \frac{x}{|x|}$

g) $y = \frac{x^2-1}{x}$

h) $y = |x-1| - 2|x| + |x+1|$

i) $y = \cos|x|$

j) $\cos\sqrt{x}$

k) $y = x - \frac{1}{x}$

l) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

m) $y = \cos(\operatorname{sen} x)$

n) $y = \frac{x+1}{x-1}$

ñ) $y = (\frac{x+1}{x-1})^2$

o) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$

p) $y = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$, $a < b$

q) $y = 2\sqrt{-5(x+\frac{3}{2})} - \frac{5}{4}$

r) $y = (x-a)(x-b)(x-c)$, $a < b < c$.

Señale que forma toma el gráfico al reemplazar uno o los dos signos de desigualdad por signos de igualdad.

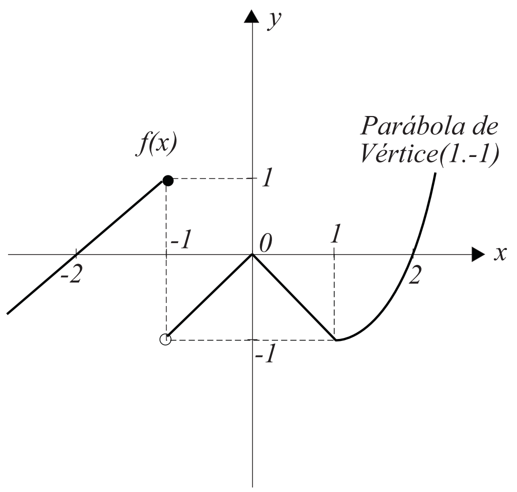
11. Trácense los gráficos siguientes y señálense si las funciones son pares o impares, periódicas.

a) $y = \operatorname{sen} 2x$, $y = 2\operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$, $y = \operatorname{sen}(x+2)$

b) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, $y = \operatorname{sen} x - \cos x$, $y = \operatorname{sen} x \cos x$

c) $y = \cos(x+\pi)$, $y = 2\cos(x+\frac{\pi}{3})$, $y = \operatorname{tg} x - x$

12. Sean f y h definidas mediante



$$h(x) = \begin{cases} 2|x+3| & \text{si} \quad x \leq -2 \\ 2|x+1| & \text{si} \quad -2 < x \leq 0 \\ 2|x^2-1| & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Figura 2.73: Gráfica de $f(x)$

Grafique:

a) $g(x) = |2f(x+1)| - h(x)$

b) $g(x) = \text{Arc}\,\text{sen}\, f(x)$

13. Sea $f(x)$ la función cuya gráfica se indica a continuación:

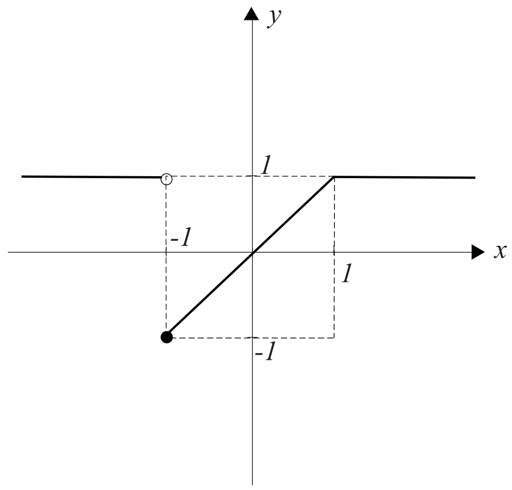


Figura 2.74: Gráfica de $f(x)$

Bosqueje el gráfico de:

a) $g(x) = |2\; f(3-x)| - 2$

b) $\text{Arc}\,\text{sen}\, f(x)$

c) $f(\pi \cos x)$

d) $|f(x)|,\; f(|x|)$

e) $f(\log x),\; \log f(x)$

14. Sea $f(x)$ la función de período cuatro cuyo gráfico se indica para $-2 \leq x < 2$.

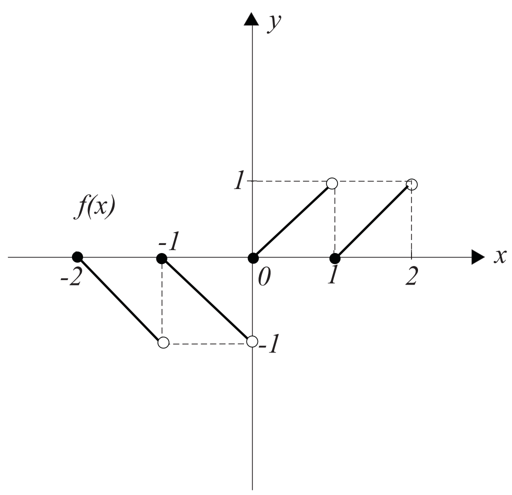


Figura 2.75: Gráfica de $f(x)$

Determinar los gráficos de $g(x) = \operatorname{sen}(\pi f(x))$ y de $h(x) = |f(1 + \frac{x}{2}) - \frac{1}{2}|$. Indicando, si hubiera simetrías y períodos.

15. Dada la función $f(x)$ cuyo gráfico es:

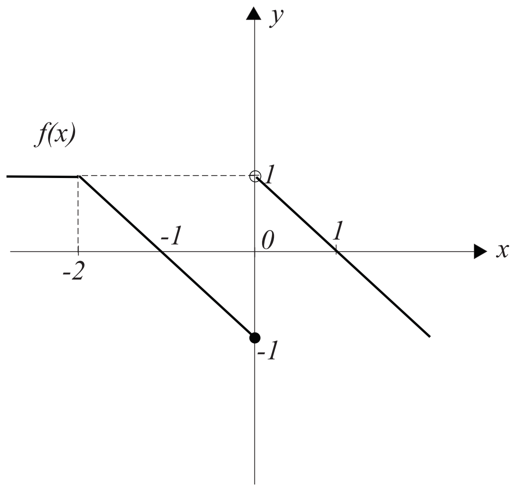


Figura 2.76: Gráfica de $f(x)$

Bosquejar los gráficos de las funciones:

$g(x) = 1 - |f(2 - x)|$
$h(x) = \operatorname{Arc\,sen} f(x)$.

16. Bosquejar el gráfico de la función que satisface:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x - 2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

a) Sabiendo que f es impar y tiene período 4.

b) Sabiendo que f es par y tiene período 4.

17. Demostrar que si f es estrictamente monótona tiene una inversa definida en el recorrido de f.

18. Determinar cuáles de las siguientes funciones son pares, cuáles son impares y cuáles no caben en ninguna de estas categorás.

a) $f(x) = 2x^3 - x + 1$

b) $f(x) = 4 - 2x^4 + \operatorname{sen}^2 x$

c) $f(x) = 1 + x + x^2$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

e) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

f) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$

g) $f(x) = x \operatorname{sen}^2 x - x^3$

h) $f(x) = (1 + 2^x)^2 / 2^x$

i) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$

j) $f(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$

k) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

l) $f(x) = \frac{1+a^{kx}}{1-a^{kx}}, \; k \in \mathbb{Z}$

Respuestas.

Son pares: b, f, h.
Son impares: d, g, i, j en $(-1,1), k, l$.

19. Hallar el período de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$

b) $f(x) = \operatorname{sen} 2\pi x$

c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$

d) $f(x) = 2\cos\frac{x-\pi}{3}$

e) $f(x) = 3\operatorname{sen}\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2}$

f) $f(x) = 4\operatorname{sen}(3x + \frac{\pi}{4})$

Respuestas.

a) $\frac{\pi}{2}$ b) 1 c) π d) 6π e) 4π f) $\frac{2\pi}{3}$

20. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Determine: $|f(x)|$, $f(|x|)$, $f(\cos x)$, $\operatorname{Arc\,sen} f(x)$, $f(\log x)$, $\log f(x)$ y sus gráficos respectivos.

21. Exprese cada una de las siguientes funciones en suma de una función par más una función impar.

a) $f(x) = 3 - 2x + x^4 - 5x^7$

b) $f(x) = (x+2)\operatorname{sen} x - x^3 \operatorname{sen} 5x$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{3})$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x$

22. Dibujar los gráficos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + \sqrt{x^2} + \sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{2}{x+\sqrt{x^2}}$

c) $f(x) = \cos x + |\cos x|$

d) $f(x) = x|x+2|$

e) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

f) $f(x) = 3\,\text{sen}(2x - 4)$

23. Dada la función f gráficamente, dibujar los gráficos de:
$f(x+1)$, $f(\frac{x}{2})$, $|f(x)|$, $(|f(x)| \pm f(x))/2$, $\frac{|f(x)|}{f(x)}$, $f^{-1}(x)$, $[f(x)]$.

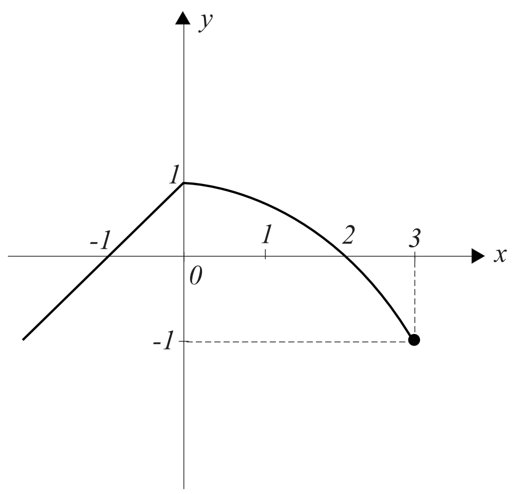


Figura 2.77: Gráfica de $f(x)$

24. Encuentre el gráfico de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{[x] + x}$; $g(x) = [x] - f(x)$

b) $f(x) = [x]^2$; $f(x) = [\sqrt{x}]$

c) $f(x) = [\cos x]$; $f(x) = [\text{sen}\,\pi x]$

d) $f(x) = [x] + (x - [x])^2$

e) $f(x) = \sqrt{x}[\sqrt{x}]$

f) $f(x) = x^2 - [x^2]$

25. Demostrar que si f está definida en toda la recta y su gráfica tiene dos ejes de simetría verticales $x = a$ y $x = b$ $(a \neq b)$ necesariamente hay un T tal que $f(x+T) = f(x)$, para todo x. ¿Es por ello necesariamente periódica la función?

26. Bosquejar los gráficos de:

a) $f(x) = \text{tg}(\frac{\pi}{2}\cos x)$

b) $f(x) = x + \text{sen}\,x$

c) $f(x) = \frac{1}{x} + \text{sen}\,x$

d) $f(x) = \frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x}$

e) $f(x) = (\text{sen}\,\frac{1}{x})^2$

f) $f(x) = \text{sen}\,x + \text{sen}\,\frac{1}{x}$

g) $f(x) = \text{sen}\,x\,\text{sen}\,\frac{1}{x}$

h) $f(x) = \frac{\cos x}{|\cos x|}$

i) $f(x) = \log(\cos x)$

j) $f(x) = \cos(\log x)$

k) $f(x) = e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

l) $f(x) = 2^{-x}\sqrt{\operatorname{sen} \pi x}$

m) $f(x) = \operatorname{Arc\,cotg} \frac{1}{x}$

27. Demostrar que la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$ es acotada; bosqueje su gráfico.

28. Demostrar que las siguientes funciones no son racionales.

    a) $f(x) = \operatorname{sen} x$

    b) $f(x) = \sqrt{x}$

29. Sean f y g dos funciones periódicas definidas en un conjunto común. Demostrar que si los períodos de estas funciones son conmesurables entre si (esto es, si su cuociente es racional), entonces su suma y su producto son también funciones periódicas.

30. Demostrar que si el dominio de definición de la función $f(x)$ es simétrico respecto del eje Y, entonces $f(x) + f(-x)$ es una función par y $f(x) - f(-x)$ es impar.

31. Demostrar que una función cualquiera $f(x)$ definida en un intervalo simétrico $(-a, a)$ se puede presentar como una suma de una función par y una función impar. Volver a escribir las funciones siguientes en forma de suma de una función par y una función impar.

    a) $f(x) = a^x$

    b) $f(x) = \frac{x+2}{1+x^2}$

32. Conociendo el gráfico de la función $f(x)$, dibujar los gráficos de las funciones siguientes:

    a) $y = f^2(x)$

    b) $y = \sqrt{f(x)}$

    c) $y = f(f(x))$

33. Demostrar que la ecuación $x^2 + 2x + 1 = \sqrt{x} - 1$ no tiene raíces reales.

34. Un triángulo isósceles de perímetro $2p = 12$ dado gira alrededor de su base. Escribir la función $V(x)$, donde $V(x)$ es el volumen del sólido de revolución así obtenido y x es la longitud del lado isósceles del triángulo.

    Respuesta.

    $V(x) = 8\pi(x-3)(6-x);\ 3 < x < 6.$