1. Demuestre ,utilizando inducción, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

**Solución.**

Para $n = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2+k} &=? \quad \frac{1}{1+1}\\
\frac{1}{1^2+1} &=? \quad \frac{1}{2}\\
\frac{1}{2} &= \quad \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Hipótesis de Inducción:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1}$$

Por demostrar:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2+k} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}\right) + \frac{1}{(n+1)^2+(n+1)}\\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n^2+2n+1+n+1}\\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n^2+3x+2}\\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n+1}{n+2} \qquad QED.
\end{aligned}$$

2. Demuestre, por inducción, que $n^2 + n$ es par $\forall n \in \mathbb{R}$

   **Solución.**

   Para $n = 1$
   $1^2 + 1 = 2$ es par.

   Hipótesis de inducción:
   $n^2 + n$ es par, es decir $n^2 + n = 2k$ con $k \in \mathbb{R}$

   Por demostrar:
   $(n+1)^2 + n + 1$ es par.
   $n^2 + 2n + 1 + n + 1 = (n^2 + n) + 2n + 2 = 2k + 2n + 2 = 2(k + n + 1)$ es par.

   QED

3. Demuestre, usando inducción, que los números de la forma $5n^3 + 7n$ son divisibles por 6.

   **Solución.**

   Para $n = 1$
   $5(1)^3 + 7(1) = 12 = 6 * 2$

   Hipótesis de inducción:

   $5n^3 + 7n = 6k$ con $k \in \mathbb{R}$

   Por demostrar: $5(n+1)^3 + 7(n+1) = 6p$ con $p \in \mathbb{R}$

   $5(n+1)^3 + 7(n+1) = 5(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 7n + 7 = 5n^3 + 15n^2 + 15n + 5 + 7n + 7 = 5n^3 + 7n + 15n^2 + 15n + 12 = 6k + 12 + 15(n^2 + n) = 6k + 12 + (5)(3)(n^2 + n)$ Del ejercicio anterior sabemos que $(n^2 + n)$ es par:
   $= 6k + 12 + (5)(3)(2s) = 6k + 12 + (6)(5)s = 6(k + 2 + 5s)$ que es divisible por 6.
   QED.

4. Demuestre,usando inducción, que si $a > -1$ entonces $(1+a)^n \geq 1 + na$

   **Solución.**

   Para $n = 1$
   $(1+a)^1 \geq 1 + 1a$

   Hipótesis de inducción:
   $(1+a)^n \geq 1 + na$

   Por demostrar que:
   $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$

   Partiendo de la hipótesis:
   $(1+a)^n \geq 1 + na$

Como $a > -1$ entonces $(1+a) > 0$ y podemos multiplicar la desigualdad por (1+a)
$(1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a)$
$(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2$
$(1+a)^{n+1} \geq 1+a(n+1)+na^2 \geq 1+a(n+1)$
QED